

УДК621.391.83 : 004.94(045)

В.С. Еременко, В.М. Мокийчук, О.В. Самойличенко

Национальный авиационный университет, Киев

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЯ КОХРЕНА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ НАБЛЮДЕНИЙ

С помощью методов имитационного моделирования Монте-Карло исследуется параметрический критерий Кохрена проверки однородности нескольких выборок ограниченного объема. Рассмотрена зависимость мощности критерия при разных соотношениях статистических параметров от объема выборок и количества анализируемых групп. Для обоснованного использования на практике критерия Кохрена в случае ограниченных объемов выборок с целью устранения ошибок предложена методика определения мощности критерия.

статистический критерий однородности, закон распределения, выборка, дисперсия, гистограмма, доверительная вероятность, статистическая оценка мощности

Аккредитация измерительных и испытательных лабораторий на соответствие требованиям международного стандарта ISO/IEC 17025 [1] предопределяет оценку состояния единства измерений и проверку качества измерений (испытаний), проводимых в лабораториях. Необходимые показатели подтверждения компетентности лабораторий определяются на основании специфической метрологической процедуры –

межлабораторных сличений, проведение которых регламентировано ГОСТ ИСО \МЭК 43-1-2004 [2]. Основной задачей при межлабораторных сличениях, кроме выполнения соответствующих организационных процедур, является обработка полученных от лабораторий результатов, которая базируется на методах статистического анализа данных, дающих достоверное подтверждение отсутствия различий в ре-

зультатах, предоставляемых лабораториями. Такое подтверждение можно получить на основании статистических критериев проверки однородности предоставленных результатов измерений.

Особенности статистической обработки результатов измерений при межлабораторных сравнениях является их ограниченное количество (до 10 результатов, предоставляемых каждой участвующей лабораторией), что приводит к определенным трудностям при выборе используемых статистических критериев.

При проверке однородности дисперсий совокупности результатов измерений, выполненных в различных лабораториях (что эквивалентно подтверждению их воспроизводимости), в условиях выборок малого объема, стандарт ISO 5725 рекомендует использование критерия Кохрена [3].

Предельное распределение статистики Кохрена было получено на основании предельных теорем при неограниченных объемах выборок в группах и предположения о нормальности анализируемых данных, однако, на малых выборках проверить и доказать гипотезу о нормальности не представляется возможным [4].

Целью данной работы является экспериментальное исследование критерия Кохрена на выборках ограниченного объема и выборе рекомендаций по применению данного критерия в описанных условиях.

Критерий Кохрена позволяет сравнить однородность дисперсий результатов измерений полученных в p различных лабораториях и рассчитанных по одинаковому количеству n результатов, предоставляемых каждой лабораторией.

Тестовая статистика критерия Кохрена определяется выражением:

$$C = (s_{\max})^2 / \sum_{i=1}^p (s_i)^2, \quad (1)$$

где $s_{\max} = \max(s_1, s_2, \dots, s_p)$ – наибольшее значение оценки среднеквадратического отклонения (СКО) в рассматриваемой совокупности.

Проверяется гипотеза $C < C_{\alpha}$, где C_{α} – предельное значение тестовой статистики для заданного уровня значимости α . Если неравенство выполняется, то принимается гипотеза о статистической однородности дисперсий в рассматриваемых совокупностях. В случае, когда значение тестовой статистики больше 5%-го критического значения и не превышает 1%-го критического значения, группу с максимальным СКО называют квазивыбросом. В случае, когда значение статистики больше 1%-го критического значения, группу с максимальным СКО называют статистическим выбросом. Критические значения статистики Кохрена приведены в [3].

Зависимость распределения статистики Кохрена и мощности данного критерия от объема наблюдаемых выборок (количества результатов измерений в группах), соотношения дисперсий анализируемых

групп и количества групп (лабораторий) исследовалась с помощью имитационного моделирования методом Монте-Карло [5].

Важным вопросом при моделировании анализируемых групп данных является формирование статистических выбросов (выборок с экстремальным значением СКО). На первый взгляд наиболее логичным является использование дополнительного генератора случайных чисел с необходимым значением СКО. Однако, при малых объемах выборок, которые предполагаются носителями экстремального значения СКО, в действительности лишь часть их является таковыми. Это вызвано тем, что оценка дисперсии СКО групп зависит от количества измерений и при несимметричности распределения значений СКО выборок малого объема приводит к тому, что количество оценок СКО, имеющих значение меньше заданного (моделирующего выброс), получается больше, чем остальных значений получаемых при моделировании (рис. 1). Это обуславливает смещение математического ожидания тестовой статистики Кохрена влево от критического значения и, следовательно, понижение мощности критерия.

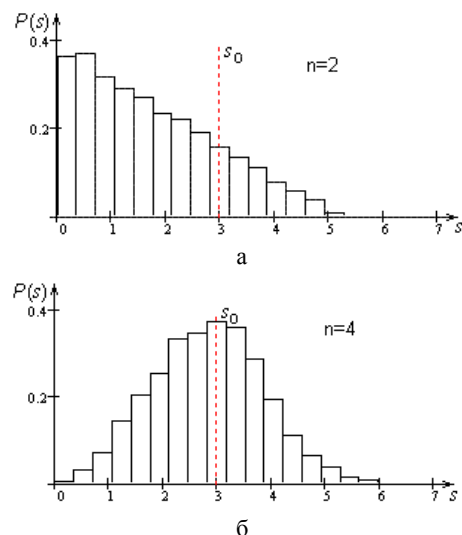


Рис. 1. Распределение оценок СКО выборок

Для обеспечения достоверного моделирования необходимо, чтобы каждая выборка, моделирующая выброс с вероятностью, близкой к единице, имела заданное экстремальное значение СКО. Исходя из вышесказанного, данные экстремальные выборки моделировались детерминированным образом согласно следующей формуле:

$$X_{\text{экс}i} = \begin{cases} \mu + s_{\text{экс}}, & \text{если } i \text{ четн.} \\ \mu - s_{\text{экс}}, & \text{если } i \text{ нечетн.} \end{cases}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad (2)$$

где μ – математическое ожидание общей совокупности групп; $s_{\text{экс}}$ – необходимое значение экстремального СКО.

В качестве примера, подтверждающего приведенные рассуждения, на рис. 2 представлены результаты исследований статистики Кохрена для $n = 2$,

полученные при рассмотренных способах моделирования данных при значении экстремального СКО превышающем среднегрупповое СКО в три раза.

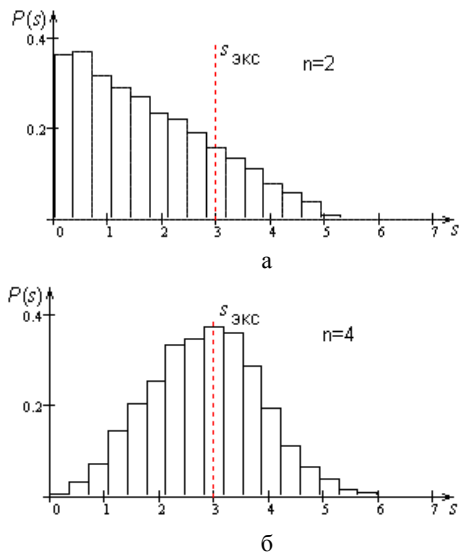


Рис. 2. Распределение статистики Кохрена при различных методах генерации тестовых совокупностей

В первом случае при использовании дополнительного генератора (рис. 2, а) оценка мощности критерия составила только 30%, а при предлагаемом способе формирования выборок оценка мощности критерия возросла до 90% (рис. 2, б).

При дальнейших исследованиях имитационное моделирование осуществлялось следующим образом: генерировалось 10000 тестовых совокупностей с заданным количеством p групп в совокупности, объемом выборки n в группе, а также необходимым значением СКО в экстремальной группе. По тестовым совокупностям рассчитывались тестовые статистики Кохрена, которые затем сравнивались с граничным значением для заданного уровня значимости.

По результатам модельного эксперимента были рассчитаны значения вероятности принятия решения об однородности тестовой совокупности в зависимости от количества групп, отношения экстремального СКО к среднему по совокупности и объема выборки в группе. Полученные зависимости, представленные на рис. 3 показывают, например, что при использовании двух результатов измерений от каждой лаборатории для обнаружения статистического выброса втрое превышающего среднее значение СКО, в межлабораторных сличениях должно участвовать не менее 15 лабораторий. Увеличение количества экспериментальных данных от каждой лаборатории до четырех позволило обнаруживать превышение среднего СКО в выбросе в 2,2 раза при таком же количестве задействованных лабораторий.

Результаты проведенных исследований критерия Кохрена показывают, что мощность критерия не является постоянной для разных объемов выборки, количества групп и соотношения их статистических характеристик и оптимальное соотношение пара-

метров для обеспечения необходимой мощности остается неизвестным. Поэтому для получения достоверных результатов при использовании данного критерия в условиях ограниченного объема экспериментальных данных, методом статистического моделирования была получена статистическая оценка мощности (СОМ) критерия Кохрена в виде функции $f = f(P | \alpha, N, a_0 \dots a_{n-1})$, которая описывает зависимость мощности критерия от объема выборки в группе n , количества анализируемых групп p , статистических характеристик каждой группы и совокупности в целом $a_0 \dots a_{n-1}$, а также и уровня доверительной вероятности α .

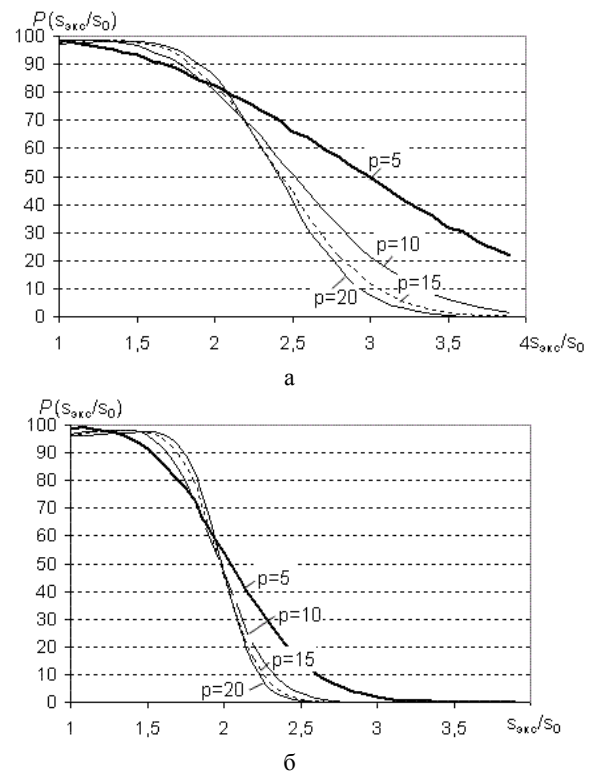


Рис. 3. Вероятность принятия решения об однородности при объеме выборки в группе: а – $n = 2$; б – $n = 2$

Предложенная статистическая оценка мощности критерия Кохрена может быть представлена в виде поверхности, по осям которой размещены значения количества групп p , соотношения экстремального $s_{экс}$ и среднего по совокупности СКО (s_0) и полученные значения мощности $P(s_{экс}/s_0, P)$ (рис. 4, поверхность 1).

На полученную поверхность нанесем плоскость, которая соответствует заданной мощности критерия, например 0,95 (рис. 4, плоскость 2). Искомую СОМ критерия для заданного значения мощности получим как проекцию пересечения поверхности 1 и плоскости 2 на плоскость $(s_{экс}/s_0, P)$ (рис. 4, кривая 3). Построенная таким образом СОМ дает возможность определить, какими должны быть значения параметров исследуемых групп, для обеспечения мощность критерия на уровне 0,95. Фактически кривая являет-

ся границей, выше которой находится множество значений параметров анализируемых групп, обеспечивающих необходимую мощность критерия при выбранном объеме выборки в группе.

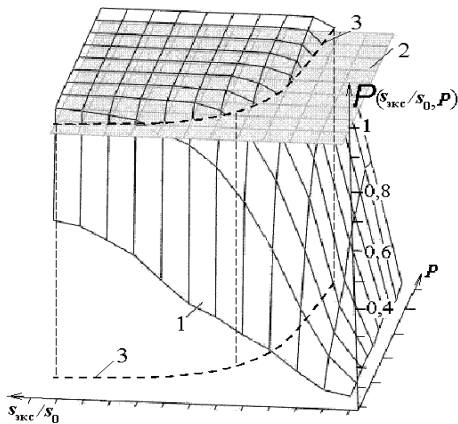


Рис. 4. Поверхность SOM критерия Кохрена

В табл. 1 приведены рассчитанные значения отношения экстремального СКО к среднему, которые могут быть выявлены с помощью критерия Кохрена с заданной доверительной вероятностью α .

Таблица 1

p	n = 2		n = 4		n = 6	
	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
3	9,28	19,85	3,55	4,75	2,75	3,42
4	6,03	10,63	3,10	3,85	2,42	2,90
5	4,93	7,50	2,82	3,45	2,30	2,72
6	4,40	6,40	2,65	3,20	2,25	2,60
7	3,97	5,70	2,55	3,12	2,18	2,52
8	3,87	5,13	2,52	3,00	2,18	2,47
9	3,67	5,00	2,50	2,90	2,15	2,40
10	3,52	4,68	2,47	2,85	2,13	2,42
15	3,22	4,00	2,38	2,70	2,08	2,33
20	3,10	3,75	2,33	2,62	2,05	2,28

На рис. 5 приведены графики SOM критерия Кохрена для значений мощности критерия 0,99 и 0,95, соответствующих значениям доверительной вероятности, для которых рассчитаны таблицы, приведенные в [3].

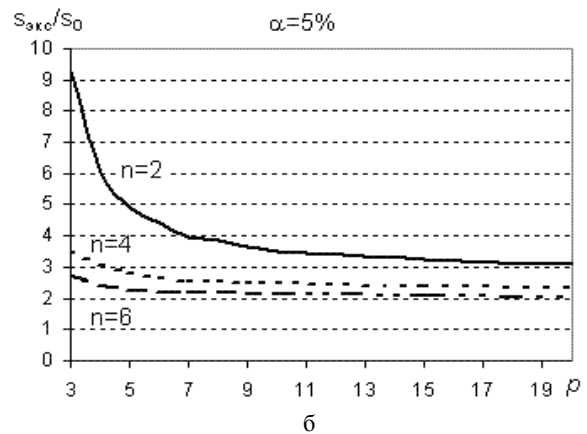
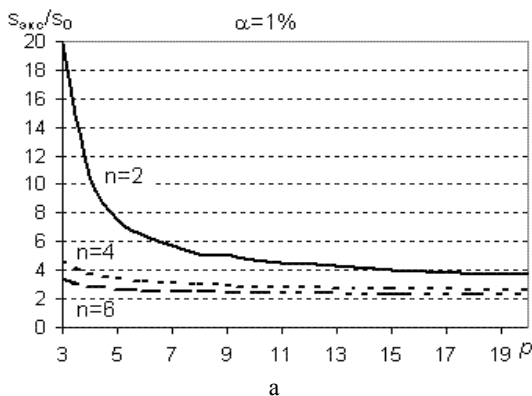


Рис. 5. Графики SOM критерия Кохрена для доверительной вероятности: а – 0,99; б – 0,95

Выводы

Проведенные исследования показали, что при использовании критерия Кохрена для анализа данных межлабораторных сличений, необходимая достоверность получаемых результатов может быть достигнута только при соответствующей корректировке количества лабораторий, участвующих в сличениях и количества результатов измерений, получаемых от лабораторий.

Минимальное значение СКО статистического выброса, которое может быть зафиксировано данным критерием при ограниченном количестве данных, в 2 раза превышает среднее по совокупности СКО. Корректировку наиболее удобно проводить, используя предложенные в статье статистические оценки мощности критерия.

Список литературы

1. ДСТУ/ISO 17025-2001. Державний стандарт України. Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій.
2. ГОСТ ИСО \МЭК 43-1-2004 Проверка лабораторий на качество проведения испытаний посредством межлабораторных сличений. Ч. 1. Разработка и реализация программ проверки на качество проведения испытаний.
3. ИСО\МЭК 5725-1-2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений” Часть 2. Основной метод определения повторяемости и воспроизводимости стандартного метода измерений.
4. Еременко В.С., Куц Ю.В., Мокийчук В.М. Оценка однородности выборок малого объема // Системы обработки информации. – X: ХУ ПС, 2006. – Вып. 7 (56). – С. 26-29.
5. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.

Поступила в редколлегию 23.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, доц. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков.