

УДК 535.81

Е.Д. Прилепский

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба

## ОПТИМИЗАЦИЯ ЧАСТОТНОГО ОТКЛИКА ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Решена задача максимизации частотного отклика оптической системы с круглым входным зрачком на фиксированной пространственной частоте. Получены аналитические выражения для аподизирующих функций зрачка и максимально достижимого частотного отклика при заданной величине светового потока, прошедшего зрачок.*

*разрешающая способность, аподизация, световые потери в зрачке*

### Введение

Среди методов, используемых для оптимизации частотного отклика оптической системы, большое внимание уделяется аподизации – улучшению изображения путем введения в оптическую систему фильтра [1 – 3]. В этих работах, однако, не учитывалось явно условие пассивности оптической системы, поэтому для реальных систем изученные в [1 – 3] функции зрачка могут приводить к недопустимо большим потерям световой энергии в зрачке. Помимо этого, результаты указанных работ фактически относятся к одномерным, щелевым зрачкам, тогда как даже при одномерном сканировании частотный отклик существенно зависит от формы зрачка..

**Целью настоящей статьи** является решение задачи определения оптимальной функции зрачка, максимизирующей частотный отклик оптической системы на фиксированной пространственной частоте при дополнительном условии, ограничивающем допустимые световые потери в зрачке.

Частотный отклик оптической системы на пространственной частоте  $\omega$  определяется отношением

$$R(\omega) = \tau(\omega, 0) / \tau(0, 0), \quad (1)$$

где  $\tau(\omega_x, \omega_y)$  – частотно-контрастная характеристика (ЧКХ) [3], равная преобразованию Фурье от функции рассеяния точки  $S(x_0, y_0)$ , где  $x_0, y_0$  – координаты в плоскости изображения

$$\tau(\omega_x, \omega_y) = \int S(x_0, y_0) \exp[i(\omega_x x_0 + \omega_y y_0)] dx_0 dy_0. \quad (2)$$

Функция рассеяния точки связана с функцией зрачка ( $\Phi Z$ )  $P(x, y)$  соотношением

$$S(x_0, y_0) = A \left| \int P(x, y) \exp[i(x x_0 + y y_0)] dx dy \right|^2, \quad (3)$$

где  $x, y$  – приведенные координаты в плоскости зрачка,  $A$  – постоянный множитель.

Подставляя соотношение (3) в (2) и интегрируя по координатам  $x_0, y_0$ , найдем с точностью до несущественного постоянного множителя

$$\tau(\omega, 0) = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x-x') P(x, y) P(x', y) dx dx' \right\} dy \quad (4)$$

и

$$E = \tau(0, 0) = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 P^2(x, y) dx \right\} dy, \quad (5)$$

где ядро  $K(x-x') = \delta(x-x'-\omega) + \delta(x-x'+\omega)$ .

### Постановка и решение задачи

Максимизация величины (1) для физически реализуемой, пассивной оптической системы при ограничении световых потерь в зрачке приводит к следующей задаче: найти оптимальную  $\Phi Z P^0(x, y)$ , максимизирующую ЧКХ (4) на фиксированной частоте  $\omega_z$ , при ограничениях

$$E = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 P^2(x, y) dx \right\} dy = \text{const} \quad (6)$$

и

$$|P(x, y)| \leq 1. \quad (7)$$

Условие (6) фиксирует полную интенсивность света, прошедшего оптическую систему, условие (7) есть условие пассивности оптической системы. Максимизация функционала  $\tau(\omega_3, 0)$  (4) при дополнительных условиях (6) и (7) приводит к уравнению для оптимальной функции  $P^0(x, y)$  [4]

$$P^0(x, y) = H\left\{\lambda \int_{|x'| \leq \sqrt{1-y^2}} K(x-x') P^0(x', y) dx'\right\}, \quad (8)$$

где 
$$H(z) = \begin{cases} z, & |z| < 1, \\ \text{sign} z, & |z| > 1 \end{cases}. \quad (9)$$

Постоянная  $\lambda$  определяется из условия (6). Так как ядро  $K(x-x')$  не зависит от  $y$ , то уравнение (8) фактически является одномерным, и его решение зависит от параметра  $a = \sqrt{1-y^2}$ , определяющего границы изменения переменной  $x$ . Из вида ядра  $K(x-x')$  ясно, что ФЗ определяется только значениями  $P(x-\omega_3, a)$ , и  $P(x+\omega_3, a)$ . Поэтому разделим круглый зрачок на области  $\Sigma_n^N$  с заданным значением  $N = [2a/\omega_3]$ , где  $[2a/\omega_3]$  – целая часть от  $2a/\omega_3$ , ( $a = \sqrt{1-y^2}$ ),  $n = 1, \dots, N+1$ . Такое разделение выполняется с помощью окружностей единичного радиуса, смещенных друг относительно друга вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $\omega_3$ . Величина  $N$  может меняться при изменении  $y$ :  $N = 0, 1, \dots, M = [2/\omega_3]$ , где  $[2/\omega_3]$  – целая часть от  $2/\omega_3$ . Характер решения уравнения (8) определяется величиной параметра  $\lambda$  или однозначным связанным с ним параметром  $\alpha$ :  $2\lambda \cos \alpha = 1$ .

Оптимальная функция зрачка в каждой области  $\Sigma_n^N$  в зависимости от значений параметра  $\alpha$  имеет вид

$$A_n^N = \begin{cases} \frac{\sin(n\alpha)}{\sin\left[\frac{\pi+\alpha}{2\alpha}\right]}, & n \leq \left[\frac{\pi+\alpha}{2\alpha}\right] \\ 1, & n \geq \left[\frac{\pi+\alpha}{2\alpha}\right] \end{cases}, \quad \frac{\pi}{N+2} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad (10)$$

$$A_n^N = q \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N+2}\right)}{\sin\left(\frac{\left[\frac{N}{2}+1\right]\pi}{N+2}\right)}, \quad q \leq 1, \quad \alpha + \frac{\pi}{N+2}; \quad (11)$$

$$A_n^N = 0, \quad \alpha < \frac{\pi}{N+2}. \quad (12)$$

При минимально возможном значении параметра  $\alpha = \pi / (M+2)$  просветлены (частично или полностью) только области  $\Sigma_n^M$ . При этом значение  $E$  столь мало, что условие пассивности (7) выполняется автоматически. При увеличении параметра  $\alpha$  начинают просветляться области со все меньшими значениями  $N$  в соответствии с формулами (10) –

(12), и величина  $E$  растет, а контраст  $R(\omega_3)$  уменьшается. При  $E = \pi$  приходим к неаподизированному зрачку:  $P(x, y) = 1$ .

Заметим, что наибольшее значение частотного отклика  $R'$  достигается при

$$E \leq S_M (M+2) / 2 \sin^2 \{[(M+2)/2]\pi / (M+2)\},$$

когда условие (7) выполняется автоматически, и равно  $R' = \cos \pi / (M+2)$ . С увеличением  $E$  частотный отклик уменьшается и при  $E = \pi$  (неаподизированный зрачок :  $P(x, y) = 1$ ) равен  $R'' = S_1 / \pi$ , где

$S_N = 2\{\arccos(N\omega/2) - (N\omega/2)\sqrt{1-(N\omega/2)^2}\}$  – площадь области перекрытия двух круговых областей единичного радиуса, смещенных на расстояние  $N\omega$ . Расчет показывает, что эффективность аподизации больше для высоких пространственных частот. Так, максимальное увеличение частотного отклика относительно неаподизированной системы составляет при  $\omega_3/\omega_{\max} = 0,6; 0,9; 1,6$  соответственно 30, 58% и 3,8 раза ( $\omega_{\max}$  – максимальная пространственная частота, пропускаемая оптической системой).

С другой стороны, в области высоких пространственных частот  $0,5 < \omega/\omega_{\max} < 1$  аподизирующие ФЗ имеют простой вид. Зрачок в этом случае разделяется на три области  $\Sigma_1^1, \Sigma_2^1$  и  $\Sigma_2^0$ . При  $E \leq 2S_1$  просветлены (частично или полностью) области  $\Sigma_1^1$  и  $\Sigma_2^1$ , а область  $\Sigma_1^0$  полностью затенена. Частотный отклик равен  $R = 0,5$ . При увеличении  $E$  начинает просветляться область  $\Sigma_1^0$ , и частотный отклик уменьшается ( $R = S_1 / E$ ), достигая для полностью просветленного зрачка значения  $R'' = S_1 / \pi$ .

Для иллюстрации на рис. 1, а, б, в представлен оптимальный частотный отклик круглого зрачка  $R(\omega)$  для  $\omega_3/\omega_{\max} = 0,5; 0,7; 0,9$  и соответствующие области просветления и затенения круглого зрачка. На рис. 1 представлены оптимальные ЧКХ круглого зрачка  $R(\omega)$  и соответствующие просветленные ( $S_1, S_2$ ) и затененная ( $S_3$ ) области зрачка для  $\omega_3/\omega_{\max} = 0,5; 0,7; 0,9$  соответственно рисунки а, б, в; пунктирной линией показана ЧКХ неаподизированного зрачка.

## Выводы

Полученные в работе оптимальные функции зрачка позволяют эффективно управлять ЧКХ оптической системы на фиксированной частоте. Знание зависимости частотного отклика от прошедшего через зрачок светового потока дает возможность выбрать приемлемый компромисс между желанием получить максимальный частотный отклик и нежеланием слишком затенять зрачок. Отметим, что рассмотренные функции зрачка могут быть использованы для повышения разрешения объектов, обладающих периодичностью в данном направлении.

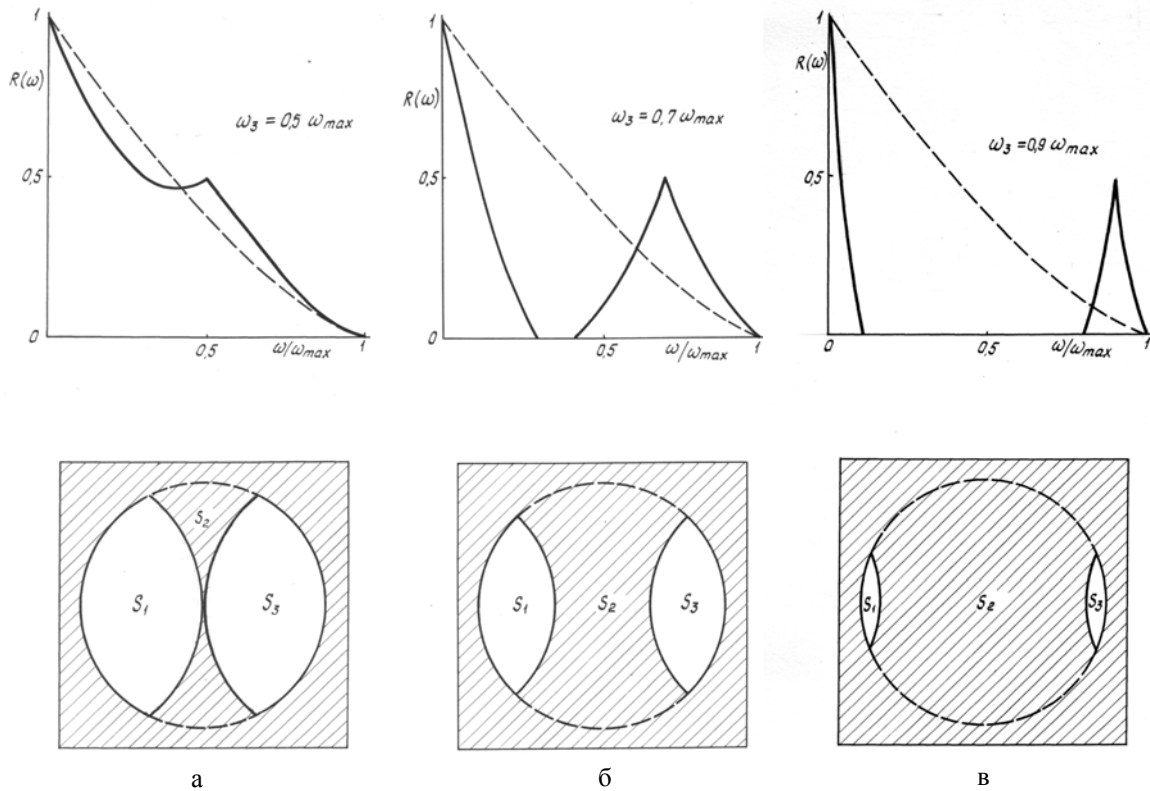


Рис. 1. Оптимальные ЧКХ круглого зрачка  $R(\omega)$  и соответствующие просветленные ( $S_1, S_2$ ) и затененная ( $S_3$ ) области зрачка для  $\omega_3/\omega_{max} = 0,5; 0,7; 0,9$  соответственно рисунки а, б, в; пунктирной линией показана ЧКХ неаподизированного зрачка

### Список литературы

1. Jacquinot P, Roizen – Dossier, B. Apodization / In Progress in Optics, III, ed. by Wolf, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964. – P. 31-186.
2. Mac Donald J.A. Apodization and Frequency Response with Incoherent Light // Proceedings of the Physical Society. – 1958. – V. B72, № 467. – P. 749-754.
3. Смоктий О.И., Фабриков В.А. Методы теории систем и преобразований в оптике. – Л.: Наука, 1989. – 311 с.

4. Минц М.Я., Прилепский Е.Д. Оптимизация частотного отклика оптической сканирующей системы // Оптика и спектроскопия. – 1983. – Вып. 4, т. 54. – С. 718-724.

Поступила в редколлегию 2.03.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.И. Стрелков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.