

УДК 680.3

Е.Г. Толстолужская

*Харьковский университет Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба, Харьков*

## **РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА**

*Рассматриваются зависимости показателей эффективности параллельного решения системы линейных уравнений методом Гаусса от количества процессоров многопроцессорной ЭВМ с симметричной мультипроцессорной обработкой (SMP): времени параллельного решения, загрузки процессоров и эффективности параллельной реализации задачи с использованием метода совмещения независимых операций.*

*многопроцессорные ЭВМ, показатели эффективности параллельной реализации алгоритмов*

### **Введение**

**Актуальность исследования.** Математический аппарат систем линейных уравнений широко используется для формализации решения прикладных

задач в различных областях науки и техники [1 – 4]. В ряде случаев, например, в системах автоматизированного управления, ко времени решения систем линейных уравнений предъявляются «жесткие» требования. Одним из путей выполнения таких требований

является использование многопроцессорных ЭВМ, обеспечивающих параллельное решение задач на основе метода совмещения независимых операций [2 – 6]. Весьма важной практической задачей (в рамках этой проблемы) является определение рациональной конфигурации многопроцессорной ЭВМ, которая обеспечивает выполнение заданных требований и ограничений при решении систем линейных уравнений [4].

**Цель статьи.** Рассмотрение результатов исследования зависимостей показателей эффективности распараллеливания от количества процессоров многопроцессорных ЭВМ класса SMP, позволяющих определять рациональную конфигурацию SMP ЭВМ при решении системы линейных уравнений методом Гаусса и при заданных временных требованиях.

**Анализ литературы.** Методы синтеза параллельных алгоритмов рассматриваются в ряде работ [4 – 8]. В целом известные работы предлагают различные решения задачи формализации синтеза параллельных алгоритмов. В то же время, пока не нашли должного отражения в известной литературе практически важные результаты исследования зависимости показателей эффективности распараллеливания систем линейных уравнений от конфигурации многопроцессорных ЭВМ (в первую очередь от количества процессоров), позволяющие определять рациональное количество процессоров ЭВМ класса SMP для конкретных требований к временным характеристикам решения различных систем линейных уравнений.

**Постановка задачи исследования.** Наличие большого числа факторов, оказывающих влияние на процесс параллельной реализации алгоритмов, не позволяет оценивать эффективность их выполнения с помощью одного показателя, поэтому на практике применяется, как правило, совокупность частных показателей. В качестве таких показателей обычно используются производительность вычислительных средств при реализации алгоритмов, достоверность реализации алгоритмов, точность результатов, время выполнения алгоритмов, цена эффективного быстрого действия, стоимость однократной реализации алгоритма, коэффициент загрузки аппаратуры [3 – 5]. В качестве одного из показателей, характеризующих эффективность реализации параллельных алгоритмов, принято среднее время реализации множества  $P$  операторов произвольного алгоритма определяемое выражением

$$T(P) = \sum_{\xi=1}^W p_{\xi} T_{\xi}, \quad (1)$$

где  $W$  – число ветвей в алгоритме;  $p_{\xi}$  – вероятность реализации  $\xi$ -й ветви;  $T_{\xi}$  – время реализации  $\xi$ -й ветви параллельного алгоритма, определяемое как

$$T_{\xi} = \max_{P_j \in P(\xi)} (t_j^H + t_j), \quad (2)$$

где  $P(\xi)$  – множество операторов  $\xi$ -й ветви,  $t_j^H$  и

$t_j$  – момент начала и относительная временная глубина оператора  $P_j \in P(\xi)$ .

Снижение временных затрат на выполнение алгоритмов за счет перехода к их параллельной реализации обеспечивается показателем  $DT$ :

$$DT = \frac{T_{\text{пос}}(P)}{T_{\text{пар}}(P)} \quad (\text{раз}). \quad (3)$$

В соотношении (3)  $T_{\text{пос}}(P)$  и  $T_{\text{пар}}(P)$  – среднее время соответственно последовательной и параллельной реализации алгоритма (или максимальные значения времени последовательной и параллельной реализации алгоритма).

Показателями, характеризующими экономическую сторону применения цифровых вычислительных средств реализации алгоритмов, являются показатель использования (загрузки) процессоров при реализации параллельных алгоритмов, а также сложность/стоимость параллельной ЭВМ.

Для получения расчетных соотношений для этих показателей введем следующие обозначения:  $\nu$  – количество различных типов компонентов / процессоров в составе параллельной ЭВМ, используемых при параллельной реализации алгоритма;  $\Theta = \{\Theta_{\eta}\}$  – множество различных типов  $\Theta_{\eta}$  компонентов/процессоров, которые входят в состав параллельной ЭВМ;  $N = \{n_{\eta}\} (\eta = 1, \nu)$  – множество количеств компонентов/процессоров типа  $\Theta_{\eta}$ ;  $K = \{K_{\eta\xi\delta}\}$  – множество количеств  $K_{\eta\xi\delta}$  операторов  $P_j \in P$ , которые выполняются компонентом/процессором типа  $\Theta_{\eta}$ , имеющим номер  $\delta$ , в процессе реализации  $\xi$ -й ветви алгоритма;  $T^0 = \{t_{\eta}^0\} (\eta = 1, \nu)$  – множество значений времени выполнения операторов различных типов  $\Theta_{\eta} \in \Theta$  компонентами/процессорами соответствующих типов.

Среднее значение показателя загрузки компонентов/процессоров каждого типа  $\Theta_{\eta} \in \Theta$  можно рассчитать в соответствии с выражением (4):

$$S(P_{\eta}) = \frac{\sum_{\xi=1}^W (t_{\eta}^0 \cdot K_{\eta\xi} \cdot p_{\xi})}{n_{\eta} \cdot T}, \quad (4)$$

где  $P_{\eta} \subseteq P$  – подмножество операторов  $P_j \in P$ ,

имеющих тип  $\Theta_{\eta}$ ,  $K_{\eta\xi} = \sum_{\delta=1}^{n_{\eta}} K_{\eta\xi\delta}$ .

Тогда среднее значение полного показателя загрузки всех компонентов/процессоров, входящих в состав параллельной ЭВМ устройства, можно определить следующим соотношением

$$S(P) = \sum_{\eta=1}^{\nu} S(P_{\eta}) = \frac{1}{T} \sum_{\eta=1}^{\nu} \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{\xi=1}^W (t_{\eta}^0 \cdot K_{\eta\xi} \cdot p_{\xi}). \quad (5)$$

Отметим, что соотношение для  $S(P)$  существенно упрощается при использовании в архитектуре параллельной ЭВМ процессоров одного типа.

Важное прикладное значение имеет задача определения числа компонентов/процессоров (и, в конечном счете, сложности/стоимости параллельной ЭВМ), использование которых при параллельной реализации алгоритма обеспечивает достаточно большое снижение временных затрат за счет параллельного выполнения алгоритма, с одной стороны, и возможно более высокое значение коэффициента использования оборудования, с другой. В таких случаях можно в качестве производного показателя брать эффективность распараллеливания

$$R(P) = \frac{DT(NM)}{DT_{max}(NM)} \cdot \frac{S(NM)}{S_{max}(NM)} \quad (6)$$

Задача исследований формулируется следующим образом: для алгоритма Гаусса решения системы  $n$  линейных уравнений получить зависимости максимально возможных значений показателей эффективности  $T, DT, S(P), R(P)$  от количества  $NM$  процессоров, достигаемые при замене исходного циклического алгоритма Гаусса эквивалентным ациклическим алгоритмом.

### Результаты исследований

Результаты исследования возможностей распараллеливания алгоритма решения системы линейных уравнений методом Гаусса без выбора ведущего элемента представлены на рис. 1 – 4. Математическая модель алгоритма Гаусса имеет следующий вид [3]. Дана система  $n$  линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1\ n+1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{2\ n+1}; \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= a_{n\ n+1}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений по компактной схеме [3] заключается в последовательном определении  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$  из системы уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= c_{1\ n+1}; \\ x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= c_{2\ n+1}; \\ \dots & \\ x_n &= c_{n\ n+1}. \end{aligned}$$

Эта система получается как результат разложения исходной матрицы на треугольные матрицы в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot c_{kj}, \quad 1 \leq j, j \leq n, i \geq j; \\ c_{ij} &= \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \cdot c_{kj} \right) / b_{ii}, \quad 1 \leq j \leq n, 1 < j \leq n+1, i < j. \end{aligned}$$

В результате вычислений получается матрица

$$\begin{aligned} &b_{11}c_{12}c_{13} \dots c_{1n}c_{1\ n+1} \\ &b_{21}b_{22}c_{23} \dots c_{2n}c_{2\ n+1} \\ &\dots \\ &b_{n1}b_{n2}b_{n3} \dots b_{nn}c_{n\ n+1}. \end{aligned}$$

Собственно вычисление значений  $x_i, i=n, n-1, \dots, 1$  выполняется по формуле:

$$x_i = c_{i\ n+1} - \sum_{k=1}^{n-i} c_{i, n-k+1} \cdot x_{n-k+1}.$$

Значение параметра  $n$  было принято равным  $n=11$ , при решении задачи использовался один метод параллелизма – метод совмещения независимых операций, диапазон изменения ширины параллельного процесса  $NM$  (максимального количества одновременно выполняемых операций алгоритма задачи) был принят  $NM = 1 \dots 29$ .

### Выводы

1. Представленные в статье зависимости для ациклического алгоритма Гаусса, реализуемого при распараллеливании циклов с совмещением независимых операций тел всех циклов показывают широкие возможности обеспечения требуемых и максимально возможных (предельных) значений времени реализации задачи на основе применения:

- полного дублирования тел всех циклических участков алгоритма решения системы линейных уравнений;
- максимально возможного совмещения независимых операций каждой копии тела каждого из циклических участков алгоритма.

Практическая значимость полученных результатов для различных приложений заключается в обеспечении возможности решения задачи определения рационального состава процессоров параллельных SMP ЭВМ, используемых в различных приложениях для решения систем линейных уравнений при задании временных требований.

Таблица 1

Длительность  $t^o$ (тип) выполнения операций различных типов (тип) параллельных моделей алгоритма Гаусса решения систем линейных уравнений (такты)

Тип	=	==	upl	%	*	/	bp	l.o, a.o	stop
$t^o$ (такт)	2,00	1,00	1,00	35,00	10,00	35,00	1,00	1,00	1,00

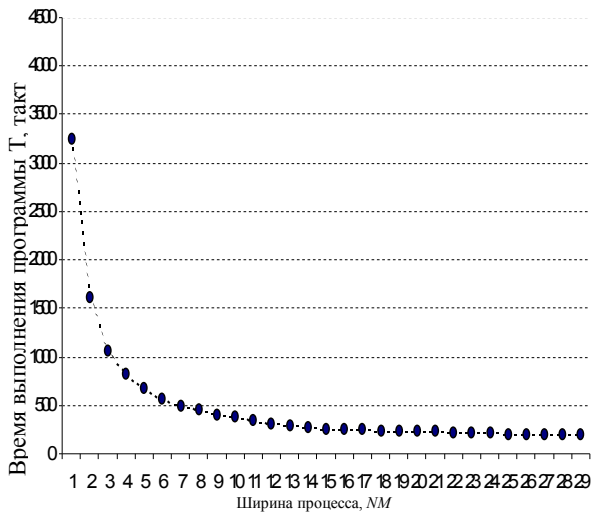


Рис. 1. Оценки времени  $T$  решения системы линейных уравнений методом Гаусса ( $n = 11$ )

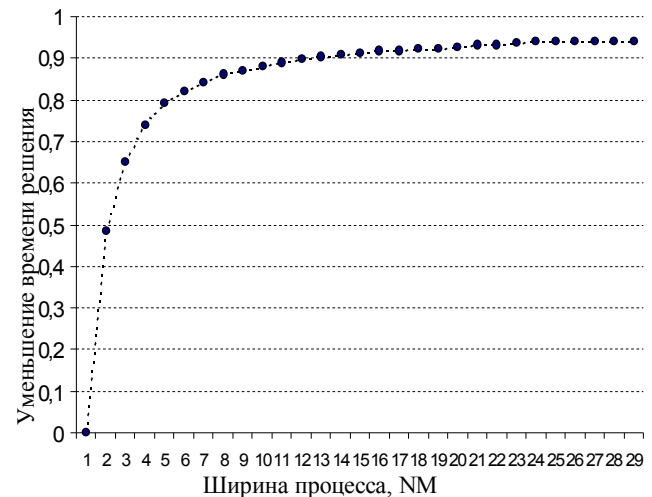


Рис. 2. Оценки уменьшения  $DT$  времени решения системы линейных уравнений методом Гаусса ( $n = 11$ )

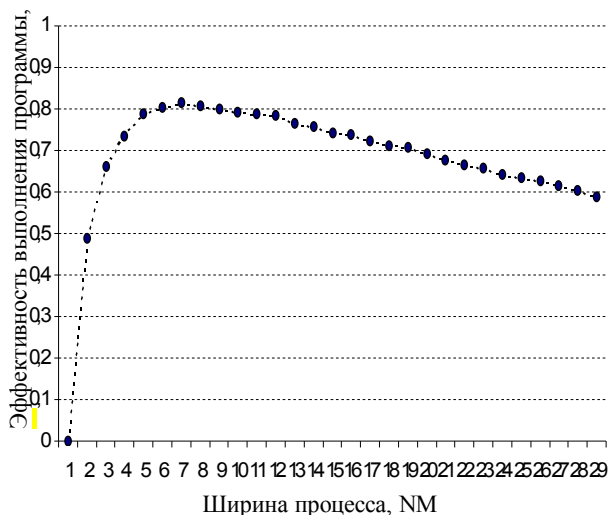


Рис. 3. Оценки коэффициента загрузки  $S$  процессоров параллельной ЭВМ при решении системы линейных уравнений методом Гаусса ( $n = 11$ )

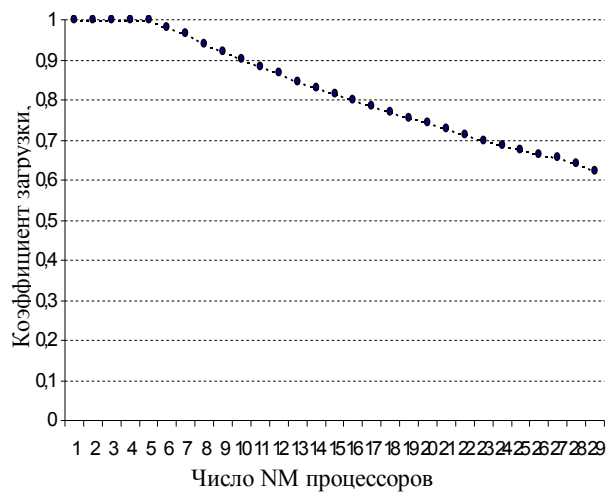


Рис. 4. Оценки эффективности параллельного решения системы линейных уравнений методом Гаусса ( $n = 11$ )

## Список литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. с англ. Под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
2. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
3. Корнеев В.В. Параллельные вычислительные системы. – М.: «Нолидж», 1999. – 320 с.
4. Вальковский В.А. Автоматический синтез параллельных алгоритмов // Вычислительные процессы и системы / Под ред. Г.И. Марчука. – Вып. 2. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – С.109-120.
5. Поляков Г.А. Синтез время – параметризованных параллельных программ – новый подход к параллельному программированию для специализированных многопроцессорных вычислительных комплексов АСУ реального масштаба времени // Всесоюзная научно-техническая конференция «Программное обеспечение АСУ». Методология разработки АСУ. Ч. 2. – Калинин: НПО «ЦЕНТРОГРАММ СИСТЕМ», 1980. – С.87-89.

6. Поляков Г.А. Глобально – параллельные время – параметризованные программы – новый подход к синтезу и выполнению параллельных программ в АСУ реального времени // Всесоюзная конференция «Программное обеспечение вычислительных сетей и систем реального времени». – К.: ГК СССР по науке и технике, АН СССР, АН Украинской ССР, ИК АН СССР, 1981. – С. 130-132.

7. Поляков Г.А., Умрихин Ю.Д. Автоматизация проектирования сложных цифровых систем коммутации и управления. – М.: Радио и связь, 1988. – 304 с.

8. Толстолужская Е.Г. Методика формализованного синтеза мультипараллельных архитектурно-ориентированных моделей решения задач // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова, 2003. – Вип. 22. – С. 206-215.

Поступила в редколлегию 4.04.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Г.А. Поляков, Академия наук Прикладной радиоэлектроники Беларуси, России и Украины, Харьков.