УДК 519.859

Т.Е. Романова, Е.А. Ступак

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ КРУГОВЫХ СЕГМЕНТОВ И КРУГОВ

Рассматривается оптимизационная задача размещения круговых сегментов и кругов в прямоугольной области. В качестве средств математического моделирования отношений геометрических объектов используется метод Φ-функций. Строится математическая модель задачи и приводятся ее основные особенности..

математическая модель, упаковка, геометрические объекты, круговые сегменты, Ф-функция

Введение

Задачи упаковки и раскроя *(Packing and Cutting)*, в дальнейшем задачи размещения, относятся к классу задач геометрического проектирования.

Задачи размещения в встречаются в различных отраслях промышленности, в том числе в легкой промышленности, энергомашиностроении, ядерной энергетике, в порошковой металлургии и промышленном материаловедении, в химическом машиностроении, для построения схем размещения грузов в складских помещениях. Кроме того, существуют интересные приложения задач размещения в медицине, робототехнике.

Анализ современного состояния данной проблемной области позволяет сделать следующие выводы.

Существует длинный список работ, посвященных решению задач размещения кругов, прямоугольников, выпуклых и невыпуклых многоугольников. Достаточно полный обзор публикаций приведен в [1]. Значительно меньше исследований направлено на решение задач размещения двумерных объектов, граница которых состоит из отрезков прямых и дуг окружностей [2, 3].

Для решения рассматриваемого класса задач, как правило, используются эвристические подходы, которые даже в двумерном случае базируются на грубой аппроксимации пространственных форм геометрических объектов. Вследствие этого, либо отсутствует адекватность математических моделей реальным постановкам задач размещения, либо математическая модель как таковая отсутствует вообще, либо отсутствует конструктивность описания математических моделей, представление которых позволяло бы применить для решения задачи известные методы локальной и глобальной оптимизации.

Это объясняется отсутствием средств аналитического описания условий непересечения обозначенных объектов и принадлежности объектов заданным областям взаимодействий геометрических объектов, что является фундаментальной основой математического моделирования задач данного класса.

Разработка эффективных методов решения задач размещения геометрических объектов, обладающих произвольной пространственной формой, требует построения современных средств математического и компьютерного моделирования.

В пределах данных исследований с целью построения математической модели задачи размещения кругов и ориентированных круговых объектов строится полный класс Φ -функций [4 – 6], необходимых для аналитического описания основных ограничений задач размещения .

Целью статьи является построение математической модели задачи размещения кругов и ориентированных круговых сегментов в прямоугольной области переменной длины с целью ее минимизации.

Постановка задачи. Пусть имеются прямоугольник $P = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le y \le h, 0 \le x \le l\}$, круги $C_i = \{(x, y) \in R^2 \mid g_{0_i}(x, y) = x^2 + y^2 - r_i^2 \le 0\}$ радиуса r_i, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, круговые сегменты S_j, $j = 1, 2, ..., n_2$, с соответствующими параметрами размещения $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n = n_1 + n_2$. Сегмент S_j – объект, образованный непустым пересечением круга $\overline{C}_j$ и полуплоскости $\overline{H}_j$, т.е. $S_j = \overline{C}_j \cap \overline{H}_j$,

где $\overline{H}_j = \{(x, y) \in R^2 \mid g_{1_j}(x, y) = A_j x - B_j y + C_j \le 0\}$, если $u_j \in S_j$,

и $\overline{H}_j = \{(x, y) \in R^2 \mid g_{1_j}(x, y) = A_j x - B_j y + C_j \ge 0\}$, если $u_j \notin S_j$.

При этом $s^j{}_1 = (\tilde{x}_1^j, \tilde{y}_1^j)$ и $s^j{}_2 = (\tilde{x}_2^j, \tilde{y}_2^j)$ – точки пересечения кривой $g_{0_j}(x, y) = 0$ и прямой $g_{1_j}(x, y) = 0$. Дуга $\mathrm{arc}(s_1^j, s_2^j) \subset \overline{C}_j$ ориентирована против часовой стрелки. Полагаем, что полюс объектов совпадает с началом собственной системы координат объектов и является центром C_i или $\overline{C}_j$ для соответствующих объектов C_i или S_j, и левой нижней вершиной – в случае прямоугольника P.

Объект T, транслированный на вектор u, обозначается как $T(u)$, где $u = (x, y) \in R^2$ – вектор параметров размещения объекта T. Таким образом, допускаются отображения трансляции.

Задача. Разместить объекты $T_i(u_i)$, $T_i \in \{S, C\}$, $i = 1, 2, ..., n$, $n = n_1 + n_2$, в области $P(u_0)$ так, чтобы переменная l принимала минимальное значение.

Математическая модель

С целью построения математической модели поставленной задачи необходимо аналитически описать условие принадлежности объекта $T_i(u_i)$ области $P(u_0)$ и условие непересечения объектов $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$.

Условие принадлежности объекта $T_i(u_i)$ области $P(u_0)$:

$$T_i(u_i) \subset P(u_0) \text{ или } \operatorname{int} T_i(u_i) \cap \operatorname{int} P^*(u_0) = \varnothing, \quad (1)$$

в терминах Φ -функций можно представить в следующем виде:

$$\Phi_i(u_0, u_i) \ge 0, \quad (2)$$

где $P^*(u_0) = cl(R^2 \setminus P(u_0))$, $\operatorname{int}(\cdot)$ ($cl(\cdot)$) – внутренность (замыкание) множества $(\cdot)$ [7], $\Phi_i(u_0, u_i)$ – Φ -функция для $T_i(u_i)$ и $P^*(u_0)$.

Следуя работе [5], если $T_i(u_i) \in \{C\}$, то Φ -функция $C_i(u_i)$ и $P^*(u_0)$ имеет вид

$$\Phi_{0i}^C(u_0, u_i) = \min\{x - r_i, y - r_i, -x + h - r_i, -y + l - r_i\}, i = 1, \ldots, n_1. \quad (3)$$

Если $T_i(u_i) \in \{S\}$, то Φ -функцию $S_i(u_i)$ и $P^*(u_0)$ можно определить следующим образом:

$$\Phi_{0i}^S(u_0, u_i) = \min\{\chi_i^1(u), \chi_i^2(u), \chi_i^3(u), \chi_i^4(u)\}, \quad i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2, \quad (4)$$

где $d_i^k = \dfrac{s_i^k - s_i^0}{\left\| s_i^k - s_i^0 \right\|}$, $k = 1,2$, $d_i^0 = \begin{pmatrix} A_i \\ -B_i \end{pmatrix}$,

$j_i = \arg\min\{(d_i^k)^T \cdot v_m\}$,

$v = \{\{1,0\},\{1,h\},\{0,h\},\{0,0\}\}$, $k = 0,1,2$.

$I_i^C = \{j_i^1, \ldots, j_i^2 - 1\}$, $I_i^1 = \{j_i^0, \ldots, j_i^1 - 1\}$,

$I_i^2 = \{j_i^2, \ldots, j_i^0 - 1\}$, $I_i^v = \{v_i^1, \ldots, v_i^2 - 1\}$,

$$I_i^v = \begin{cases} I_i^c, \chi_i^m(x,y) = A_m x - B_m y + (C_m - r_i) = 0; \\ I_i^1, \chi_i^m(x,y) = A_m (x + \tilde{x}_i^1) - B_m (y + \tilde{y}_i^1) + C_m = 0; \\ I_i^2, \chi_i^m(x,y) = A_m (x + \tilde{x}_i^2) - B_m (y + \tilde{y}_i^2) + C_m = 0, \end{cases}$$

$m = 1, \ldots, 4$.

Условие непересечения объектов $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$, $i \neq j$, $i, j \in \{1 \ldots, n\}$,

$$\operatorname{int} T_i(u_i) \bigcap \operatorname{int} T_j(u_j) = \varnothing, \tag{5}$$

можно представить в виде

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0. \tag{6}$$

В случае, если $T_i(u_i) \in \{C\}$ и $T_j(u_j) \in \{C\}$, то Φ-функция $C_i(u_i)$ и $C_j(u_j)$ [5] имеет вид

$$\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) = \varpi(u_i, u_j), \tag{7}$$

где $\varpi(u_i, u_j) = (x^j - x^i)^2 + (y^j - y^i)^2 - (r^j + r^i)^2$.

В случае, если $T_i(u_i) \in \{C\}$ и $T_j(u_j) \in \{S\}$ Φ-функция $C_i(u_i)$ и $S_j(u_j)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{CS}(u_i, u_j) = \max\{&\min\{\omega_{ij}^0(u_i, u_j), \varphi_{ij}^0(u_i, u_j)\}, \\ &\max_{k=1,2} \min\{\omega_{ij}^k(u_i, u_j), \psi_{ij}^k(u_i, u_j)\}, \\ &\varphi_{ij}^1(u_i, u_j)\},\ i = 1, \ldots, n_1,\ j = n_1 + 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\omega_{ij}^0(u_i, u_j) = x^2 + y^2 - r_{ij}^2$, $r_{ij} = r_i + r_j$,

$\omega_{ij}^k(u_i, u_j) = (x + \breve{x}_j^k)^2 + (y + \breve{y}_j^k)^2 - r_i^2$, $k = 1,2$;

$\varphi_{ij}^1(u_i, u_j) = A_{ij}^1 x - B_{ij}^1 y + C_{ij}^1$, $A_{ij}^1 = \tilde{y}_{ij}^1 - \tilde{y}_{ij}^2$

$B_{ij}^1 = \tilde{x}_{ij}^1 - \tilde{x}_{ij}^2$ $C_{ij}^1 = -A_{ij}^1 \tilde{x}_{ij}^2 + B_{ij}^1 \tilde{y}_{ij}^2$;

здесь $(\tilde{x}_{ij}^k, \tilde{y}_{ij}^k) = -(\breve{x}_j^k, \breve{y}_j^k) + \dfrac{r_i}{\sqrt{\tilde{A}_{ij}^2 + \tilde{B}_{ij}^2}} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{ij} \\ -\tilde{B}_{ij} \end{pmatrix}$,

$k = 1,2$, $\tilde{A}_{ij} = \breve{y}_j^2 - \breve{y}_j^1$, $\tilde{B}_{ij} = \breve{x}_j^2 - \breve{x}_j^1$;

$\varphi_{ij}^0(u_i, u_j) = A_{ij}^0 x - B_{ij}^0 y + C_{ij}^0$, $A_{ij}^0 = \tilde{\tilde{y}}_j^1 - \tilde{\tilde{y}}_j^2$

$B_{ij}^0 = \tilde{\tilde{x}}_j^1 - \tilde{\tilde{x}}_j^2$ $C_{ij}^0 = -A_{ij}^0 \tilde{\tilde{x}}_j^2 + B_{ij}^0 \tilde{\tilde{y}}_j^2$;

здесь $(\tilde{\tilde{x}}_{ij}^k, \tilde{\tilde{y}}_{ij}^k) = -(\breve{x}_j^k, \breve{y}_j^k) + \dfrac{r_i}{\sqrt{(A_{ij}^r)^2 + (B_{ij}^r)^2}} \begin{pmatrix} B_{ij}^r \\ A_{ij}^r \end{pmatrix}$,

$A_{ij}^r = -\breve{y}_j^k$, $B_{ij}^r = -\breve{x}_j^k$ $k = 1,2$, $r = 3,4$, соответственно;

$\psi_{ij}^k(u_i, u_j) = \dfrac{r_i}{\tilde{\tilde{x}}_{ij}^k \tilde{y}_{ij}^k - \tilde{\tilde{y}}_{ij}^k \tilde{x}_{ij}^k} (A_{ij}^r x - B_{ij}^r y + C_{ij}^r)$, $k = 1,2$,

$r = 5,6$, соответственно $A_{ij}^r = \tilde{y}_{ij}^k - \tilde{\tilde{y}}_{ij}^k$,

$B_{ij}^r = \tilde{x}_{ij}^k - \tilde{\tilde{x}}_{ij}^k$, $C_{ij}^r = -A_{ij}^r \tilde{\tilde{x}}_{ij}^k + B_{ij}^r \tilde{\tilde{y}}_{ij}^k$.

В случае, если $T_i(u_i) \in \{S\}$ и $T_j(u_j) \in \{S\}$, то Φ-функция $S_i(u_i)$ и $S_j(u_j)$ описывается так:

$$\begin{aligned} &\Phi_{ij}^{SS}(u_i, u_j) = \\ &= \max\{\max_{k=1,2} \min\{\omega_{ij}^k(u_i, u_j), \psi_{ij}^k(u_i, u_j)\}, \\ &\quad \max_{k=1,2,3} \chi_{ij}^k(u_i, u_j), \max_{k=1,2,3,4} \tilde{\chi}_{ij}^k(u_i, u_j), \\ &\quad \min\{\omega_{ij}^0(u_i, u_j), \varphi_{ij}^0(u_i, u_j)\}, \\ &\quad \max_{k=3,4} \min\{\omega_{ij}^k(u_i, u_j), \psi_{ij}^k(u_i, u_j)\}, \\ &\quad \varphi_{ij}^1(u_i, u_j)\},\ n_1 < i < j = n_1 + n_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega_{ij}^k(u_i, u_j) = (x - \breve{x}_i^k)^2 + (y - \breve{y}_i^k)^2 - r_j^2$, $k = 1,2$;

$\psi_{ij}^k(u_i, u_j) = \dfrac{r_j}{\breve{x}_{ij}^l \breve{y}_{ij}^{l+1} - \breve{y}_{ij}^l \breve{x}_{ij}^{l+1}} (\tilde{A}_{ij}^k x - \tilde{B}_{ij}^k y + \tilde{C}_{ij}^k)$,

$\tilde{A}_{ij}^k = \breve{y}_{ij}^{l+1} - \breve{y}_{ij}^l$, $\tilde{B}_{ij}^k = \breve{x}_{ij}^{l+1} - \breve{x}_{ij}^l$,

$\tilde{C}_{ij}^k = -\tilde{A}_{ij}^k (\breve{x}_i^k + \breve{x}_{ij}^l) + \tilde{B}_{ij}^k (\breve{y}_i^k + \breve{y}_{ij}^l)$, при $k = 1$, $l = 2$, при $k = 2$, $l = 1$,

$(\breve{x}_{ij}^k, \breve{y}_{ij}^k) = \dfrac{r_j}{\sqrt{(\breve{A}_{ij}^k)^2 + (\breve{B}_{ij}^k)^2}} \begin{pmatrix} \breve{A}_{ij}^k \\ -\breve{B}_{ij}^k \end{pmatrix}$, $k = 1,2,3$,

$\breve{A}_{ij}^1 = \breve{y}_i^2 - y_i'^2$, $\breve{B}_{ij}^1 = \breve{x}_i^2 - x_i'^2$, $\breve{A}_{ij}^2 = \breve{y}_i^1 - \breve{y}_i^2$,

$\breve{B}_{ij}^2 = \breve{x}_i^1 - \breve{x}_i^2$, $\breve{A}_{ij}^3 = y_i'^1 - \breve{y}_i^1$, $\breve{B}_{ij}^3 = x_i'^1 - \breve{x}_i^1$,

$\chi_{ij}^k(u_i, u_j) = A_{ij}^k x - B_{ij}^k y + C_{ij}^k$,

$d_{ij}^k = \sqrt{(A_{ij}^k)^2 + (B_{ij}^k)^2}$, $k = 1,2,3$, $A_{ij}^k = \breve{x}_i^k / d_{ij}^k$,

$B_{ij}^k = -\breve{y}_i^k / d_{ij}^k$, $C_{ij}^k = -((\breve{x}_{ij}^k)^2 + (\breve{y}_{ij}^k)^2) / d_{ij}^k - r_j$,

$k = 1,3$ $A_{ij}^2 = (\breve{y}_i^1 - \breve{y}_i^2) / d_{ij}^2$, $B_{ij}^2 = (\breve{x}_i^1 - \breve{x}_i^2) / d_{ij}^2$,

$C_{ij}^2 = (-A_{ij}^2 \breve{x}_i^1 + B_{ij}^2 \breve{y}_i^1) / d_{ij}^2 - r_j$,

$\tilde{\chi}_{ij}^k(u_i, u_j) = \tilde{A}_{ij}^k x - \tilde{B}_{ij}^k y + \tilde{C}'^k_{ij}$,

$\tilde{d}_{ij}^k = \sqrt{(\tilde{A}_{ij}^k)^2 + (\tilde{B}_{ij}^k)^2}$, $h_{ij}^k(x,y) = \tilde{A}_{ij}^k x - \tilde{B}_{ij}^k y + \tilde{C}_{ij}^k$,

$\tilde{C}'^k_{ij} = \min\{h_{ij}^k(\breve{x}_i^r, \breve{y}_i^r) : r = 1,2\}$ $k = 1,2,3,4$,

$\tilde{A}_{ij}^k = \breve{x}_i^k / \tilde{d}_{ij}^k$, $\tilde{B}_{ij}^k = -\breve{y}_i^k / \tilde{d}_{ij}^k$,

$\tilde{C}_{ij}^k = -((\breve{x}_i^k)^2 + (\breve{y}_i^k)^2) / \tilde{d}_{ij}^k$, $k = 1,3$

$\tilde{A}_{ij}^2 = (\breve{y}_i^1 - \breve{y}_i^2) / \tilde{d}_{ij}^2$, $\tilde{B}_{ij}^2 = (\breve{x}_i^1 - \breve{x}_i^2) / \tilde{d}_{ij}^2$,

$\tilde{C}_{ij}^2 = (-\tilde{A}_{ij}^2 \hat{x}_i^2 + \tilde{B}_{ij}^2 \hat{y}_i^2) / \tilde{d}_{ij}^2$,

$\tilde{A}_{ij}^4 = (\hat{y}_j^1 - \hat{y}_j^2) / \tilde{d}_{ij}^4, \tilde{B}_{ij}^4 = (\hat{x}_j^1 - \hat{x}_j^2) / \tilde{d}_{ij}^4$,

$\tilde{C}_{ij}^4 = (-\tilde{A}_{ij}^4 \hat{x}_j^2 + \tilde{B}_{ij}^4 \hat{y}_j^2) / \tilde{d}_{ij}^4$;

$\omega_{ij}^0(u_i, u_j) = x^2 + y^2 - r_{ij}^2$, $r_{ij} = r_i + r_j$;

$\varphi_{ij}^0(u_i, u_j) = A_{ij}^0 x - B_{ij}^0 y + C_{ij}^0$, $A_{ij}^0 = \tilde{y}_j^1 - \tilde{y}_j^2$

$B_{ij}^0 = \tilde{x}_j^1 - \tilde{x}_j^2$ $C_{ij}^0 = -A_{ij}^0 \tilde{x}_j^2 + B_{ij}^0 \tilde{y}_j^2$;

$$(\tilde{x}_{ij}^k, \tilde{y}_{ij}^k) = -(\hat{x}_j^k, \hat{y}_j^k) + \frac{r_i}{\sqrt{(\tilde{A}_{ij})^2 + (\tilde{B}_{ij})^2}} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{ij} \\ -\tilde{B}_{ij} \end{pmatrix},$$

$\tilde{A}_{ij} = \hat{y}_j^2 - \hat{y}_j^1$, $\tilde{B}_{ij} = \hat{x}_j^2 - \hat{x}_j^1$;

$\omega_{ij}^r(u_i, u_j) = (x + \hat{x}_j^k)^2 + (y + \hat{y}_j^k)^2 - r_i^2$, $k = 1, 2$, $r = 3, 4$.

$\varphi_{ij}^1(u_i, u_j) = A_{ij}^1 x - B_{ij}^1 y + C_{ij}^1$,

$A_{ij}^1 = \tilde{y}_{ij}^1 - \tilde{y}_{ij}^2$, $B_{ij}^1 = \tilde{x}_{ij}^1 - \tilde{x}_{ij}^2$, $C_{ij}^1 = -A_{ij}^1 \tilde{x}_{ij}^2 + B_{ij}^1 \tilde{y}_{ij}^2$.

$$\psi_{ij}^k(u_i, u_j) = \frac{r_i}{\tilde{\tilde{x}}_{ij}^r \tilde{y}_{ij}^r - \tilde{\tilde{y}}_{ij}^r \tilde{x}_{ij}^r} (A_{ij}^k x - B_{ij}^k y + C_{ij}^k),$$

$A_{ij}^k = \tilde{y}_{ij}^r - \tilde{\tilde{y}}_{ij}^r$, $B_{ij}^k = \tilde{x}_{ij}^r - \tilde{\tilde{x}}_{ij}^r$, $C_{ij}^k = -A_{ij}^k \tilde{\tilde{x}}_{ij}^r + B_{ij}^k \tilde{\tilde{y}}_{ij}^r$, $k = 3, 4$, $r = 1, 2$, соответственно,

$$(\tilde{\tilde{x}}_{ij}^k, \tilde{\tilde{y}}_{ij}^k) = -(\hat{x}_j^k, \hat{y}_j^k) + \frac{r_i}{\sqrt{(\tilde{\tilde{A}}_{ij}^k)^2 + (\tilde{\tilde{B}}_{ij}^k)^2}} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}}_{ij}^k \\ -\tilde{\tilde{B}}_{ij}^k \end{pmatrix},$$

$\tilde{\tilde{A}}_{ij}^k = -\hat{y}_j^k$ $\tilde{\tilde{B}}_{ij}^k = -\hat{x}_j^k$, $k = 1, 2$.

Учитывая, что параметры размещения области размещения фиксированы, т.е. $u_0 = 0$, то область допустимых решений W задачи размещения можно описать неравенством:

$$\Lambda(u_1, u_2, ..., u_n) \ge 0, \tag{10}$$

где Λ – функция размещения, зависящая от параметров размещения объектов $T_i \in \{S, C\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n = n_1 + n_2$ и заданная так: $\Lambda(u_1, u_2, ..., u_n) = \min\{\Phi_1(u_1, u_2, ..., u_n), \Phi_2(u_1, u_2, ..., u_n)\}$,

где

$$\begin{aligned} &\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \\ &= \min\{\Phi_{oi}^C(0, u_i),\ i = 1, 2, \ldots, n_1, \\ &\Phi_{oi}^S(0, u_i),\ i = n_1 + 1, \ldots, n\}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_2(u_1, u_2, ..., u_n) = \\ &= \min\{\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j),\ i < j = 1, 2, ..., n_1, \\ &\Phi_{ij}^{CS}(u_i, u_j), i = 1, \ldots, n_1,\ j = n_1 + 1, ..., n, \\ &\Phi_{ij}^{SS}(u_i, u_j),\ i < j = n_1 + 1, ..., n\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая (2) – (9) и (11) – (12), система (10) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \Phi_1(u_1, u_2, ..., u_n) \ge 0; \\ \Phi_2(u_1, u_2, ..., u_n) \ge 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \Phi_{oi}^C(u_0, u_i) \ge 0,\ i = 1, 2, ..., n_1; \\ \Phi_{oi}^S(u_0, u_i) \ge 0,\ i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2; \\ \Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) \ge 0,\ i < j = 1, 2, ..., n_1; \\ \Phi_{ij}^{CS}(u_i, u_j) \ge 0,\ i = 1, \ldots, n_1,\ j = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2; \\ \Phi_{ij}^{SS}(u_i, u_j) \ge 0,\ i < j = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2, \end{cases} \tag{13}$$

Тогда математическую модель поставленной задачи можно определить так:

$$\min F(X); \tag{14}$$

$$X \in W \subset R^{2n+1},\ X = (u_1, u_2, \ldots, u_n, l),\ F(X) = l;$$

где W – область допустимых решений, заданная системой неравенств (13).

Математическая модель (14) может быть определена в эквивалентном виде

$$l^* = \min l, \tag{15}$$

$$X \in W \subset R^{2n+1}$$

Рассмотрим основные особенности математической модели (15).

Особенности математической модели

1. Поскольку функции $\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j)$, $i < j = 2, \ldots, n_1$, $\Phi_{ij}^{SS}(u_i, u_j) \ge 0$, $n_1 < i < j = n_1 + 2, \ldots, n$ и $\Phi_{ij}^{CS}(u_i, u_j) \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, $j = n_1 + 1, \ldots, n$ являются выпуклыми, то задача (15) является обратно выпуклой.

2. Выполнение неравенства $\Phi_{ij}^{CS}(u_i, u_j) \ge 0$ обеспечивает, следуя (8), совместность, по крайней мере, одной из систем вида

$$\begin{cases} \varpi_{ij}^0(u_i, u_j) \ge 0 \\ \varphi_{ij}^0(u_i, u_j) \ge 0 \end{cases}, \begin{cases} \varpi_{ij}^1(u_i, u_j) \ge 0 \\ \psi_{ij}^1(u_i, u_j) \ge 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \varpi_{ij}^2(u_i, u_j) \ge 0 \\ \psi_{ij}^2(u_i, u_j) \ge 0 \end{cases}, \{\varphi_{ij}^1(u_i, u_j) \ge 0. \tag{16}$$

3. Выполнение условия $\Phi_{ij}^{SS}(u_i, u_j) \ge 0$, учитывая (9), обеспечивает совместность, по крайней мере, хотя бы одной из систем вида

$$\begin{cases} \varpi_{ij}^1(u_i, u_j) \ge 0 \\ \psi_{ij}^1(u_i, u_j) \ge 0 \end{cases}, \begin{cases} \varpi_{ij}^2(u_i, u_j) \ge 0 \\ \psi_{ij}^2(u_i, u_j) \ge 0 \end{cases},$$
$$\chi_{ij}^k(u_i, u_j) \ge 0,\ \tilde{\chi}_{ij}^l(u_i, u_j) \ge 0, \tag{17}$$

$$\begin{cases}\varpi_{ij}^{0}(u_i,u_j)\ge 0\\ \varphi_{ij}^{0}(u_i,u_j)\ge 0\end{cases},\ \begin{cases}\varpi_{ij}^{3}(u_i,u_j)\ge 0\\ \psi_{ij}^{3}(u_i,u_j)\ge 0\end{cases},$$

$$\begin{cases}\varpi_{ij}^{4}(u_i,u_j)\ge 0\\ \psi_{ij}^{4}(u_i,u_j)\ge 0\end{cases},\ \varphi_{ij}^{1}(u_i,u_j)\ge 0.$$

4. Область допустимых решений W описывается системой, состоящей из $\frac{1}{2}n(n-1)$ наборов (7), (16), (17) и n систем неравенств вида (3), (4). Поскольку $\Phi_{ij}^{CC}(u_i,u_j)\ge 0$ определяется неравенством вида (7), $\Phi_{ij}^{CS}(u_i,u_j)\ge 0$ – 7 неравенствами вида (16), $\Phi_{ij}^{SS}(u_i,u_j)\ge 0$ – 18 неравенствами вида (17), и $\Phi_{oi}^{C}(u_0,u_i)\ge 0$, $i=1,\ldots,n_1$, – 4 неравенствами вида (3), $\Phi_{oi}^{S}(u_0,u_i)\ge 0$, $i=1,\ldots,n_2$, – 4 неравенствами вида (4), то W описывается

$$m=m_{11}+18m_{12}+4n, m_{11}=\frac{1}{2}n_1(n_1-1);$$

$$m_{12}=\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$$

в общем случае нелинейных неравенств.

5. В соответствии с (3), (4), (7), (8) и (9), область W определяется системой, состоящей из $m_1=m_{11}+m_{12}+m_{13}, m_{13}=n_1n_2$ наборов неравенств, а число всех систем неравенств, формирующих соответствующие наборы, оценивается величиной $m_2=m_{11}+4m_{12}+8m_{13}$.

6. Область W может быть представлена в виде объединения

$$W=\bigcup_{i=1}^{\eta}W_i, \tag{16}$$

где $\eta<\eta^*=1^{m_{11}}\times 4^{m_{12}}\times 8^{m_{13}}$, и W_i определяется системой из $\frac{1}{2}n(n-1)$ неравенств из наборов (3),(4) и (7) – (9), η^* – это число всех систем, которые могут быть построены посредством m_2 систем, среди которых есть и несовместные системы.

7. Задача (15) может быть преобразована к следующему виду

$$\min\{F(X^{i*}), i=1,\ldots,n\} \tag{18}$$

где $F(X^{i*})=\min F(X)$, $X\in W_i$, $i=1,\ldots,\eta$.

8. Каждая задача $F(X^{i*})=\min F(X)$, $X\in W_i$, $i=1,\ldots,\eta$ в общем случае является обратно выпуклой и многоэкстремальной.

9. В общем случае локальные минимумы нестрогие.

Исходя из перечисленных особенностей математической модели (15), можно сделать следующие выводы.

Выводы

- Поскольку множество W в общем случае несвязно, а каждая компонента связности многосвязна и определяется обратно выпуклыми функциями, то задача (15) является многоэкстремальной и *NP*-трудной.
- Локальные минимумы целевой функции достигаются в крайних точках W, поскольку целевая функция $F(X)$ – линейна.
- Описание (16) области W в виде объединения подобластей позволяет осуществить декомпозицию задачу (15) в виде (18). Таким образом, теоретически может быть получен глобальный минимум задачи (15), решая последовательность задач нелинейного программирования (18).

Поскольку число локальных минимумов больше $n!$, то для практических задач может быть найдено только приближение к глобальному минимуму.

Список литературы

1. *Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J. Cutting and packing // in: M. Dell'Amico, F. Maffioli and S. Martello Eds. Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons, Chichester. – 1997. – P. 393-412.*
2. *Birgin E.G., Martinez J.M., Nishihara F.H., Ronconi D.P. Ortogonal packing of rectangular items within arbitrary convex regions by nonlinear optimization // Computers&Operations Research. – 2006. – 33. – P. 3535-3548.*
3. *Burke E., Heller R., Kendall G., Whitwell G. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem // Operational research. – 2004. – V. 53, N3.*
4. *Stoyan Yu.G. Φ -function and its basic properties // Докл. АН Украины. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 112-117.*
5. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Φ -function for 2D primary object // Studia Informatica, Paris, University. - 2002. - Vol. 2, № 1. - P. 1-32.*
6. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Φ -function for complex 2D objects // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – Volume 2, Number 1. - P. 69-84.*
7. *Kuratowski K. Topolog // Vol. I: New York and London. – Academic press, 1966. – P. 594.*

Поступила в редколлегию 4.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.