

УДК 621.391.037.372

С.Г. Рассомахин

Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков

ОДНОМЕРНЫЕ КОДОВО-СИГНАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ НА ОСНОВЕ НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Предложен способ преобразования последовательностей стационарных эргодических источников, приводящий к построению кодов с неравновероятными кодовыми словами. На основе введения минимальной избыточности получены конструкции, позволяющие при использовании простейших одномерных сигналов получить приращение энергетической эффективности систем передачи информации (СПИ). Проведено сравнение разработанных конструкций с известными методами снижения удельных затрат по показателям частотной и энергетической эффективности.

одномерные кодово-сигнальные конструкции, нормализующее преобразование двоичных последовательностей

Введение

Построение сигнально-кодовых конструкций, позволяющих объединить преимущества переборных алгоритмов обработки многоосновных сигналов с простыми алгоритмами декодирования помехоустойчивых кодов, является объектом пристального внимания в теоретических исследованиях последних лет. Это объяснимо с позиций поиска новых возможностей приближения характеристик систем передачи информации к предельной пропускной способности для более интенсивного использования ограниченного физического ресурса каналов связи. Грамотное сочетание сигналов и кодов в единой конструкции позволяет получать методы передачи, близкие к оптимальным, при разумной сложности алгоритмов обработки.

Анализ литературы. Идеи совместного использования методов обработки сложных сигналов и помехоустойчивых кодов возникли синхронно с широким внедрением в практику построения СПИ модуляторов многомерных многоосновных сигналов [1, 2]. Как известно, переход к многоосновным ансамблям позволяет существенно повысить частотную эффективность СПИ за счет возрастания скорости передачи в фиксированной полосе частот. Однако весьма существенной платой за это является значительное снижение помехоустойчивости, приводящее к потере энергетической эффективности. Поэтому основным направлением реализации кодово-сигнальных конструкций (КСК) является первоначальный выбор частотно-эффективных наборов сигналов с последующим разбиением их на вложенные ансамбли меньшей размерности, позволяющие осуществить сигнально-решетчатой кодирование с использованием блоковых и сверточных кодов [1,2]. Получаемые при этом конструкции, как правило,

характеризуются относительно высокими показателями частотной эффективности при посредственных (зачастую хуже, чем у обычной фазовой манипуляции ФМ-4) энергетических показателях.

Целью статьи является демонстрация работоспособности идей КСК для оптимизации одномерных ансамблей по показателю энергетической эффективности. При этом получаемые конструкции близки по характеристикам к ансамблям биортогональных сигналов, но обеспечивают существенно лучшую полосную эффективность.

Основная часть

Для построения конструкций исходной является последовательность независимых равновероятных символов стационарного двоичного эргодического источника, которая разбивается на блоки длиной N бит: $\vec{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Каждый из блоков может дополняться r проверочными символами, что приводит к получению кодового слова избыточного блокового (n, N) – кода: $\vec{b} = \{b_0, b_1, \dots, b_{N-1}, \dots, b_{n-1}\}$, где $r = n - N$ – число избыточных символов, а $R = \frac{N}{n}$ – скорость кода. При этом полная длина блока должна удовлетворять условию

$$n = 2^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Вновь образованные блоки подвергаются нормализующему числовому преобразованию, суть которого заключается в выполнении следующих двух операций.

1. Значения бит, трактующиеся как обычные целые числа (0 или 1), центрируются относительно нуля числовой оси:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \bar{b} - 0,5 = \\ &= \{b_0 - 0,5, b_1 - 0,5, \dots, b_{N-1} - 0,5, \dots, b_{n-1} - 0,5\}. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Полученная последовательность, каждый элемент которой может принимать значения $\pm 0,5$, заменяется эквивалентной последовательностью действительных целых чисел, формируемой по правилу

$$\bar{z} = A_n \cdot \bar{y}, \quad (3)$$

где A_n – матрица Адамара размером $n \times n$, получаемая с использованием известного рекуррентного правила

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \dots A_n = \begin{bmatrix} A_{\frac{n}{2}} & A_{\frac{n}{2}} \\ A_{\frac{n}{2}} & -A_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Несмотря на дробные значения элементов вектора \bar{y} , получаемый на основании (3) с учетом условия (1) вектор \bar{z} содержит только целые числа, расположенные симметрично относительно нуля в диапазоне $\left[-\frac{n}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{n}{2}\right]$. Если положить, что $n = N$ (избыточность не вносится), то при равной вероятности появления всех $2^N = 2^n$ комбинаций на выходе источника (на входе преобразования (2)), вероятности появления различных чисел из разрешенного диапазона в составе вектора \bar{z} будут различными.

Проведем анализ функции $Q(z)$ – распределения вероятностей появления различных кодовых слов (чисел) в составе вектора канального кода \bar{z} при исходном предположении о равной вероятности всех слов источника. Каждый из элементов последовательности \bar{z} образуется суммой n равномерно отстоящих от нуля чисел, принимающих с равной вероятностью значения $\pm 0,5$. В этих условиях вероятность появления любого числа из диапазона $-\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ в составе вектора \bar{z} может быть отождествлена с частотью

$$Q(z_i) = \frac{M(z_i)}{n \cdot 2^n}, \quad (5)$$

где $M(z_i)$ – количество элементов некоторого вектора \bar{V} , принимающих значение z_i , при этом сам вектор \bar{V} содержит $n \cdot 2^n$ элементов, вычисляемых по правилу

$$\underbrace{\sum_{i_0=0}^1 \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_{n-1}=0}^1}_{n} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(i_j - \frac{1}{2} \right) \right] \in \bar{V}. \quad (6)$$

Учитывая рекуррентный характер вычислений частотей (5), (6), на основании обобщения свойств

кодов различной длины можно предложить следующий вычислительный алгоритм. Распределение вероятностей появления кодовых слов (чисел) для кода, образованного из n бит, может быть вычислено суммированием двух вероятностей соответствующих распределений кода, построенного из $n-1$ двоичных символов. Причем, при суммировании вероятности располагаются со сдвигом на одну позицию. Математическая запись алгоритма имеет вид

$$Q_n(z_i) = \sum_{j=0}^1 2^{-1} \cdot Q_{i-j}(1, n-1), \quad i = \overline{0, n}, \quad (7)$$

причем

$$Q_2(z_i) = \begin{cases} \frac{(i+1)}{2^2} & \text{при } i = 0, 1; \\ \frac{2^2 - (i+1)}{2^2} & \text{при } i = 2. \end{cases}$$

Приведенные формулы достаточно важны для оценки распределения вероятностей позиционного кода при оптимизации ансамблей сигналов, особенно при определении вероятностей появления "нетипичных" чисел, расположенных на краях диапазона кода. Хотя при больших значениях n подобное точное вычисление распределения $Q(z)$ затруднено, ввиду большой размерности вектора \bar{V} и рекуррентного характера формул (6), (7). Поэтому для приближенных оценок можно воспользоваться следствием классической предельной теоремы – теоремой Ляпунова [5], которая утверждает, что если случайные величины y_0, y_1, \dots, y_{n-1} одинаково распределены, имеют нулевое математическое ожидание $M[y] = 0$ и конечную, отличную от нуля дисперсию $D[y]$, то при $n \rightarrow \infty$ равномерно по χ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{\sqrt{n \cdot D[y]}} \sum_{i=0}^{n-1} y_i < \chi \right\} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\chi} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta.$$

Следовательно, дискретный характер величин y_i позволяет использовать для нахождения приближенной оценки $Q'(z)$ усеченный дискретный нормальный закон распределения

$$\begin{aligned} Q'(z_i) &= P \left\{ \left(i - \frac{n}{2} - 0,5 \right) < z_i < \left(i - \frac{n}{2} + 0,5 \right) \right\} = \\ &= \frac{c}{\sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{i - \frac{n}{2} - 0,5}^{i - \frac{n}{2} + 0,5} \exp \left(-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

где c – коэффициент "усечения", который определяется из выражения

$$c = \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^n \exp \left(-\frac{\left(\eta - \frac{n}{2} \right)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) d\eta \right]^{-1},$$

а σ^2 – дисперсия суммы независимых целочисленных, равномерно распределенных случайных величин y_i , которая, как следует из (2), составляет $\sigma^2 \approx n/12$. Анализ распределения вероятностей кодовых слов позволяет сделать важный вывод о том, что при равновероятных сообщениях источника a_i кодовые слова (представленные числами натурального ряда) канального кода являются не равновероятными, причем распределение вероятностей их появления асимптотически подчинено дискретному нормальному закону.

