

ОЦЕНКА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ СВОБОДНОГО КОДОВОГО РАССТОЯНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Исследуются алгебраические методы построения сверточных кодов, основанные на полиномиальном описании непрерывного линейного кода множеством порождающих многочленов. Сформулированы необходимые и достаточные условия выполнения нижней границы свободного кодового расстояния алгебраически заданного сверточного кода.

сверточный код, порождающий многочлен, кодовое расстояние

Введение

Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы. Перспективным направлением повышения помехоустойчивости передачи дискретных сообщений в телекоммуникационных системах и сетях являются методы сверточного кодирования [1 – 7]. Их применение позволяет получить наибольший энергетический выигрыш от кодирования в дискретных каналах с независимыми и группирующимися случайными ошибками [7]. В то же время, существующие подходы к построению сверточных кодов основаны на неалгебраических процедурах переборного поиска и не дают конструктивного механизма синтеза кодов с большой длиной кодового ограничения [1 – 6]. Кроме того, известные методы декодирования сверточных кодов предполагают наличие специальной структуры синдромов и проверочной матрицы кода (самоортогональные и ортогонализируемые коды) либо ограничены вычислительными возможностями (декодер Витерби и последовательный поиск по решетке). Актуальным направлением является разработка алгебраических методов построения сверточных кодов с требуемыми свойствами, исследование эффективных алгоритмов алгебраического декодирования, оценка нижней границы свободного кодового расстояния алгебраически заданных сверточных кодов.

Полиномиальное описание сверточных кодов. Основное отличие сверточных кодов от блочных состоит в наличии функциональной зависимости проверочных символов блока от информации, содержащейся в различных блоках. Это определяется непрерывностью процесса кодирования и декодирования информации сверточными кодами, что в свою очередь хорошо согласуется с последовательной и непрерывной обработкой информации [3 – 6].

Полиномиальное представление сверточного кодирования состоит в описании работы регистров сдвига кодера с помощью соответствующих порождающих многочленов. Процедуру кодирования в этом случае удобно рассматривать как умножение

информационных многочленов

$$I_1(x), I_2(x), \dots, I_{k_0}(x)$$

на порождающие многочлены

$$g_1(x) = g_{1,r-1}x^{r-1} + g_{1,r-2}x^{r-2} + \dots + g_{1,1}x + g_{1,0},$$

$$g_2(x) = g_{2,r-1}x^{r-1} + g_{2,r-2}x^{r-2} + \dots + g_{2,1}x + g_{2,0}, \quad (1)$$

...

$$g_{n_0}(x) = g_{n_0,r-1}x^{r-1} + g_{n_0,r-2}x^{r-2} + \dots + g_{n_0,1}x + g_{n_0,0}$$

сверточного (n, k, d_∞) кода,

$$k = (r + 1) \cdot k_0,$$

$$n = (r + 1) \cdot n_0 = k \cdot n_0 / k_0,$$

$$d_{r+1} \leq d_{r+2} \leq \dots \leq d_\infty,$$

где минимальные веса $d_i, i = 1, 2, 3, \dots$ кодовых слов соответствуют i различным информационным кадрам, а свободное кодовое расстояние определяется по выражению

$$d_\infty = \max(d_i).$$

Кодовое слово $C(x)$ формируется путем последовательного считывания символов при одинаковых степенях многочленов

$$F_1(x) = I_1(x) \cdot g_1(x);$$

$$F_2(x) = I_2(x) \cdot g_2(x); \quad (2)$$

...

$$F_{n_0}(x) = I_{k_0}(x) \cdot g_{n_0}(x).$$

Конкретный набор многочленов

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_{n_0}(x)$$

задается логикой сверточного кодера и над алфавитом из q символов может быть определен q^{rk_0} различными способами.

Проблема синтеза эффективных сверточных кодов состоит в выборе такого набора многочленов $F_i(x), i = 1, 2, \dots, n_0$, который при заданных кодовых параметрах n и k максимизирует свободное кодовое расстояние d_∞ .

Проведенный анализ показал, что для построения сверточных кодов используются неалгебраические процедуры переборного поиска, которые не

дают конструктивного механизма синтеза кодов с большой длиной кодового ограничения $v = r \cdot k_0 [3 - 5]$. Особое место в теории сверточного кодирования занимают алгебраические методы синтеза, которые оперируют развитым математическим аппаратом высшей алгебры и позволяют строить коды с заданными кодовыми параметрами n и k .

Алгебраическое описание сверточных кодов. Алгебраический подход к решению проблемы синтеза сверточных кодов впервые предложен в работах [8, 9], а затем развит в [10, 11]. Суть этого подхода состоит в использовании порождающих многочленов двоичных циклических кодов для выбора многочленов $F_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n_0$, задающих логику сверточного кодера и описания процесса формирования кодового слова.

Зафиксируем конечное поле $GF(q^{n_0})$, построенное по кольцу многочленов с коэффициентами над $GF(q)$, и линейный блочный циклический (N, K, D) код, заданный порождающим многочленом

$$G(x) = G_{r-1}x^{r-1} + G_{r-2}x^{r-2} + \dots + G_1x + G_0,$$

где $G_l \in GF(q^{n_0})$, $l = 0, 1, \dots, r-1$, $r = N - K$.

Рассмотрим произведение

$$I_j(x) \cdot G(x), j = 1, 2, \dots, k_0,$$

где коэффициенты многочлена $I_j(x)$ принадлежат $GF(q)$. Пусть $\{g_{1,l}, g_{2,l}, \dots, g_{n_0,l}\}$ – коэффициенты $G_l \in GF(q^{n_0})$. Тогда произведение

$$I_j(x) \cdot G(x)$$

при посимвольной записи тождественно

$$I_j(x) \cdot g_1(x), I_j(x) \cdot g_2(x), \dots, I_j(x) \cdot g_{n_0}(x).$$

Обобщив последнее выражение для всех $j = 1, \dots, k_0$, получим обобщение линейного блочного циклического кода на непрерывный случай сверточного кодирования, причем справедливы выражения [8 – 11]:

$$v = (N - K) \cdot k^0, k = (N - K + 1) \cdot k^0, \\ n = k \cdot n^0 / k^0, R = k^0 / m. \quad (3)$$

Таким образом, развитый в работах [10, 11] подход позволяет по порождающему многочлену линейного блочного циклического (N, K, D) кода над $GF(q^{n_0})$ строить сверточный (n, k, d_∞) код над $GF(q)$, причем параметры n и k конструктивно выражаются через соответствующие значения (N, K, D) . Кроме того, построенные таким образом сверточные коды являются обобщением соответствующего циклического кода, следовательно, можно утверждать, что для большинства случаев $d_\infty \geq D$. В то же время, на сегодняшний день нет строгого математического доказательства оценки $d_\infty \geq D$, равно как и научно обоснованных рекомендаций по выбору $G(x)$.

Проанализируем, для каких случаев справедлива оценка $d_\infty \geq D$.

По определению, циклический (N, K, D) код над $GF(q^{n_0})$ – это линейный блочный код, заданный порождающим многочленом $G(x)$. В результате кодирования каждому информационному вектору длины K символов из $GF(q^{n_0})$ ставится в соответствие кодовое слово длины N символов из $GF(q^{n_0})$, причем расстояние между произвольными кодовыми словами не менее D символов. В терминах полиномиального описания блочных кодов циклический (N, K, D) код над $GF(q^{n_0})$ соответствует множеству многочленов $C_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, q^K$. Каждый из многочленов $C_i(x)$ представим в виде

$$C_i(x) = I_i(x) \cdot G(x), \quad (4)$$

следовательно, имеем:

$$\begin{cases} N - 1 > \deg(C_i(x)) \geq \deg(G(x)), \text{ при } I_i(x) \neq 0; \\ \deg(C_i(x)) = 0, \text{ при } I_i(x) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, ненулевое кодовое слово (при $I_i(x) \neq 0$) циклического (N, K, D) кода соответствует многочлену $C_i(x)$, степень которого не превосходит степени двучлена $(x^{N-1} - 1)$, делителем которого является порождающий многочлен $G(x)$. Следовательно, для любого $I_i(x)$ при $\deg(I_i(x)) \leq K - 1$ и многочленах (1), образованных из $G(x)$, соответствующее кодовое слово $C(x)$, сформированное посредством последовательного считывания символов при одинаковых степенях многочленов (2) суть кодовое слово $C_i(x)$ циклического (N, K, D) кода. Соответственно, выполняются следующие выражения:

$$d_\infty \geq d_{K-1} \geq D, \quad (5)$$

т.е., справедлива оценка, полученная в [10, 11] (справедливы также выражения (3)). Выполнение неравенства в выражении (5) возможно ввиду отображения элементов кодового слова $C(x)$ над $GF(q^{n_0})$ на множество элементов из $GF(q)$.

Рассмотрим случай $\deg(C_i(x)) \geq N - 1$ и $I_i(x) \neq 0$. Тогда ненулевой многочлен, полученный в результате произведения (4) суть кодовое слово циклического $(\deg(C_i(x)), K, D^*)$ кода, причем не всегда $D^* \geq D$. Так, например, если $I_i(x)$ есть второй делитель двучлена $(x^{N-1} - 1)$, т.е.,

$$(x^{N-1} - 1) = I_i(x) \cdot G(x),$$

имеем: $\deg(C_i(x)) = N - 1$ и $D^* = 2$ (как вес двучлена $(x^{N-1} - 1)$). Таким образом, *необходимым условием* выполнения границы (5) есть неразложимость произвольного двучлена

$$(x^M - 1) = I_i(x) \cdot G(x)$$

для любого $I_i(x) \neq 0$ и соответствующего

$$M = \deg(I_i(x)) + \deg(G(x)).$$

Достаточным условием выполнения границы (5) есть условие $D^* \geq D$ для всякого циклического $(\deg(C_i(x)), K, D^*)$ кода, как множества многочленов $C_i(x) = I_i(x) \cdot G(x)$ для произвольного $\deg(I_i(x))$. Следует отметить, что последнее условие не может быть необходимым ввиду отображения элементов кодового слова $C(x)$ над $GF(q^{n_0})$ на множество элементов из $GF(q)$. Другими словами, элементы $I_i(x)$ также как и элементы $C(x)$ (сформированного путем последовательного считывания символов при одинаковых степенях многочленов (2)) принадлежат полю $GF(q)$, а условие $D^* \geq D$ гарантирует выполнение границы (5) для многочленов с элементами из $GF(q^{n_0})$.

Выводы

Таким образом, в результате проведенных исследований получило дальнейшее развитие алгебраическое описание сверточных кодов через множество порождающих многочленов, коэффициенты которых определены через отображение коэффициентов порождающего многочлена недровичного циклического кода на произвольное подполе. Сформулированы необходимые и достаточные условия выполнения нижней границы свободного кодового расстояния алгебраически заданного сверточного кода.

Список литературы

1. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Сов. радио, 1970. – 728 с.
2. Elias P. Coding for Noisy Channel // IRE Convention Record. – 1955. – Part 4. – P. 37-46.
3. Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979. – 744 с.
4. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
5. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролируемых ошибок: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
6. Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Инагаки Я. Теория кодирования. – М.: Мир, 1978. – 576 с.
7. Бернгард Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с.
8. Краснобаев В.А., Приходько С.И., Снисаренко А.Г. Помехоустойчивое кодирование в АСУ. – Х.: ХВВКИУРВ, 1990. – 155 с.
9. Приходько С.И. Алгебраические сверточные коды // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – Х.: ХарДАЗТ. – 1999. – №2(17). – С. 62-64.
10. Приходько С.И., Кузнецов А.А., Гусев С.А., Кузель И.Е. Алгебраическое построение несистематических сверточных кодов // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 8 (36). – С. 170-175.
11. Приходько С.И., Кузнецов А.А., Гусев С.А., Кузель И.Е. Алгебраический метод сверточного кодирования // Комп'ютерні системи та інформаційні технології. – Х.: ХАИ, 2005. – № 1. – С.35-43.

Поступила в редколлегию 24.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.