УДК 681.518 : 004 : 912

А.Л. Єрохін

Харківський національний університет внутрішніх справ

ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ПРОЦЕСІВ В СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ

Стаття присвячена вирішенню задачі побудови моделі дослідження багатовимірних процесів в складних системах з канальною структурою на основі генерації детермінованого хаотичного процесу. Основою моделі є комбінаторно-топологічне перетворення інформації в складній системі у вигляді теоретико-множинної структури дискретних елементів, над якою виконуються послідовні перетворення вихідної інформації в прообраз на вході, перестановка фрагментів та формування інформаційного образу на виході.

складні системи, багатовимірні процеси, детермінований хаотичний процес

Вступ

Постановка задачі. Дослідження комбінаторно-топологічного перетворення інформації [1], показали можливість їхнього використання в психології [2], в інформаційній безпеці [3] і в системному аналізі [4]. На основі вказаного перетворення можливо моделювати спотворення та перекручення інформації в складних системах. В статті розглядається клас складних систем, в яких можна виділити мережеву (або канальну) структуру. Актуальною задачею є створення моделі, які придатна для досліджень багатовимірних процесів в складних системах з канальною структурою з можливістю генерації детермінованого хаотичного процесу. **Мета статті** – розробка об'єднаної моделі поведінки складної системи з канальною структурою з врахуванням багатовимірних процесів, які протікають в системі.

1. Дослідження властивостей об'єднаного системного каналу

Модель генерації детермінованого хаотичного процесу на основі комбінаторно-топологічного перетворення [5, 6] є симетричною групою перетворень підстановок [7]. Фізична модель [5] може бути виконана з набору світлопровідних елементів, так званих каналів (w_i), які утворюють системний канал W. Практичні результати таких досліджень можуть бути використані для вирішення задачі відновлення спотворених прообразів двовимірної інформації. Системний канал W фізичної моделі має ряд властивостей, які для моделі приймемо як аксіоми:

– $(a_i)\in(A)$ і $(b_i)\in(B)$ підмножини входу і виходу у W є дискретними й обмеженими $(A),(B)\subset(W)$ і $(A)\cap(B)=0$;

– $(a_i)\in(A)$ і $(b_i)\in(B)$ сполучені одне одному для каналу (w_{ij}), тобто відображення $(a_i)\leftrightarrow(b_i)$ є ізоморфним і тотожним $(a_i)\equiv(b_i)$;

– $(w_i)\in(W)$, $(a_i)\in(A)$ і $(b_i)\in(B)$ мають властивість інформаційної незалежності $(w_i)\cap(w_j)=0$, $(a_i)\cap(a_j)=0$ і $(b_i)\cap(b_j)=0$;

– $(w_i)\in(W)$, $(a_i)\in(A)$, $(b_i)\in(B)$ фіксовані на двовимірному метричному просторі.

Підмножини

$$(W)=\bigcup_{f\in M^2}(w_f);\ (A)=\bigcup_{f\in M^2}(a_f);\ (B)=\bigcup_{f\in M^2}(b_f) \quad (1)$$

задовольняють аксіомам загальної топології й аксіомам операцій замикання мають властивості замкнутості, віддільності, рахунковою базою, утворюють топологічний простір (Ω,ω) [8] з дискретним носієм ω топології. Будь-які його два елементи в (1) мають неперетинні околиці, тому $(W),(A),(B)\subset(\Omega,\omega)$ відносять до хаусдорфових [8] топологічних просторів.

Представимо підмножини $(a_{ij})\in[A]$ та $(b_{k\ell})\in[B]$ в матричній формі

$$[A]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}; \quad (2) \qquad [B]=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{s}b_{kl}. \quad (3)$$

Введемо двовимірну безперервну функцію (інформацію) $\Phi(x,y)$, яку відобразимо на $[A]$ й $[B]$ у вигляді впорядкованих підмножин

$$F(x,y)\cong\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\otimes f_{ij})\subset[A]; \quad (4)$$

$$F'(x,y)\cong\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{s}(b_{kl}\otimes f_{kl})\subset[B], \quad (5)$$

де $(a_{ij}\otimes f_{ij})$, $(b_{kl}\otimes f_{kl})$ – дискретні фрагменти функції $\Phi(x,y)$, відображені на константах (a_{ij}) і $(b_{k\ell})$. Представимо підмножини $[A]$, $[B]$ у вигляді системи вхід-вихід

$$S \subset A \times B, \tag{6}$$

де підмножина $A = \times\{V_i : i \in I_A\}$ – вхідний об'єкт; підмножина $B = \times\{V_i : i \in I_B\}$ – вихідний об'єкт системи S, задані декартовим добутком.

Кожній парі чисел $(i, j)_A$ входу відповідає пари $(k, l)_B$ на виході у системах локальних координат A і B відповідно

$$A \times B = \left(a_{ij} \times b_{kl}; \forall\, i, j \in I_A, \forall kl \in I_B\right). \tag{7}$$

2. Використання комбінаторно-топологічного перетворення інформації для моделювання спотворень в складній системі

На основі [3 – 6] введемо три оператори послідовних перетворень $\Phi(x, y)$ в системах (4), (5) та (6)

$$K_1 : \ \Phi(x, y) \to \bigcup_{k,l \in M^2} f_{kl}(x, y) = F(x, y);$$

$$K_2 : \bigcup_{i,j \in M^2} f_{ij}(x, y) \to \bigcup_{k,l \in M^2} f'_{kl}(x, y); \tag{8}$$

$$K_3 : \bigcup_{k,l \in M^2} f'_{kl}(x, y) \to \ F'(x, y),$$

де K_1 – оператор дефрагментації $\Phi(x, y)$ у прообраз; K_2 – оператор перестановок; K_3 – оператор об'єднання фрагментів прообразу у образ.

Структура прообразів (5)

$$F(x, y) \supset f_{kl}(x, y) \in (A) \subset (W)$$

є інваріантною. Відповідно до (4) можна представити у вигляді системи скінчених предикатів за рядками локальної системи координат входу

$$F(x, y) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(a_{i1}^{\,f_{i1}} \vee a_{i2}^{\,f_{i2}} \vee \ldots \vee a_{in}^{\,f_{in}}\right). \tag{9}$$

Розглянемо предикат впізнавання регулярності $P(f_{ij}) = \left(a_{ij}^{\,f_{ij}}\right)$ змінної (f_{ij}), на константі (a_{ij}) і за умови збігу їхніх координат $(i, j)_A = (i, j)_F$

$$P(f_{ij}) = \left(a_{ij}^{\,f_{ij}}\right) = 1, \ \forall (f_{ij}) \in F(x, y) \subset M^2. \tag{10}$$

При розбіжності координат $(i, j)_A \neq (i, j)_F$ предикат

$$P(f_{kl}) = \left(a_{ij}^{\,f_{kl}}\right) = 0, \ \forall (f_{kl}) \in F(x, y) \subset M^2. \tag{11}$$

Область існування (9) визначимо за допомогою квантора існування

$$\exists f_{ij} P(f_{ij}) = \underset{(f_{ij}) \in M^2}{\vee *} P(f_{ij}). \tag{12}$$

Для усіх $(a_{ij}) \in [A]$ завжди виконується умова (8), тому квантор існування (12) збігається з усім метричним простором

$$\exists f_{ij} P(f_{ij}) = \left[\underset{(f_{ij}) \in M^2}{\vee *} P(f_{ij}) = 1\right]. \tag{13}$$

Аналогічно і для $(b_{kl}) \in (B)$. Тобто підмножини фіксованих елементів $(a_{ij}) \in [A]$ і $(b_{kl}) \in (B)$ мають структурну інваріантість. Розглянемо перетворення K_2 підстановок (8) за допомогою предикатів регулярності $P(b_{kl}) = \left(a_{ij}^{\,b_{kl}}\right)$ або $P(a_{kl}) = \left(b_{ij}^{\,a_{kl}}\right)$

$$K_2 : \ (A) \to (B) = \\ = \bigcup_{i=1}^{m} \left(a_{i1}^{\,b_{i1}} \vee a_{i2}^{\,b_{i2}} \vee \ldots \vee a_{in}^{\,b_{in}}\right). \tag{14}$$

Спряженість елементів визначає зворотний оператор K_2^{-1} такий, що $K_2^{-1} \times K_2 = 1$

$$K_2^{-1} : \ (B) \to (A) = \\ = \bigcup_{i=1}^{m} \left(b_{i1}^{\,a_{i1}} \vee b_{i2}^{\,a_{i2}} \vee \ldots \vee b_{in}^{\,a_{in}}\right). \tag{15}$$

Вирази (14) та (15) еквівалентні за відношенням

$$(a_{ij}) \leftrightarrow (b_{ij}) \ \Rightarrow \ a_{ij}^{\,f_{ij}} \leftrightarrow b_{ij}^{\,f_{ij}}. \tag{16}$$

Аналогічно (9) представимо сформований образ $F'(x, y)$ на (B) системою предикатів у припущенні адекватності його вихідної функції

$$\Phi(x, y) \approx F'(x, y) = \\ = \bigcup_{i=1}^{m} \left(b_{i1}^{\,f'_{i1}} \vee b_{i2}^{\,f'_{i2}} \vee \ldots \vee b_{in}^{\,f'_{in}}\right). \tag{17}$$

Використовуємо предикат регулярності

$$P(a_{ij}) = \left(b_{kl}^{\,a_{ij}}\right). \tag{18}$$

При $(i, j) = (k, l)$

$$P(a_{ij}) = \left(b_{ij}^{\,a_{ij}}\right) = 1. \tag{19}$$

При $(i, j) \neq (k, l)$

$$P(a_{ij}) = \left(b_{kl}^{\,a_{ij}}\right) = 0. \tag{20}$$

Складемо матрицю з предикатних змінних

$$[P(B)] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(b_{ij}), \tag{21}$$

де $P(b_{ij}) \approx (a_{ij}) \to (b_{kl})$ визначає відношення (перестановку) між елементами входу і виходу.

Внаслідок спряженості між відповідними елементами входу та виходу маємо дві структурно тотожні (з точністю до ізоморфізму) системи

$$\bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n} a_{ij}^{\,f_{ij}}\right) \equiv \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n} b_{ij}^{\,f_{ij}}\right). \tag{22}$$

Якщо виконується умова (19) або (20), то квантори існування. відповідно для (21)

$$\exists b_{ij} P(b_{ij}) = \bigvee_{(b_{ij}) \in M^2} \left[P(b_{ijl}) \equiv 1 \right];$$

$$\exists b_{kl} P(b_{kl}) = \bigvee_{(b_{kl}) \in M^2} \left[P(b_{kl}) \equiv 0 \right] \quad (23)$$

і відповідні матриці (21) будуть складені тільки з нулів або одиниць.

Розглянемо варіант, у якому предикати (18) будуть набувати значень

$$P(b_{ij}) = 1, \forall b_{ij} = a_{ij}; \quad P(b_{kl}) = 0, \forall b_{kl} \neq a_{kl}. \quad (24)$$

Тоді область існування системи предикатів (22) буде визначена як

$$\exists b_{ij} P(b_{ij}) = \bigvee_{(b_{ij}) \in M^2} P(b_{ij}) = \bigvee_{(b_{ij}, b_{kl}) \in M^2} \begin{bmatrix} P(b_{ij}) = 1 \\ P(b_{kl}) = 0 \end{bmatrix}. (25)$$

і матриця (21) буде множиною з одиниць та нулів яку представимо у вигляді об'єднання двох підмножин (інваріантних структур)

$$\Omega = \Omega_0 \bigcup \Omega_1, \quad (26)$$

де Ω_0 складено з нульових значень предикатів, а Ω_1 – з одиничних

$$\Omega_0 = \left[\bigcup_{(b_{kl}) \in M^2} P(b_{kl}) = 0 \right]; \quad (27)$$

$$\Omega_1 = \left[\bigcup_{(b_{ij}) \in M^2} P(b_{ij}) = 1 \right]. \quad (28)$$

При цьому вказані структури відносяться як до підмножини $(b_{kl}) \in (B)$, так і до підмножини $(f_{kl}) \in F'(x,y) \subseteq (B)$ внаслідок їхньої топологічної подібності в логічному просторі області існування предикатних змінних [6]. Перетворимо (4) та (5) поелементно за допомогою операторів перестановок

$$K_2: \ (a_{ij} \otimes f_{ij}) \to (b_{kl} \otimes f'_{kl}), \quad (29)$$

виключимо з (29) фіксовані константи й одержимо

$$K_2: \ (f_{ij}) \to (f'_{kl}). \quad (30)$$

Перепишемо (27) та (28) у вигляді двох нових підмножин

$$\Omega_1^* = \bigcup_{(i,j) \in M^2} f'_{ij}; \ (31) \quad \Omega_0^* = \bigcup_{(k,l) \in M^2} f'_{kl}. \ (32)$$

У такій інтерпретації образ $F'(x,y)$ розглядається як об'єднання підмножини незмінених фрагментів f'_{ij}, заданих в області (31), і підмножини фрагментів f'_{kl}, розподілених в області (31) випадково

$$F'(x,y) \equiv \Omega_0^* \bigcup \Omega_1^*. \quad (33)$$

Множина Ω_1^* визначає топологічну область існування неспотворених фрагментів $(f_{ij}) \equiv f'(_{ij})$ $\forall (b_{ij}) \in \Omega_1$. Множина Ω_0^* – область, у якій $(f_{ij}) \neq (f'_{kl})$ $\forall (b_{kl}) \in \Omega_0$, усередині неї кожен з фрагментів (f_{kl}) випадковим чином може зайняти будь-яке положення, при цьому структурно спотворивши прообраз $F(x,y)$. Потужність підмножини Ω_0^* визначає кількість можливих спотворень у системному каналі W. Таким чином, інваріантні структури Ω_0, Ω_1 і Ω_0^*, Ω_1^* тотожні і топологічно еквівалентні одне одному.

3. Моделювання детермінованих хаотичних процесів в складній системі

Під час моделювання процесів в системі за допомогою комбінаторно-топологічних перетворень процеси спотворень інформації розгортаються на двовимірній фазовій площині, що збігається з виходом системного каналу W. Одна з фундаментальних властивостей детермінованого хаотичного процесу – структурна нестійкість атрактора динамічної системи [9]. Розглянуті вище області є інваріантними структурами, при цьому перетини замикань порожні

$$\Omega_0 \bigcap \Omega_1 = 0 \ \text{та} \ \Omega_0^* \bigcap \Omega_1^* = 0.$$

Це може бути підставою вважати зазначені підмножини (31) та (32) структурами атракторів модельного детермінованого хаотичного процесу. Для об'єднання (33) найбільш істотним є поява стохастичної компоненти в областях (27) або (32). Оскільки для кожного системного каналу W області (32) та (33) є інваріантами, то саме підмножину Ω_0 будемо вважати структурою-атрактором, у якій розгортаються в часі хаотичні компоненти детермінованого хаотичного процесу. Просторово-динамічна структура будь-якого атрактора характеризується кількісною характеристикою (розмірністю). Для топологічного простору з дискретним носієм топології розмірністю атрактора справедлива фрактальна розмірність Хаусдорфа [9] яка обумовлена залежністю

$$D_0 = -\lim \ln N(C) / \ln C, \quad (34)$$

де C – довжина сторони квадрата, на які розбивається фазова площина; N(C) – кількість осередків, через які проходить фазова траєкторія.

У нашому випадку фазова площина $[B]$, утворена дискретними носіями топології, тому елементами її покриття є елементи (b_{kl}), вписані в квадрат. Фазова площина й атрактор можуть збігатися. Траєкторія розгортання хаотичного процесу на фазовій площині може бути встановлена тільки за результатами вибірки статистик, детермінується замиканням фазової поверхні, а визначається топологією перетворень фазової поверхні $[B]$. Наприклад, введемо в системний канал $(W)_q$ послідовність безперервних топологічних перетворень над безлічами Ω_0^*, Ω_1^* у вигляді вкладених спіралей. Технологічно це досягається деформаціями стиску, крутіння і вигину елементів $\left(w_{ij}\right)_q \in \left(W\right)_q$. У цьому прикладі траєкторії процесу будуть визначатися топологічно подібними структурно стійкими спіральними атракторами з урахуванням кількісних характеристик сформованого в Ω_0 хаотичного процесу. Потужність інваріантної структури атракторів відповідно до (34) буде дорівнює кількості елементів $\left(b_{st}\right)_q \in \Omega_0 \subset \left[B\right]_q \subseteq \left(W\right)_q$. Отримані дані можуть бути використані при аналізі більш складних процесів, які моделюються за допомогою двох і більше системних каналів $\left(W\right)_q$

$$\langle W^* \rangle = \bigcup_{q=1}^{r} \left[W\right]_q. \qquad (35)$$

Фазова поверхня такої системи генерації детермінованого хаотичного процесу утворена множиною

$$\langle B \rangle = \bigcup_{q=1}^{g} \left[B_q\right], \qquad (36)$$

де $\left[B\right]_q$ – фазова площина кожного з системних каналів.

Його множина входу співорганізована у вигляді прямокутника з q штук прямокутних матриць $\left[A\right]_r$

$$\langle A \rangle = \bigcup_{r=1}^{q} \left[A\right]_r . \qquad (37)$$

Множини (36) та (37) сполучені одна одній, а. слабка структурованість каналів $\left(W\right)_q \in \langle W^* \rangle$ визначає можливість безперервних топологічних перетворень множин $\left(b_{kl}\right)_s \in \left[B\right]_s \cup \left[\overline{B}\right]$ у межах замикання $\left[\overline{B}\right]$ (за рахунок деформації їхньої структури). У результаті перетворень сформуємо, а потім зафіксуємо компактне об'єднання топологічно подібних фігур

$$\langle B \rangle = \bigcup_{e=1}^{q} \left[B\right]_e \bigcup \left[\overline{B}\right] = \\ = \bigcup_{e=1}^{q} \left\{ \left[\Omega_0 \bigcup \overline{\Omega_0}\right]_e \bigcup \left[\Omega_1 \bigcup \overline{\Omega_1}\ \right] \right\}. \qquad (38)$$

Тоді ми будемо мати, як мінімум, систему з q стійких структур-атракторів детермінованого хаотичного процесу, які обмежені замиканнями множин $\overline{\Omega_0}, \overline{\Omega_1}$. Для реалізації процесу розгортання детермінованого хаотичного процесу на фазовій поверхні (38) досить надати функції $\Phi\left(x, y\right)$ будь-якої лінійної зміни положення $\left(x, y\right)$ щодо локальної системи координат входу відносно значення радіусу носія $\left(a_{ij}\right)$ в $\left[A\right]$.

Висновки

Таким чином, за допомогою комбінаторно-топологічних перетворень можливо створити модель генерації детермінованих хаотичних процесів.

Математична модель комбінаторно-топологічного перетворення інформації є теоретико-множинною структурою дискретних елементів, які утворюють топологічний хаусдорфовий простір, над яким виконуються послідовні перетворення: дефрагментації вихідної інформації в прообраз на вході системи, перестановку фрагментів та формування інформаційного образу на виході.

При перетворенні перестановок дискретні елементи утворюють інваріантні, топологічно подібні непересічні структури двох типів, у першому з яких фрагменти інформації формують частину несповтореного образу, а у другому - просторово перекрученими фрагментами. Зазначені структури є стійкими атракторами фазової площини траєкторій детермінованого хаотичного процесу, при цьому фазовою поверхнею є множина елементів виходу системного каналу, а розмірність атрактора визначається потужністю множини, у якій фрагменти інформації просторово перекручені.

Список літератури

1. Ерохин А.Л., Бурцев Вал.Н., Бурцев Влад.Н. Исследование стохастических процессов комбинаторно-топологического кодирования информации. Сообщ. 1 // Радиоэлектроника и информатика. – 2000. – № 4 (13). – С. 44-48.

2. Бондаренко М.Ф., Бурцев В.Н. Бурцев Вл.Н., Ерохин А.Л. Моделирование стохастических процессов и их применение в практической психологии // Вестник ХГПУ. – 2000. – Вып. 99. – С. 7-10.

3. Бурцев В.Н., Бурцев Вл.Н., Ерохин А.Л. Генерирование последовательностей псевдослучайных чисел методом комбинаторных перестановок двумерной информации // Сб. докладов 3-й Межд. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применение". – М. – 2000. – Т. 3. – С. 153-157.

4. Бурцев Вал.Н., Бурцев Влад.Н., Ерохин А.Л. Анализ связей сложно-организованных систем с гомеостатическим и гетеростатическим управлением // Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ». – 2001. – № 4. – С. 20-23.

5. Бурцев В.Н., Гнусов Ю.В., Ерохин А.Л. Формализация модели оптического волоконного системного канала // Проблемы бионики. – 2002. – Вып. 56. – С. 34-38.

6. Бурцев В.Н., Бурцев Вл. Н., Ерохин А.Л. Способ моделирования стохастических процессов с помощью топологических преобразований // Проблемы бионики. – 2000. – Вып. 51. – С. 150-157.

7. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1963. – 287 с.

8. Келли Дж. Л. Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 383 с.

9. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир. 1988. – 234 с.

Надійшла до редколегії 23.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, доцент І.П. Захаров, Харківський національний університет внутрішніх справ, Харків.