Рассмотрим построение кодово-сигнальной конструкции на основе нормализованного позиционного кода и одномерной многоуровневой амплитудной манипуляции. Пусть задано распределение вероятностей $Q(z_i)$, характеризующее появления целых чисел z_i на выходе дискретного источника, генерирующего позиционный код, где $i = 0, \dots, n$. Модель одномерных АФМ сигналов для представления чисел z_i в канале имеет вид:

$$s_i(t) = c_i \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_i), \quad t \in \overline{0, T}, \quad (9)$$

где $c_i \geq 0$ – амплитуда; ω_0 – несущая частота (для удобства положим ее величину кратной 2π); T – длительность интервала модуляции; φ_i – начальная фаза i -го сигнала, причем $\varphi_i = \pi$ для сигналов с номерами $i = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ и $\varphi_i = 0$ для

$i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$. Сигнальные точки ансамбля (9) расположены на прямой линии в гильбертовом пространстве. Учитывая нормальный закон распределения чисел $Q(z_i)$ с нулевым математическим ожиданием (8), целесообразно для минимизации средней мощности (энергии), затрачиваемой на передачу, априорно положить амплитуду сигнала, соответствующего наиболее вероятному значению z_i , равной нулю: $c_{n/2} = 0$. При этом из условия обеспечения средней мощности АФМ сигналов, равной соответствующей мощности при использовании традиционной фазовой манипуляции ФМ-2, значения амплитудных коэффициентов для передачи чисел позиционного кода определяются по правилу

$$c_i = \left(i - \frac{n}{2}\right) \sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{\sum_{j=0}^n P(c_j) \cdot \left(j - \frac{n}{2}\right)^2}}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (10)$$

где $P(c_j) = Q(z_j)$, $j = \overline{0, n}$ – вероятности появления соответствующих чисел (значений амплитуды);

$$E_b = \int_0^T (\sin(\omega_0 \cdot t))^2 dt = \frac{T}{2} \text{ – нормированная энергия,}$$

затрачиваемая на передачу одного бита при ФМ-2 (для упрощения выкладок в дальнейшем будем полагать $T = 1$). Выполнение (10) обеспечивает равные энергетические условия передачи для рассматриваемых сигналов АФМ и эталонного прототипа ФМ-2, которые достигаются благодаря нормализующему числовому преобразованию представления выхода двоичного источника:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n P(c_i) \cdot (c_i)^2 = E_b. \quad (11)$$

Известно [1 – 4], что обработка "в целом" при приеме кодово-сигнальных конструкций (КСК) обладает преимуществом по сравнению с поэлементным приемом с точки зрения минимизации вероятности ошибки. Поэтому правилом принятия решения при оценке принятой КСК и, соответственно, последовательности из N двоичных символов, будет являться выбор той последовательности, которой соответствует минимальное евклидово расстояние между принятым и эталонным вектором:

$$\left| \vec{S}^* - \vec{S}_i \right| < \left| \vec{S}^* - \vec{S}_j \right|, \quad j = \overline{0, 2^n - 1}, \quad j \neq i, \quad (12)$$

где $\vec{S}^* = \{(s_0 + \xi_0), \dots, (s_{n-1} + \xi_{n-1})\}$ – измерение КСК на выходе канала; ξ_0, \dots, ξ_{n-1} – элементы вектора АБГШ; \vec{S}_i, \vec{S}_j – векторы эталонных КСК.

При использовании решающего правила (12) для обработки безыбыточных КСК достигаемая помехоустойчивость в гауссовом канале будет такой же, как при оптимальном поэлементном приеме равномоощных противоположных сигналов, использующих ФМ-2. Это следует из того, что разность между соседними значениями амплитудных коэффициентов $\Delta c = c_{i+1} - c_i$, $i = \overline{0, n-1}$, благодаря выполнению (10) и свойствам распределения $P(c_j)$, удовлетворяет равенству

$$\Delta c = \sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{\sum_{j=0}^n P(c_j) \cdot \left(j - \frac{n}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{E_\xi}{n}}, \quad (13)$$

где $E_\xi = \int_0^1 [2 \cdot \sin(\omega_0 t)]^2 dt$ – нормированный на единичную длительность сигналов квадрат расстояния между сигнальными точками ФМ-2 в пространстве Гилберта, определяющий энергию "опасной" помехи. При $\gamma > 0$ ($N < n$, $R < 1$) следует ожидать приращения энергетической эффективности КСК АФМ за счет незначительного снижения скорости передачи. Помехоустойчивый код, используемый для построения избыточных КСК, может быть, в принципе, любым. Желательным свойством кода, естественно, является максимальная скорость при обеспечении наибольшего возможного кодового

расстояния. Покажем это на некоторых примерах, продемонстрировав преимущества КСК АФМ.

А. Кодово-сигнальная конструкция (1-3)-(4-3). Конструкция основана на выполнении нормализующего преобразования (2), (3) над блоком из трех

информационных и одного избыточного символов ($r=1$ – код с проверкой на четность). Табл. 1 содержит полный перечень кодовых слов и их нормализованных отображений для всех возможных последовательностей из четырех бит.

Таблица 1

Перечень кодовых слов и их нормализованных отображений

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_i	a_0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	a_1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
	a_2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
	a_3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
z_i	z_0	-2	-1	-1	0	-1	0	0	1	-1	0	0	1	0	1	2
	z_1	0	-1	1	0	-1	-2	0	-1	1	0	2	1	0	-1	0
	z_2	0	-1	-1	-2	1	0	0	-1	1	0	0	-1	2	1	0
	z_3	0	1	-1	0	-1	0	-2	-1	1	2	0	1	0	1	-1

Четному или нечетному количеству единичных символов в исходных последовательностях соответствуют четные или нечетные числа в составе отображений. Следовательно, использование только половины последовательностей (например, № 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15) приведет к двукратному увеличению расстояния между используемыми уровнями амплитудной модуляции при передаче чисел позиционного кода. Такой код обладает скоростью $R=3/4$, а обеспечиваемое кодовое расстояние $d=2$ трансформируется в двукратное увеличение расстояния между сигнальными точками ансамбля. Корреляционная матрица КСК

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

полностью соответствует ансамблю биортогональных сигналов с мощностью $M=8$. Поэтому для метода приема "в целом" существует аналитическая оценка вероятности ошибки на бит, определяемая выражениями [3, 4]

$$P_b = P_1 + \frac{1}{2} P_2, \tag{14}$$

где

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-h} \frac{\exp(-v^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{v+h}^{-(v+h)} \frac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dz \right]^{\frac{M}{2}-1} dv;$$

$$P_2 = 1 - P_1 - \int_{-h}^{\infty} \frac{\exp(-v^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-(v+h)}^{v+h} \frac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dz \right]^{\frac{M}{2}-1} dv;$$

$$h = \sqrt{\frac{2 \log(M) E_b}{N_0/2}},$$

N_0 – спектральная плотность мощности АБГШ, равная сумме двух квадратурных составляющих спектра шума на 1 Гц полосы. Выражения (14) учитывают снижение энергетике на бит, которое является следствием передачи дополнительного символа проверки на четность. Зависимость P_b от отношения сигнал/шум представлена на рис. 1 (кривая 1). Энергетический выигрыш КСК (1-3)-(4-3) по сравнению с ФМ-2 ($P_b = 10^{-5}$) составляет ~1,3 дБ.

Путем проведения аналогичных преобразований может быть построена КСК (1-7)-(8-7). Ее основой является блок из семи символов, дополняемый битом проверки на четность. Используемый код при том же кодовом расстоянии $d=2$ обладает скоростью $R=7/8$, т. е. более эффективен в частотном плане. Корреляционная матрица КСК в этом случае кроме единичных и нулевых элементов содержит коэффициенты $\rho_{i,j} = \pm 0,5$, что означает взаимную зависимость отдельных сигналов, вызывающую снижение помехоустойчивости. Однако это снижение компенсируется повышением энергии, расходуемой на передачу бита, за счет приращения скорости кода при сохранении ограничения на среднюю мощность (10) на уровне аналогичной величины при ФМ-2. Так как точных аналитических выражений расчета вероятности ошибки на бит для случая вырожденной корреляционной матрицы ансамблей зависимых сигналов не существует, характеристика помехоустойчивости получена методом статистического моделирования. Полученные значения (показаны точками на рис. 1) демонстрируют результат, практически полностью совпадающий с помехоустойчивостью предыдущей конструкции.

Б. Кодово-сигнальная конструкция (1-11)-(16-11). Данная конструкция может быть получена на основе тех же самых преобразований при использовании блокового кода (16,11). При длине блока 16

символов, из которых 11 являются информационными и практически аналогичной скорости $R = 11/16$ код обеспечивает кодовое расстояние $d = 4$. Это приводит к четырехкратному увеличению расстояния между сигнальными точками ансамбля КСК. Корреляционная матрица КСК обладает размером 2048×2048 и содержит коэффициенты со значениями $\rho_{ij} = \pm 1; 0; \pm 0,5; \pm 0,25$, что свидетельствует о взаимной зависимости сигналов.

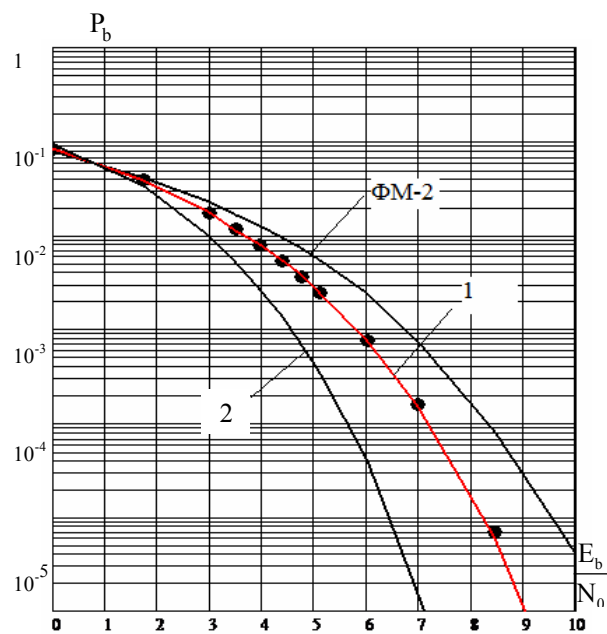


Рис. 1. Зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум

Методом моделирования получена зависимость P_b от отношения сигнал/шум (кривая 2 на рис. 1), которая показывает энергетический выигрыш по сравнению с ФМ-2 на уровне $P_b = 10^{-5}$, равный $\sim 3,2$ дБ.

В соответствии с описанными правилами может быть построена, в принципе, конструкция, эквивалентная блоку двоичных символов произвольной длины. При этом будет наблюдаться рост помехоустойчивости. Однако, ввиду экспоненциально возрастающей сложности переборного алгоритма при реализации приема "в целом", конструкции при исходной длине блоков $n \geq 16$ имеют скорее теоретический, чем практический интерес.

На рис. 2 иллюстрируется эффект, достигаемый при использовании рассмотренных КСК в сравнении с обычной модуляцией ФМ-4. Координатами диаграммы являются показатели энергетической $\beta = R / \left(\frac{E_b}{N_0} \right)$ и частотной $\gamma = R / \Delta f = R \cdot T$ эффективности конструкций, соответствующие показатели рассчитаны для $P_b = 10^{-5}$.

Выводы

КСК на основе нормализующего преобразования двоичных последовательностей и одномерных

β , дБ

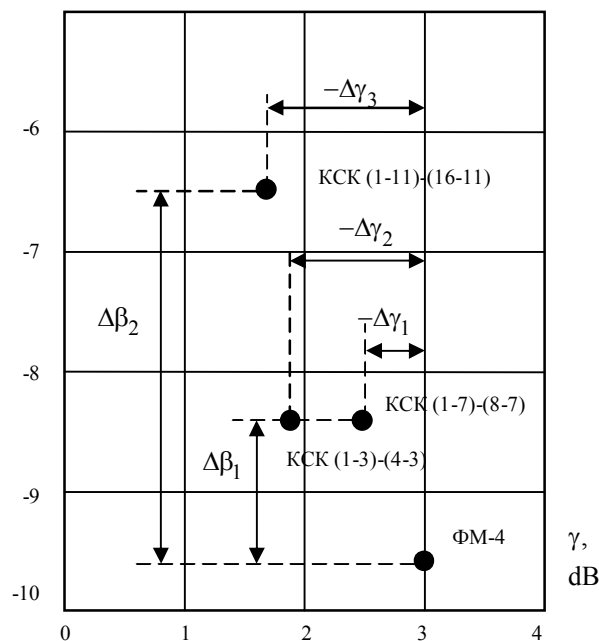


Рис. 2. Иллюстрация характеристик КСК на диаграмме эффективности

АФМ сигналов при незначительном (0,5 – 1,1 дБ) снижении частотной эффективности обеспечивают энергетический выигрыш, равный 1,3 – 3,2 дБ. Рассмотренные КСК обеспечивают преимущества по сравнению с ФМ-2 (ФМ-4), начиная с отношений сигнал/шум, равных ~ 1 дБ. Поэтому отличительной особенностью рассмотренных КСК является возможность их каскадного использования с любым методом блочного или сверточного кодирования, что обеспечивает увеличение энергетического выигрыша соответствующих кодов на указанные выше величины.

Список литературы

1. Вишневикий В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.
2. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А.Г. Зюко, А.И. Фалько, И.П. Панфилов, В.Л. Банкет, П.В. Иващенко; Под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
3. Цифровые методы в космической связи / Под ред. С. Голомба; Пер с англ. под ред. В.И. Шляпоберского. – М.: Связь, 1969. – 272 с.
4. Рассомахин С.Г., Ткаченко С.А. Оценка эффективности применения сигналов с фазово-частотной модуляцией // Зб. наук. праць ОНДІ ЗС. – Х.: ОНДІ ЗС, 2007. – Вип. 2 (7). – С. 137-151.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: ГИ ТТЛ, 1954. – 412 с.

Поступила в редколлегию 7.06.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.С. Сорока, Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков.