УДК 514.753

И.В. Гребенник[1], Т.Е. Романова[2], С.Б. Шеховцов[3]

[1]*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*
[2]*Институт проблем машиностроения им. А.Н Подгорного НАН Украины*
[3]*Харьковский национальный университет внутренних дел*

ОЦЕНКА И РАНЖИРОВАНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Рассматривается задача многокритериального выбора решения в условиях неопределенности в геометрическом проектировании с использованием элементов теории интервального анализа.

принятие решений, условие неопределенности, интервальная многофакторная оценка

Введение

Одной из проблем, возникающих в геометрическом проектировании, является проблема создания интеллектуальных систем для эффективного решения оптимизационных задач упаковки, раскроя и покрытия [1].

Необходимость учета погрешностей метрических характеристик и параметров размещения геометрических объектов при математическом моделировании, наличие неопределенностей исходных данных приводят к необходимости разработки конструктивных средств выбора наилучшего решения.

Как правило, такой выбор осуществляется на основании нескольких критериев в условиях неопределенности относительно важности тех или иных характеристик принимаемого решения. Проблема многокритериального выбора решения в условиях неопределенности может быть решена различными способами, например, приведенными в работах [2, 3].

В данном исследовании для выбора решений в условиях неопределенности используются элементы теории интервального анализа в геометрическом проектировании [4].

Постановка задачи

Основной проблемой теории принятия решений [2, 5] является построение модели многофакторного оценивания допустимых альтернатив, которая состоит в следующем.

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – множество допустимых альтернатив, $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ – множество разнородных частных критериев, характеризующих альтернативы.

Задача. Необходимо построить обобщенную многофакторную интервальную оценку полезности альтернатив $x \in X$ вида

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}=\{\langle A_i\rangle, i\in J_n=\{1,2,\ldots,n\}\}$ – множество интервальных коэффициентов, выполняющих функцию приведения разнородных частных критериев к одной размерности, одинаковому интервалу возможных значений и учитывающие их относительную важность, $\langle A_i\rangle \in \mathbf{I_s R}$, $\mathbf{I_s R}$ – пространство центрированных интервалов [4], $\mathbf{G}$ – некоторое интервальное отображение вида $\mathbf{G}:(\mathbf{\Lambda}\times K)\to \mathbf{I_s R}$.

Целью исследования является построение отображения $\mathbf{G}$ в аналитическом виде, т.е. получение оценки, позволяющей установить отношение предпочтения на множестве альтернатив.

Идеализированная математическая модель

Построение оценки (1) в случае, когда $\langle A_i\rangle=\langle a_i, 0\rangle \equiv a_i \in R^1$ сводится к реализации идеализированной математической модели $P(x)=G(\Lambda,\ K)$.

Построение математической модели поставленной задачи связано с решением двух взаимосвязанных задач структурной и параметрической идентификации.

Эффективным средством решения задачи структурной идентификации в идеализированном случае являются функции обобщенной полезности, основанные на гипотезе аддитивности локальных полезностей частных критериев вида [5]:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(k_i(x)); \tag{2}$$

$$\overline{P}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{p}_i(k_i(x)), \tag{3}$$

где $p_i(k_i(x))$ – функция полезности частных критериев, которые удовлетворяют требованиям безразмерности, одинакового интервала изменения и инвариантности к виду экстремума; $\overline{p}_i(k_i(x))=1-p_i(k_i(x))$ – функция потери полезности; α_i – безразмерные коэффициенты относительной важности частных критериев, удовлетворяющие условиям:

$$0 \le a_i \le 1,\ i \in J_n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \qquad (4)$$

Как показано в [6], для определения значений коэффициентов α_i не представляется возможным использовать традиционные методы параметрической идентификации, например, метод наименьших квадратов. Значения α_i наиболее адекватно могут быть интерпретированы как интервалы возможных значений параметров моделей (2), (3) с заданием на них более или менее определенных предпочтений. При этом в силу особенностей методов идентификации в большинстве случаев определить предпочтения внутри интервалов невозможно. В этих условиях необходимо решить задачу многофакторного оценивания и ранжирования альтернатив. Традиционно эта задача решается путем определения по исходной интервальной информации точечных оценок тем или иным методом [6].

Интервальная математическая модель

Методы интервального анализа позволяют оценивать и ранжировать альтернативы непосредственно на основе информации о предпочтительности частных критериев, заданной в интервальном виде.

Пусть важность каждого частного критерия $k_i(x)$ определяется интервалом вида $\alpha_i = [\alpha_{i_{min}}, \alpha_{i_{max}}]$. Исследуем случай, когда внутри интервала α_i предпочтения не определены.

Представим математическую модель задачи (1) аналогично (2) – (4).

Пусть для интервалов α_i выполняется соотношение

$$\alpha_i = [\alpha_{i_{min}}, \alpha_{i_{max}}],\ i \in J_n. \qquad (5)$$

Каждому интервалу вида (5) поставим в соответствие центрированный интервал $\langle A_i \rangle = \langle a_i, \nu_{a_i} \rangle \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$, [4] следующим образом:

$$\langle A_i \rangle \Leftrightarrow [a_i - \nu_{a_i}, a_i - \nu_{a_i}] = [\alpha_{i_{min}}, \alpha_{i_{max}}], \qquad (6)$$

где $a_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{min}} + \alpha_{i_{max}})$, $\nu_{a_i} = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{max}} - \alpha_{i_{min}})$.

Множеству интервальных коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ – элемент пространства $\mathbf{I_s^n R} = \underbrace{\mathbf{I_s R} \times ... \times \mathbf{I_s R}}_{n}$ [7] вида

$$A = (\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, ..., \langle A_n \rangle) \in \mathbf{I_s^n R}.$$

В пространствах $\mathbf{I_s R}$, $\mathbf{I_s^n R}$ определены операции сложения и умножения на число $\lambda \in R^1$ [4, 7]:

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, \nu_x + \nu_y \rangle;$$

$$\lambda \langle X \rangle = \begin{cases} \langle \lambda x, \lambda \nu_x \rangle, & \text{если } \lambda > 0; \\ \langle \lambda x, |\lambda| \nu_x \rangle, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$$

где

$$\langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_s R};\ \langle Y \rangle = \langle y, \nu_y \rangle \in \mathbf{I_s R};$$

$$X + Y = (\langle X_1 \rangle + \langle Y_1 \rangle, \langle X_2 \rangle + \langle Y_2 \rangle, ..., \langle X_n \rangle + \langle Y_n \rangle);$$

$$\lambda X = (\lambda \langle X_1 \rangle, \lambda \langle X_2 \rangle, ..., \lambda \langle X_n \rangle),$$

где

$$X = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, ..., \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I_s^n R};$$

$$Y = (\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle, ..., \langle Y_n \rangle) \in \mathbf{I_s^n R}.$$

Заметим, что в модели (1) значения $p_i(k_i(x))$, $\overline{p}_i(k_i(x))$ являются действительными числами, а значения коэффициентов относительной важности частных критериев – элементами интервального пространства $\mathbf{I_s R}$. В соответствии с аддитивной моделью (2), (3) и операциями сложения и умножения на действительное число, введенными в пространстве $\mathbf{I_s R}$, для каждой альтернативы $x \in X$ сформируем интервальные многофакторные оценки $\mathbf{P}(x, A)$ и $\tilde{\mathbf{P}}(x, A)$.

В соответствии с моделью (2), (3) требуется выполнение условий, аналогичных (4), накладываемых на интервальные коэффициенты $\langle A_i \rangle$, $i \in J_n$.

С этой целью осуществим нормализацию коэффициентов $\langle A_i \rangle$ по формуле $\langle A_i^{н} \rangle = \sigma^{н} \cdot \langle A_i \rangle$, $i \in J_n$, где $\sigma^{н} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle}$.

Воспользуемся формулами интервального умножения, введенными в пространстве $\mathbf{I_s R}$ [4]

Пусть $\langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I_s R}$. Интервальное произведение $\langle Y \rangle * \langle X \rangle$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle = \langle xy + \nu_x \nu_y, y\nu_x + x\nu_y \rangle, \\ \text{если } \langle Y \rangle, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1}; \\ \overline{\langle Y \rangle} \cdot \langle X \rangle = \langle xy - \nu_x \nu_y, y\nu_x - x\nu_y \rangle, \\ \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1}; \\ \langle y + s|\nu_y|, 0 \rangle \cdot \langle X \rangle = \langle x(y + s|\nu_y|), \nu_x (y + s|\nu_y|) \rangle, \\ \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1}; \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu_x \ge 0, \nu_y \ge 0 \text{ или } \nu_x < 0, \nu_y < 0; \\ -1, & \text{если } \nu_x \ge 0, \nu_y \le 0 \text{ или } \nu_x < 0, \nu_y > 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{I}_{s1}$ – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I_s R}$, которые удовлетворяют неравенству $x - |\nu_x| > 0$; $\mathbf{I}_{s2}$ – множество точек $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, которые удовлетворяют неравенству $x+|v_x|<0$; $\mathbf{I}_{s3}$ – множество точек $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$x-|v_x|\le 0,\ \text{если } x\ge 0;$$
$$x+|v_x|\ge 0,\ \text{если } x\le 0.$$

$\langle A\rangle\cdot\langle B\rangle$ – есть операция, соответствующая операция гиперболического умножения двух интервалов A и B.

Воспользовавшись формулой интервального деления [4], имеем

$$\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle=\frac{\langle A_i\rangle}{\sum\limits_{i=1}^{n}\langle A_i\rangle}=\frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\langle A_i\rangle*\langle B\rangle, \qquad (7)$$

$|b|\ne|v_b|$.

Поскольку $a-|v_a|>0$, то согласно таблице умножения интервальных чисел, формула (7) примет следующий вид:

$$\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle=\frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\left\langle a_i b+\nu_{a_i}\nu_b,\ b\nu_{a_i}+a_i\nu_b\right\rangle,$$

где $\langle B\rangle=\langle b,\nu_b\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle A_i\rangle=\left\langle \sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right\rangle$.

Следовательно,

$$\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle=\left\langle a_i^{\text{н}},\nu_i^{\text{н}}\right\rangle, \qquad (8)$$

где

$$a_i^{\text{н}}=\frac{a_i\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\nu_{a_i}\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2};$$

$$\nu_i^{\text{н}}=\frac{\nu_{a_i}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}.$$

Учитывая (8), определим сумму коэффициентов $\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle$, $i\in J_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle=\left\langle a^{\text{н}},\nu_a^{\text{н}}\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle A_i\rangle}{\langle B\rangle}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle A_i\rangle}{\langle B\rangle}=\frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\langle a_i b+\nu_{a_i}\nu_b,\ b\nu_{a_i}+a_i\nu_b\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{b^2-\nu_b^2}\cdot\left\langle b\sum_{i=1}^{n}a_i+\nu_b\sum_{i=1}^{n}\nu_{a_i},\ b\sum_{i=1}^{n}\nu_{a_i}+\nu_b\sum_{i=1}^{n}a_i\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{b^2+\nu_b^2}{b^2-\nu_b^2},\ \frac{2b\nu_b}{b^2-\nu_b^2}\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2},\ \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{a_i}\right)^2}\right\rangle;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle=\left\langle a^{\text{н}},\nu_a^{\text{н}}\right\rangle; \qquad (9)$$

$$\langle 0,0\rangle\le\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle\le\left\langle a^{\text{н}},\nu_a^{\text{н}}\right\rangle.$$

Замечание. Если положить все ν_{a_i} равными нулю, то условие (9) будет эквивалентно выражению (4).

Тогда соотношения (7), (8) примут вид

$$\mathbf{P}(x,A^{\text{н}})=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle\cdot p_i(k_i(x)); \qquad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(x,A^{\text{н}})=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle\cdot \overline{p}_i(k_i(x)), \qquad (11)$$

где $A^{\text{н}}=(\left\langle A_1^{\text{н}}\right\rangle,\left\langle A_2^{\text{н}}\right\rangle,\ldots,\left\langle A_n^{\text{н}}\right\rangle)\in\mathbf{I_s^n R}$.

Таким образом, отображение $\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K)$ примет вид

$$\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle\cdot p_i(k_i(x)); \qquad (12)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda},\ K)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i^{\text{н}}\right\rangle\cdot \overline{p}_i(k_i(x)). \qquad (13)$$

Другими словами, согласно (10), (11) каждому решению $x\in X$ поставим в соответствие интервальные многофакторные оценки полезности или потери полезности.

Пусть

$$\langle P_j\rangle=\mathbf{P}(x_j,A);\ X_{\mathbf{P}}=\{\langle P_1\rangle,\ldots,\langle P_m\rangle\};$$

$$\langle\tilde{P}_j\rangle=\tilde{\mathbf{P}}(x_j,A);\ X_{\tilde{\mathbf{P}}}=\{\langle\tilde{P}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{P}_m\rangle\},\ j\in J_m.$$

Рассмотрим задачу выбора решения из множества X на основе интервальных оценок обобщенной полезности (10) или интервальных оценок обобщенной потери полезности (11). Далее, ориентируясь на решение задачи минимизации, будем выбирать решение из множества X с помощью интервальных многофакторных оценок обобщенной потери полезности (11).

С этой целью необходимо решить задачу вида

$$\tilde{\mathbf{P}}(x,A)\to\min_{x\in X}. \qquad (14)$$

Минимум будем понимать в смысле отношения предпочтения $\succ$ [8], которое зададим на множестве $X_{\tilde{\mathbf{P}}}$ следующим образом.

Пусть $\langle A\rangle=\langle a,\nu_a\rangle\in X_{\tilde{\mathbf{P}}}$, $\langle B\rangle=\langle b,\nu_b\rangle\in X_{\tilde{\mathbf{P}}}$, причем $\langle A\rangle\underset{i}{\subseteq}\langle B\rangle$:

$$\langle A\rangle \underset{i}{\subseteq} \langle B\rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-\nu_b \le a-\nu_a) \wedge (a+\nu_a \le b+\nu_b), \quad (15)$$

где $I_sR = \{\langle u, \nu_u\rangle \in \mathbf{I_s R} \mid \nu_u \ge 0\}$;

$$\langle A\rangle \in I_sR;$$
$$\langle B\rangle \in I_sR.$$

Учитывая (15), на множестве интервальных оценок введем отношение предпочтения

$$\langle A\rangle \succ \langle B\rangle \quad (16)$$

следующим образом.

Полагаем, что если выполняется соотношение $\langle A\rangle \underset{i}{\subseteq} \langle B\rangle$, то $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle$, т.е. $\langle A\rangle$ предпочтительнее $\langle B\rangle$.

В случае, когда $\langle A\rangle \underset{i}{\not\subset} \langle B\rangle$, $\langle B\rangle \underset{i}{\not\subset} \langle A\rangle$ и $\langle A\rangle \cap_i \langle B\rangle \ne \varnothing$, полагаем:

если

$$\begin{cases} a \ge b, \\ \nu_a \ge \nu_b \end{cases},$$

то $\langle B\rangle \succ \langle A\rangle$;

если

$$\begin{cases} a \ge b, \\ \nu_a \le \nu_b \end{cases},$$

то $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle$.

Здесь $\langle A\rangle \cap_i \langle B\rangle \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда интервалы $[a-\nu_a, a+\nu_a]$ и $[b-\nu_b, b+\nu_b]$ имеют общие точки.

Если

$$\begin{cases} a \le b; \\ \nu_a \le \nu_b, \end{cases}$$

то полагаем $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle$;

если

$$\begin{cases} a \le b; \\ \nu_a \ge \nu_b, \end{cases}$$

то полагаем $\langle B\rangle \succ \langle A\rangle$.

В том случае, когда $\langle A\rangle \cap_i \langle B\rangle = \varnothing$, полагаем, что $\langle A\rangle \succ \langle B\rangle \Leftrightarrow \langle A\rangle < \langle B\rangle$, где $<$ – отношение порядка в $\mathbf{I_s R}$ [4]:

$$\langle A\rangle < \langle B\rangle \Leftrightarrow (a<b) \vee (a=b) \wedge (\nu_a \le \nu_b).$$

Используя введенное отношение предпочтения на множестве $X_{\tilde{\mathbf{P}}}$, путем попарных сравнений определим наиболее предпочтительный элемент $\langle \tilde{P}_j^0 \rangle \in X_{\tilde{\mathbf{P}}}$ и соответствующее ему решение $x^0 \in X$.

Выводы

Построение многофакторной оценки допустимых альтернатив в условиях неопределенности можно представить в виде интервального отображения (12) или (13).

Ранжирование альтернатив в условиях неопределенности можно реализовать, используя отношение предпочтения (16), заданное на множестве многофакторных интервальных оценок. Кроме того, при нулевых значениях радиусов интервальных коэффициентов предпочтений построенная в работе интервальная математическая модель сводится к идеализированной модели (2) – (4).

Результаты исследований, представленные в данной работе, могут быть использованы при разработке систем поддержки принятия решений, ориентированных на оптимизацию размещения геометрических объектов с целью рационального учета погрешностей исходных данных.

Список литературы

1. Dyckhoff, G. Scheithauer, and J. Terno. Cutting and packing. In M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello, editors, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, chapter 22, P. 393-412. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

2. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь,1981. – 340 с.

3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

4. Стоян Ю.Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23-25.

5. Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – К.: Наук. думка, 2002. – 164 с.

6. Овезгельдыев А.О., Петров К.Э. Оценка и ранжирование альтернатив в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 5. – С. 148-153.

7. Романова Т.Е. Интервальное пространство $\mathbf{I_s^n R}$. *Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 2000. – № 9. – С. 36-41.*

8. Гребенник И.В., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б. Параметрический анализ некоторых оптимизационных задач геометрического проектирования // Искусств. интеллект. – 2003. – № 3. – С. 329-337.

Поступила в редколлегию 16.02.2007

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. С.В. Яковлев, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков.