

## ВЕЙВЛЕТ ОБРАБОТКА ФРАКТАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

*Рассмотрен новый вид вейвлетов – фрактальный вейвлет, базирующийся на гиперболической зависимости его параметров. Проведено численное моделирование фрактального вейвлета, которое позволило выяснить структуру и механизм его построения. На основе полученного фрактального вейвлета, проведена обработка фрактального сигнала.*

*фрактальный сигнал, вейвлет-преобразование, фрактальный вейвлет*

### Введение

#### Постановка проблемы и анализ литературы.

Современный этап развития радиотехнических систем (радиолокационных комплексов, систем передачи информации и др.) характеризуется усиленной разработкой и широким применением сложных (широкополосных) сигналов, к числу которых относится класс хаотических сигналов [1]. В этом классе особое место занимают фрактальные сигналы (ФС), которые имеют свои специфические особенности по сравнению с классическими ЧМ, ФМ колебаниями, а также сигналами типа М-последовательностей [2]. Как правило, в задачах обнаружения и распознавания ФС первым этапом анализа является определение особенностей, которые характеризуют такой сигнал. В связи со спецификой генерации и формирования ФС [2] возникает необходимость поиска новых методов анализа и обработки таких сигналов, позволяющих оценивать специфические параметры ФС, к которым относятся, в частности, степень хаотичности, а также фрактальная размерность.

Анализ многочисленных работ [3 – 8] показывает, что в настоящее время вейвлеты успешно применяются для решения широкого круга задач в столь различных областях, как например, телекоммуникации, компьютерная графика и биология. Кроме того, вейвлеты начинают широко использоваться в задачах распознавания образов, при обработке и синтезе различных сигналов, например, речевых, при анализе изображений самой различной природы, для изучения свойств турбулентных полей, для свертки (упаковки) больших объемов информации. Однако возможности использования вейвлет преобразования для обработки и распознавания сигналов на основе анализа их параметров и характеристик исследованы еще недостаточно. Об этом свидетельствует сравнительно небольшое число работ, в частности [4, 5], посвященных рассмотрению этих вопросов. Поэтому представляет практический интерес рассмотрение вейвлет обработки фрактальных сигналов.

**Цель статьи:** рассмотреть новый вид вейвлетов – фрактальный вейвлет, а также результаты его численного моделирования. На основе полученного фрактального вейвлета, провести обработку фрактального сигнала.

### Фрактальный сигнал и вейвлет-преобразование

В основе формирования структуры фрактального сигнала лежит гипотеза самоподобия, допускающая бесконечную серию вложения друг в друга одинаковых (гомеоморфных) объектов. При этом объект уменьшается только в размере, но остается гомеоморфным исходному объекту. При формировании фрактального сигнала под такими объектами следует понимать отдельные детерминированные колебания (например, простые (гармонические) сигналы, а также сигналы с угловой модуляцией) гомеоморфные опорному (базовому) колебанию [2]. Как показано в [9], фрактальная размерность напрямую связана с показателями Гельдера, которые в свою очередь определяются с помощью вейвлетов [4]. Такая взаимосвязь наводит на мысль о возможности анализа основных параметров фрактальных сигналов с помощью вейвлет-преобразования (ВП). Под анализом сигнала имеется в виду не только его чисто математическое преобразование (в частности, ВП), но и получение на основе этого преобразования выводов о специфике соответствующего сигнала (процесса) или объекта.

Суть вейвлет-преобразования одномерного сигнала состоит в его разложении по базисной солитоноподобной функции (вейвлету) посредством масштабных изменений и переносов. Элементом базиса ВП является хорошо локализованная функция, быстро стремящаяся к нулю вне небольшого интервала, что позволяет провести локализованный анализ сигнала. Иными словами, ВП автоматически обладает подвижным частотно-временным окном, узким на малых масштабах и широким на больших.

В [3] рассматривается базис функционального пространства  $L^2(R)$ , построенный с помощью не-

прерывных масштабных преобразований и переносов вейвлета  $\psi(t)$  с произвольными значениями базисных параметров – масштабного коэффициента  $a$  и параметра сдвига  $b$

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-0,5} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1)$$

На основе рассмотренного базиса запишем интегральное ВП

$$W(a, b) = |a|^{-0,5} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int f(t) \psi_{ab}^*(t) dt. \quad (2)$$

Из (2) следует, что каждая функция из  $L^2(\mathbb{R})$  может быть получена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета, т.е. является композицией "вейвлетных волн" с коэффициентами, зависящими от номера волны (частоты, масштаба) и от параметра сдвига (времени). Таким образом, каждая из функций этого базиса характеризуется как определенную частоту сигнала, так и ее локализацию во времени [3,4].

При применении вейвлетов для анализа сигналов непрерывное ВП (2) более удобно [3]. Его некоторая избыточность, связанная с непрерывным изменением масштабного коэффициента  $a$  и параметра сдвига  $b$ , становится здесь положительным качеством, так как позволяет более полно и четко представить и проанализировать содержащуюся в сигнале информацию.

Выбор вида огибающей вейвлета для проведения анализа исследуемого сигнала является важнейшей операцией при выполнении вейвлет-преобразования. Основным критерий выбора заключается в том, что вид вейвлета должен быть похожим на вид анализируемого сигнала. Неудачный выбор конкретной формы вейвлета может привести к неверным результатам анализа сигнала. Поэтому для обработки фрактальных сигналов необходима разработка фрактального вейвлета.

### Фрактальный вейвлет

Известно [2], что наряду с дробной размерностью, особенностью ФС является гиперболическая зависимость его параметров, а также самоподобие, которое определяется коэффициентом подобия  $k$ . По аналогии с ФС введем понятие фрактального вейвлета (ФВ). Под ФВ будем понимать вейвлет, у которого масштаб  $a$  и параметр сдвига  $b$  связаны гиперболической зависимостью, определяемой коэффициентом  $k$ . Рассмотрим построение ФВ на основе вейвлета "мексиканская шляпа", воспользовавшись выражением

$$\psi(t, a, b) = \left[ \left( \frac{t-b}{a} \right)^2 - 1 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-b}{a} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

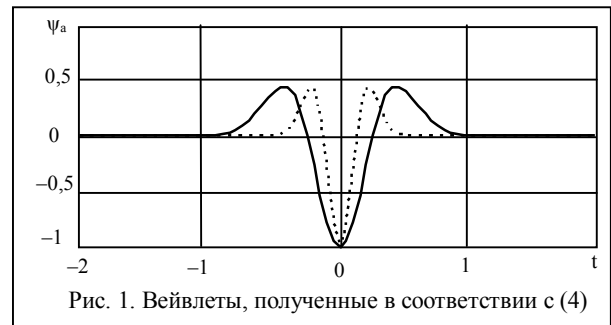
Проанализируем поведение вейвлета, описываемого выражением (3), при условии, что  $b = 0$  и,

разделив масштаб  $a$  на коэффициент  $k^n$ , где  $n$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots, N-1$ . При этих условиях (3) приводится к виду

$$\psi_a(t, a, b) = \sum_{n=0}^N \left[ \left( \frac{t \cdot k^n}{a} \right)^2 - 1 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t \cdot k^n}{a} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

В этом случае масштабный коэффициент  $a$  уменьшается (сжимается) по линейному закону.

На рис. 1 показаны вейвлеты, полученные в соответствии с (4) при условии  $a = 0,25$ ,  $k = 2$  и  $n = 0$  (сплошная кривая),  $n = 1$  (штриховая кривая).



При увеличении  $n$  величина масштаба  $a/k^n$  уменьшается, что приводит к сужению основного лепестка составляющего вейвлета ( $n = 1$ ) относительно опорного ( $n = 0$ ). Другими словами, составляющий вейвлет вкладывается в опорный.

Рассмотрим поведение вейвлета при фиксированном значении масштаба ( $a = 1 = \text{const}$ ) и при изменении сдвига  $b$  в зависимости от значения  $k^n$  в соответствии с выражением

$$\psi_b(t, a, b) = \sum_{n=0}^N \left[ \left( \frac{t-b \cdot k^n}{a} \right)^2 - 1 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-b \cdot k^n}{a} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

В этом случае при фиксированном  $a$  сдвиг вейвлета возрастает (растягивается) по закону изменения  $k^n$ . На рис. 2, а и б показан сдвиг вейвлета при  $b = 1,5$ ;  $k = 2$  при  $n = 1$  и  $n = 2$  соответственно.

Анализ рис. 2, а показывает, что при  $n = 1$  результирующий вейвлет складывается из двух составляющих вейвлетов, при чем правый вейвлет сдвинут относительно нулевой точки на  $2b$ , а левый – на величину  $b$ . При  $n = 2$  результирующий вейвлет состоит из трех составляющих вейвлетов, при этом правый вейвлет сдвинут относительно левого на  $4b$  (рис. 2, б). Поскольку масштаб  $a = \text{const}$ , то при сдвиге форма составляющих вейвлетов не изменяется.

Из анализа выражений (4) и (5) следует, что между масштабом  $a$  и параметром сдвига  $b$  через коэффициент  $k^n$  существует гиперболическая зависимость характерная для фрактальных структур.

Исходя из (4) и (5), запишем математическое выражение для фрактального вейвлета

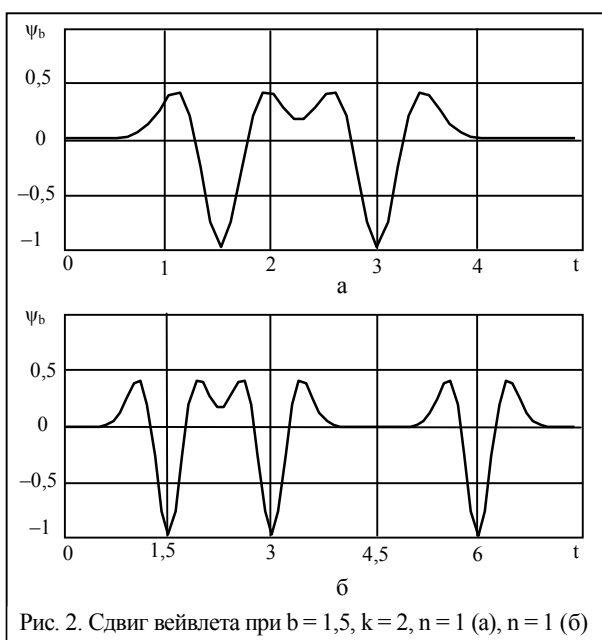


Рис. 2. Сдвиг вейвлета при  $b = 1,5, k = 2, n = 1$  (а),  $n = 1$  (б)

$$\Psi_{ab}(t,a,b) = \sum_{n=0}^N \left[ \left( \frac{t-b \cdot k^n}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 - 1 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-b \cdot k^n}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Рассмотрим ФВ при следующих условиях:  $a = 0,25, b = 1,5, k = 2, N = 2$  ( $n = 0, 1, 2$ ).

На рис. 3 показан интегральный ФВ, состоящий из трех отдельных (составляющих) вейвлетов.

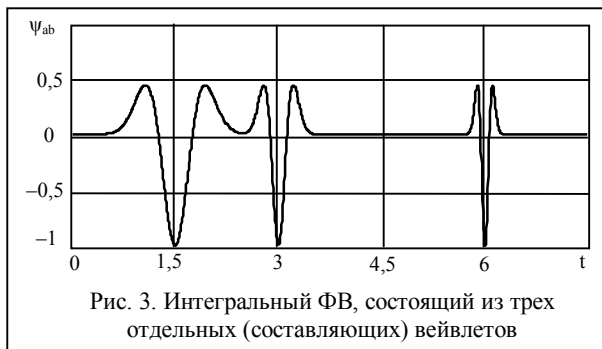


Рис. 3. Интегральный ФВ, состоящий из трех отдельных (составляющих) вейвлетов

Также как и для ФС, вейвлет при  $n = 0$  будем называть опорным (нулевым), остальные – гомеоморфными. В соответствии с (6) составляющие вейвлеты, формирующие ФВ, сдвигаются с одновременным увеличением (растяжением) расстояния относительно друг друга по линейному закону. На рис. 3 видно, что в то же время гомеоморфные вейвлеты сжимаются по длительности в зависимости от значения коэффициента подобия  $k$ . Следует отметить, что составляющие вейвлеты нормированы к уровню основного вейвлета. Нормировка уровней вейвлетов осуществляется в соответствии с амплитудами составляющих ФС согласно выражения

$$\Psi_b(t,a,b) = \sum_{n=0}^N \left[ \left( \frac{t-b \cdot k^n}{a} \right)^2 - 1 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-b \cdot k^n}{a} \right)^2 \right] \frac{U_0}{k^n}. \quad (7)$$

На рис. 4 показано расположение ФВ (7) на фоне фрактального сигнала.

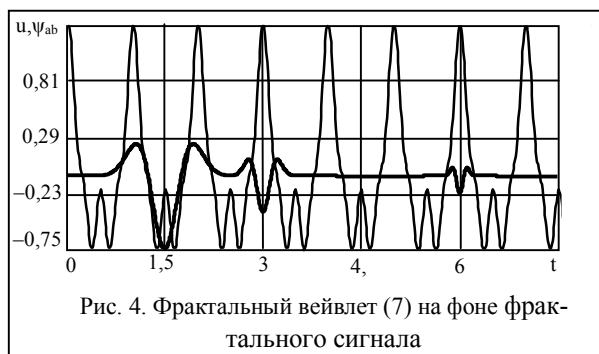


Рис. 4. Фрактальный вейвлет (7) на фоне фрактального сигнала

На рис. 4 видно, что опорный вейвлет ФВ нормирован к амплитуде нулевой составляющей ФС. В этом случае нормировка приводит к полному наложению опорного вейвлета на отрицательный полупериод нулевой составляющей ФС. Аналогично нормированные первая и вторая составляющие ФВ совпадают соответственно с первым и вторым гомеоморфным колебанием ФС.

### Вейвлет обработка фрактальных сигналов

Для обработки ФС сформируем ФВ на основе гиперболической зависимости между масштабным коэффициентом  $a$  и амплитудой вейвлета  $U_0$ . Такая зависимость приводит к масштабной инвариантности сигналов, в рассматриваемом случае составляющих вейвлетов, участвующих в формировании ФВ.

Рассмотрим вейвлет обработку на примере ФС и ФВ, полученных на основе нулевых и первых гомеоморфных составляющих сигнала и вейвлета. Для этого случая математические выражения для фрактального сигнала и вейвлета представляются в виде

$$u(t) = \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} \cos(2\pi \cdot f \cdot k^n \cdot t); \quad (8)$$

$$\Psi(t,b) = \sum_{n=0}^N -1 \left[ \left( \frac{t-b}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 - 1 \right] \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-b}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 \right] \frac{U_0}{k^n}, \quad (9)$$

где  $N = 1; k = 2; a = 0,25; U_0 = 0,75; b = -2; -1,99, \dots; 2$ .

В выражении (9) значение  $-1$  позволяет провести инверсию ФВ.

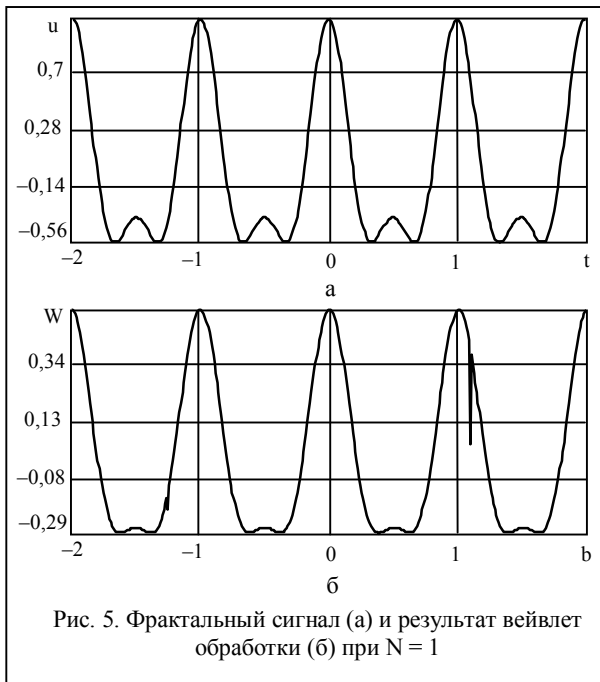
Вейвлет обработка сводится к вычислению скалярного произведения сигнала и вейвлета с последующим интегрированием этого произведения

$$W(t,b) = \int u(t) \cdot \Psi(t,b) dt. \quad (10)$$

На рис. 5, а и б показан ФС и результат вейвлет обработки в соответствии с выражением (10).

Сравнительный анализ показывает, что в данном случае в результате вейвлет обработки осуществляется качественное выделение ФС на выходе вейвлет фильтра, позволяющее достаточно эффективно проанализировать локальные участки ФС.

Рассмотрим возможности вейвлет обработки аддитивной смеси фрактального сигнала и шума. Вейвлет обработка сводится к непрерывному вейвлет



преобразованию, которое представляет собой скалярное произведение аддитивной смеси фрактального сигнала и шума и базисных функций (вейвлетов)

$$u_{\text{вых}} = \sum_{m=1}^M u_m \cdot \Psi_{m,m1}, \quad (11)$$

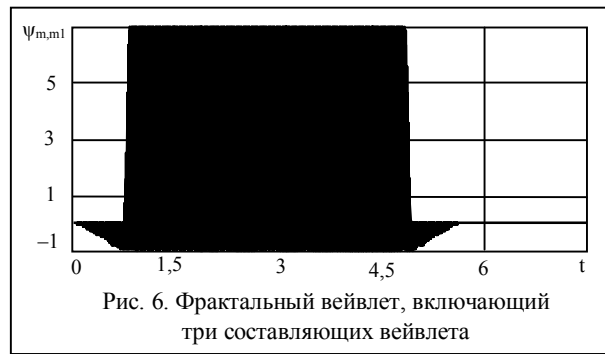
где  $u_{\text{вых}}$  – восстановленный в результате вейвлет обработки ФС; M – верхний предел суммирования, M = 500.

Проведем вейвлет обработку фрактального сигнала с использованием фрактального вейвлета

$$\Psi_{m,m1} = \sum_{n=0}^N -1 \cdot U \cdot k^n \left[ \left( \frac{t_m - b_{m1}}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 - 1 \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t_m - b_{m1}}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Вейвлет  $\Psi_{m,m1}$  получен при переменной  $t_m = m \cdot \Delta t$ , где  $m = 750$ ,  $\Delta t = 0,01$  – шаг переменной. Параметр сдвига  $b_{m1} = 0,85 + m1 \cdot \Delta b$  ( $m1 = 200$ ,  $\Delta b = 0,02$  – шаг переменной) позволяет получить совокупность вейвлетов сдвинутых с учетом шага 0,02. При  $a = 0,25$  вейвлет представляет собой полосовой фильтр, а за счет переменного параметра сдвига формируется набор (сумма, совокупность) этих фильтров (блок фильтров). Число фильтров можно изменять выбором шага переменной m1. В (12) гиперболическая зависимость имеет место между амплитудой U и масштабным коэффициентом a, N = 2 – максимальный номер составляющей ФС.

На рис. 6 показан фрактальный вейвлет, включающий три составляющих вейвлета ( $n = 0,1,2$ ), полученный в соответствии с выражением (12).



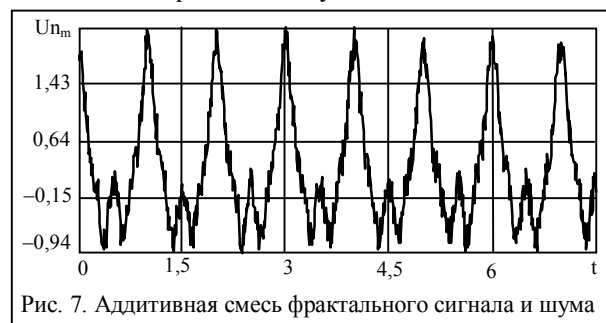
На рис. 6 просматриваются только общий контур набора вейвлетов, обусловленный малым шагом сдвига, и граничные вейвлеты.

Запишем выражения для аддитивной смеси фрактального сигнала и шума в виде

$$U_n m = u_m + n_m = \left[ \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} \cos(2\pi \cdot f \cdot k^n \cdot t_m) \right] + \text{rnd}(0,05), \quad (13)$$

где  $\text{rnd}(0,05)$  – встроенная функция программы Mathcad, которая генерирует случайные числа, распределенные по равномерному закону Модель шума).

На рис. 7 показана аддитивная смесь фрактального сигнала при N = 2 и шума.



Вейвлет обработка фрактального сигнала осуществляется согласно выражению

$$W_m = \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} \cos(2\pi \cdot f \cdot k^n \cdot t_m) \right] + \text{rnd}(0,5) \times \sum_{n=0}^N -1 \cdot U \cdot k^n \left[ \left( \frac{t_m - b_{m1}}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 - 1 \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t_m - b_{m1}}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (14)$$

где  $W_m$  – сигнал на выходе фрактального вейвлет фильтра.

Фрактальный сигнал на выходе фрактального вейвлет фильтра, полученный с использованием выражения (14) представлен на рис. 8. Сравнение рис. 7 и рис. 8 показывает, что при фрактальной вейвлет обработке происходит сглаживание шума и эффективное выделение ФС. Другими словами, фрактальная вейвлет обработка позволяет разделить ФС и шум, почти не искажая форму сигнала.

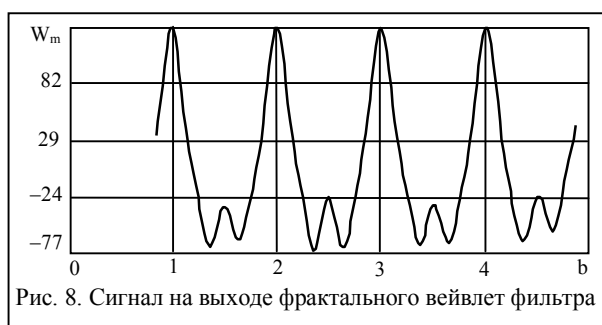


Рис. 8. Сигнал на выходе фрактального вейвлет-фильтра

Для ФС последнее имеет первостепенное значение, что связано с требованием высокой точности оценки фрактальной размерности сигнала.

Таким образом, проведенные исследования, на основе моделирования, показали, что разработанный фрактальный вейвлет, реализованный на основе локализованной базисной функции типа "мексиканская шляпа", позволяет выделять ФС при вейвлет-обработке. Это обусловлено тем, что имеется сходство физических параметров исследуемого ФС с базисными функциями фрактального вейвлет-преобразования. Поэтому представляется целесообразным использование фрактальных вейвлетов при обработке фрактальных сигналов.

### Выводы

1. Для выделения фрактального сигнала разработан фрактальный вейвлет, базирующийся на гиперболической зависимости (связи) его параметров, которая является определяющим свойством фрактальных структур.

2. Вейвлет-обработка фрактальных сигналов позволяет эффективно проводить визуальный анализ структуры сигналов в целом, а также их локаль-

ных участков (областей) с целью выявления искажения сигнала.

3. При вейвлет-обработке фрактальных сигналов происходит сглаживание шума и эффективное выделение сигнала.

4. Целесообразно рассмотреть возможность синтеза структурных схем вейвлет-обработки фрактальных сигналов.

### Список литературы

1. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 312 с.
2. Пащенко Р.Э. Основы теории формирования фрактальных сигналов. — Х.: ХООО НЭО "ЭкоПерспектива", 2005. — 296 с.
3. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. — 1996. — № 11. — С. 1145-1170.
4. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // УФН. — 2001. — № 5. — С. 465-501.
5. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. — С.-Пб.: ООО МОДУС+, 1999. — 152 с.
6. Ламброу Т., Линней А. Применение вейвлет-преобразования к обработке медицинских сигналов и изображений // Компьютера. — 1998. — № 8. — С. 50, 51.
7. Переберин А.В. Вейвлеты в компьютерной графике // Компьютера. — 1998. — № 8. — С. 52, 53.
8. Лобур М.В., Лисак Ю.В. Використання пакетних вейвлетів для визначення ознак розпізнавання мовних сигналів // Збірник наукових праць ІПМЕ НАН України. — К.: ІПМЕ, 2005. — Вип. 315. — С. 41–46.
9. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

Поступила в редколлегию 19.04.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.Д. Карлов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.