УДК 519.816(075.8)

А.О. Левченко

Львівський інститут Сухопутних військ
Національного університету«Львівська політехніка», Львів

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ НАЛЕЖНОСТІ В ПЕРЕДБАЧЕННІ ПОРЯДКОВОГО ТИПУ ШКАЛИ ВИМІРЮВАНЬ

У статті запропоновано удосконалена методика визначення значень функції приналежності на основі рівневих множин нечіткої множини за рахунок застосування процедури побудови функції приналежності в припущенні порядкового типу шкали вимірів.

методика, експерт, функції приналежності, нечітка множина, рівнева множина

Вступ

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Один з можливих підходів до рішення завдання побудови функції приналежності в припущенні її приналежності до порядкових шкал був запропонований Рональдом Ягером у роботі [1]. У його основу покладене "поняття рівневих множин заданої непарної множини". В [2] показано, як за допомогою суб'єктивного визначення рівневих множин порядку, що спричиняється неявне відношення, на базовій множини забезпечується можливість визначення нечіткої множини.

Постановка задачі. Нехай A – нечітка множина, задана на кінцевій множині

$$X = \{X_i\}, i = 1,...,n .$$

Множина α-рівня (α-зріз нечіткої множини A) визначається в [1] як

$$A_\alpha = \{xA(x) \ge \alpha, x \in X\},$$

т.ч. A_α – чітка підмножина множини X, що містить всі елементи, ступінь належності яких не менш ніж α. Кількість α-зрізів визначається обсягом вибірки M (M>>n), визначається апріорно. Одиничний інтервал [0;1] розбивається на M частин рівної довжини, складаючи множину $S = \{S_j\}, j = 1,...,m$. Для M=25, $S = \{s_1 = 1; s_2 = 0{,}96; \quad ...; s_{25} = 0{,}04\}$. З множини S випадковим чином без повернення призначається елемент s_j. Перед експертом формулюється завдання: "перелічити всі елементи з базової множини X для яких ступінь прояву якості (розглянутого якісного показника), що характеризує належність до досліджуваної множини A, не менше, ніж s_j". Ця процедура, повторена багаторазово (до повного вичерпання S) забезпечує суб'єктивне визначення рівневих множин, що характеризують нечітку множину A. Ступінь належності елемента x_i до нечіткої множини A, виражена через значення функції належності $\mu_A = (x_i)$, може бути оцінена якщо відома ймовірність випадкового вибору x_i за умовою попереднього випадкового вибору j-ої рівневої множини A_j:

$$P(X_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X_i \big|_{A_j}) P(A_j) ;$$

$$P(X_i \big|_{A_j}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_j}, x_i \in A_j , \end{cases} \quad (1)$$

де n_j – кількість елементів, що втримуються в рівневої множині $A_j, j = 1,...,m$, а ймовірність вибору A_j визначиться як: $P(A_j) = 1/m$.

Тоді для випадку, коли рівневі множини сформовані експертом, маємо:

$$P(X_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} P(X_i \big|_{A_j}) . \quad (2)$$

Таким чином, для оцінки ймовірності $P(x_i)$ на основі визначених експертом рівневих множин слід знайти суму величин, зворотних кількостям елементів, тих рівневих множин, до яких експерт відніс x_i, а отриману суму розділити на обсяг вибірки.

Мета роботи полягає в удосконаленні методики визначення значень функції належності на основі рівневих множин нечіткої множини запропонованої в [2, 3] за рахунок застосування процедури побудови функції належності в припущенні порядкового типу шкали вимірів. Це дозволить у нормованому вигляді представляти значення якісних показників зразків озброєння й військової техніки.

Виклад основного матеріалу дослідження

Очевидно, чим більшою мірою в об'єкта x_i проявляється якість, відповідно якому експерт формував рівневі множини, тим більш ймовірно, що x_i віднесено їм у більшу кількість рівневих множин. Відповідно, більше значення ймовірності його вибору за описаною послідовною схемою $P(X_i)$. Отже, відповідно до отриманого за (1) значеннями ймовірностей можливе встановлення лінійного порядку на X:

$$X^{\Pi} = \{x_i \big|_{P(X_k) \le P(X_{k+1})}), k = 1,...,n-1\}$$

де $X^{П}$ – упорядкована (за зростанням $P(X_i)$) множина, складена з елементів базової множини X.

Отже невідомі значення функції приналежності співвідносяться як $\mu_A(x_k^{П}) \le \mu_A(x_{k+1}^{П})$.

Якщо тепер випадковим чином вибрати поріг α з інтервалу [0;1], з отриманого нового рівневої множини $A_\alpha^{П}$, залежно від конкретного значення α може бути отримано одне з наступних рівневих множин:

– при $0 \le \alpha \le \mu_A(x_1^{П})$

$A_\alpha^{П} = \{x_1^{П}, x_2^{П}, x_3^{П}, ..., x_n^{П}\} = A_1^{П}$;

– при $\mu_A(x_1^{П}) \le \alpha \le \mu_A(x_2^{П})$

$A_\alpha^{П} = \{x_2^{П}, x_3^{П}, x_4^{П}, ..., x_n^{П}\} = A_2^{П}$;

– при $\mu_A(x_1^{П}) \le \alpha \le \mu_A(x_2^{П})$

$A_\alpha^{П} = \{x_3^{П}, x_4^{П}, x_5^{П}, ..., x_n^{П}\} = A_3^{П}$;

…

– при $\mu_A(x_{n-2}^{П}) \le \alpha \le \mu_A(x_{n-1}^{П})$

– $A_\alpha^{П} = \{x_{n-1}^{П}, ..., x_n^{П}\} = A_{n-1}^{П}$;

– при $\mu_A(x_{n-1}^{П}) \le \alpha \le \mu_A(x_n^{П})$

$A_\alpha^{П} = \{x_n^{П}\} = A_n^{П}$;

– при $\mu_A(x_n^{П}) \le \alpha \le 1 \qquad A_\alpha^{П} = Ø$.

Імовірність одержання конкретної множини $A_j^{П}$ визначиться зі співвідношення

$$P(A_j^{П}) = \mu_A(x_j^{П}) - \mu_A(x_{j-1}^{П}), j = 2,...,n.$$

Якщо тепер з цієї рівневої множини випадковим чином вибрати елемент $x_i^{П}$, то ймовірність вибору цього елемента:

$$P(x_i^{П}\Big|_{A_j^{П}}) = \left\{ \frac{1}{n_j^{П}}, x_i^{П} \in A_j^{П} \right.$$

де $n_j^{П}$ – кількість елементів в $A_j^{П}$.

Імовірність послідовного вибору значення α, а отже наступного вибору елемента $x_i^{П}$ з $A_j^{П}$:

$$P(x_i^{П}) = \sum_{j=1}^{m} P(X_i^{П}\Big|_{A_j^{П}})P(A_j^{П})$$

конкретно, для кожної рівневої множини $A_j^{П}$,

$$\begin{aligned}
&P(x_1^{П}) = \frac{1}{n};\\
&P(x_2^{П}) = P(x_1^{П}) + \frac{1}{n-1}(\mu_A(x_2^{П}) - \mu_A(x_1^{П}));\\
&...\\
&P(x_{n-1}^{П}) = P(x_{n-2}^{П}) + \frac{1}{2}(\mu_A(x_{n-1}^{П}) - \mu_A(x_{n-2}^{П}));\\
&P(x_n^{П}) = P(x_{n-1}^{П}) + (\mu_A(x_n^{П}) - \mu_A(x_{n-1}^{П}))/
\end{aligned} \qquad (3)$$

Імовірність того, що не обрано жоден елемент, складає $P(A_\alpha^{П})\Big|_{A_\alpha^{П}=Ш} = 1 - \mu_A(x_n^{П})$.

З (3) можуть бути отримані співвідношення, що виражають $\mu_A(x_i^{П})$ через відповідні ймовірності:

$$\begin{aligned}
&\mu_A(x_k^{П}) = (n-k) + \sum_{l=1}^{n-k} P(x_l^{П});\\
&\mu_A(x_k^{П}) = (n-k+1) + \sum_{l=1}^{n-k+1} P(x_l^{П});\\
&...\\
&\mu_A(x_{n-1}^{П}) = 2P(x_{n-1}^{П}) + \sum_{l=1}^{n-2} P(x_l^{П});\\
&\mu_A(x_n^{П}) = \sum_{l=1}^{n} P(x_l^{П}).
\end{aligned} \qquad (4)$$

Значення функції належності, що шукались, можуть бути отримані у відповідності з (4), якщо замість ймовірностей $P(x_i^{П})$ використати їх оцінки, які можуть бути отримані з (2), за умови досить великого обсягу вибірки (M >> n). Зокрема, в [1] наведено контрольний приклад, де множина X була складена з шести елементів (n = 6) і вибірки великого обсягу (M = 25). Було отримано досить гарне наближення значень функції належності до дійсних значень (середня відносна помилка менш ніж 1,5%). Рекомендовано використання обсягів вибірки більше п'ятдесяти значень (M = 50). При таких обсягах вибірки перед експертом може бути поставлене завдання наповнення великого числа (рівного M) рівневих множин, при цьому "крок градації" зміни рівня оцінюваної якості може наближатися до 0,01 (тобто експерта може бути запропоновано оцінити рівень якості об'єктів з точністю близько 1%). Разом з тим, особливості людської системи опрацювання інформації такі, що оптимальна кількість градацій якості, з якими людина може працювати коректно не перевищує 10 (якщо бути точним: 7 ± 2), що обумовлено кількістю можливих структурних блоків інформації, які можуть перебувати в короткочасній пам'яті людини). Виникле протиріччя між можливостями опрацювання інформації людиною й необхідністю використання великого обсягу вибірки може бути розв’язано, якщо врахувати властивість стійкості описаної процедури до непогодженості інформації. Хоча з теоретичних міркувань треба, що якщо $s_i > s_j$, то $A_i \subset A_j$, у методиці що пропонується, до експерта не пред'являється вимога відповідно до якої його відповіді повинні бути погоджені з цією умовою.

У силу цього до проведення процедури визначення значень функції належності може бути залучена група експертів, до яких незалежно один від одного (в індивідуальному порядку) може бути сформульоване завдання на формування рівневих множин. У цьому випадку обсяг вибірки M^1 (який як і раніше визначає сукупна кількість рівневих множин, сформованих тепер різними експертами), може бути визначений як добуток числа L елементів множини S^1 на кількість залучених експертів G:

$$M^1 = LS. \quad (4)$$

Тоді процедура перевірки коректності інформації, одержуваної від кожного експерта може бути зведена до перевірки задоволення вимог мінімуму погодженості [3], що може бути зведене до виконання наступних умов.

1. Кількість елементів, що втримуються в рівневих множинах не повинне зростати зі збільшенням значення s_i.

2. Якщо об'єкт x_i віднесений експертом до рівневих множин A_j та A_{j+k}, то він повинен також належати й всім $k+1$ проміжним множинам.

У випадку, коли сукупна кількість порушень цих вимог перевищує 2n, експертам, у чиїх відповідях були виявлені ці порушення, може бути запропоновано переглянути свій вибір, повідомивши результати аналізу. У випадку появи неузгоджених оцінок, процедура дозволяє надійно визначати значення функцій приналежності [3].

Таким чином, удосконалена методика визначення значень функції належності на основі рівневих множин нечіткої множини може бути представлена у вигляді послідовного виконання наступних процедур.

1. Відповідно до (4) визначається обсяг вибірки виходячи із числа елементів множини S^1 на кількість притягнутих експертів G ($M \geq 50$, $L \approx 10+2$).

Для випадку 8 градацій якості (L=8), досить залучення групи з 6 – 7 експертів [3].

2. Формується множина S^1 шляхом поділу одиничного інтервалу на L рівних частин.

Для L= 8,

$$S^1 = \{s_1{}^1 = 1, s_2{}^1 = 0{,}875, s_3{}^1 = 0{,}75, s_4{}^1 = 0{,}625,$$
$$s_5{}^1 = 0{,}5, s_6{}^1 = 0{,}375, s_7{}^1 = 0{,}25, s_8{}^1 = 0{,}125\}.$$

3. Для кожного з експертів в індивідуальному порядку випадковим чином обирається елемент $s_i{}^1$ з множини S без наступного повернення. Завдання, що пропонується експерту формулюються в такий спосіб: "перелічити всі об'єкти з базової множини X, для яких ступінь прояву якості (розглянутого якісного показника), не менше ніж $s_i{}^1$". Перелічені g-м експертом об'єкти становлять зміст рівневих множин $A_{gl}, g = 1,...,G; l = 1,...,L$.

Ця процедура повторюється для кожного елемента $s_i{}^1$ множини *S*. Для експертів проводиться аналіз наданої інформації на задоволення вимог мінімуму погодженості. Усього варто сформувати M^1 рівневих множин.

4. Визначаються відносні частоти для кожного об'єкта x_i зі співвідношення:

$$P(x_i \big|_{A_{gl}}) = \begin{cases} 0, & x_i \notin A_{gl}; \\ \dfrac{1}{n_{gl}}, & x_i \in A_{gl}, \end{cases}$$

де n_{gl} – число елементів рівневої множини A_{gl}.

5. Оцінюються ймовірності вибору об'єкта x_i:

$$P(x_i) = \frac{1}{LG}. \quad (5)$$

6. Значення функції належності $\mu_A(x_i), i = 1,...,n$ визначаються відповідно до (4), імовірності $P(x_i{}^{\Pi})$ апроксимуються оцінками $P(x_i)$, отриманими відповідно до (5).

Висновки та напрями подальших досліджень

Удосконалена методика визначення значень функції приналежності на основі рівневих множин нечіткої множини дає можливість в нормованому вигляді представляти значення якісних показників зразків озброєння й відрізняється від відомих методик тим, що:

– забезпечує широкий клас дозволених перетворень для формованої шкали вимірів (відповідно до вимог, що випливають з теорії вимірювань);

– є стійкою до ситуацій непогодженості інформації, одержуваної від експертів (процедури, перевірки інформації на погодженість легко реалізовані);

– враховує особливості обробки інформації людиною.

Список літератури

1. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 2003. − 49 с.

2. Полежаев С.В. Определение нечетких множеств с помощью субъективного определения уровневых подмножеств // Материалы научных трудов. – Одесса: ОИСВ, 1995. – С. 73-81.

3. Полежаев С.В. Обработка экспертных оценок в задачах оценки параметров ВВТ // Материалы научных трудов. – Одесса: ОИСВ, 1995. – С. 71-76.

Надійшла до редколегії 28.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Смєляков, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.