УДК 515.2

О.М. Ларін[1], В.С. Новіков[2]

[1]*Університет цивільного захисту України, Харків*
[2]*ЦП ГУ МНС України в Харківській області, Харків*

МОДЕЛЮВАННЯ КОНСЕРВАТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В МЕХАНІЦІ

Досліджено загальний випадок руху тіла масою m під дією двох сил – відновлюючої f (x) і демпфуючої g(x), коли у рівнянні руху зазначені сили будуть нелінійними.

консервативні динамічні системи, відновлюючи сила, демпфуюча сила

Вступ

Постановка проблеми. З практики добре відомо, що в будь-якій реальній динамічній системі енергія розсіюється. Розсіювання (*дисипація*) енергії звичайно відбувається в зв'язку з наявністю тієї або іншої форми (виду) тертя. Разом з тим у деяких конкретних випадках розсіювання енергії буває настільки повільним, що їм можна знехтувати, якщо обмежитися відносно нетривалим відрізком часу [1 – 4]. У таких випадках можна вважати, що при розгляді конкретної фізичної системи має місце закон збереження енергії. А саме: сума кінетичної і потенційної енергій постійна. Системи такого типу називають *консервативними* [1].

Аналіз відомих робіт. Найпростішим прикладом консервативної системи є система, що складається з тіла, яке здійснює горизонтальні рухи у вакуумі під дією двох пружин (рис. 1).

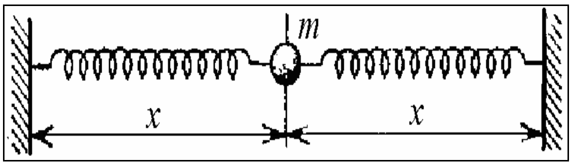


Рис. 1. Приклад коливальної консервативної системи

Якщо x позначає зсув тіла масою *m* зі стану рівноваги, а сила, з якою пружини діють на тіло (*відновлюючи сила*), пропорційна зсувові *x*, то рівняння руху має вигляд [1 – 4]

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0, \qquad k>0. \tag{1}$$

Пружини цього типу називаються *лінійними*, тому що їхня відновлюючи сила, є лінійною функцією *x*. Якщо тіло масою *m* рухається в середовищі з опором і опір (*демпфуюча сила*), що діє на це тіло, пропорційний швидкості руху, то рівняння руху неконсервативної системи буде

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0, \qquad c>0. \tag{2}$$

Тут ми маємо лінійне загасання, тому що демпфуюча сила являє собою лінійну функцію швидкості dx/dt. Якщо f i g є довільними функціями і такими, що f(0) = 0, g(0) = 0, то більш загальне рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+g\frac{dx}{dt}+f(x)=0 \tag{3}$$

можна інтерпретувати як рівняння руху тіла маси m під дією двох сил – відновлюючої f (x) і демпфуючої g(x).

Постановка завдання. Проаналізувати і унаочнити загальний випадок, коли у рівнянні (3) зазначені сили будуть нелінійними (це рівняння можна розглядати як основне рівняння нелінійної механіки).

Основна частина

Розглянемо спеціальний випадок нелінійної консервативної системи, що описується рівнянням

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0, \tag{4}$$

де демпфуюча сила дорівнює нулеві, що унеможливлює розсіювання енергії. Від рівняння (4) можна перейти до автономної системи виду

$$\frac{dx}{dt}=y; \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{f(x)}{m}. \tag{5}$$

Якщо тепер у системі (5) виключити час t, то одержимо диференціальне рівняння траєкторій системи на фазовій площині $\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)}{my}$. Останнє рівняння можна переписати так:

$$my\,dy=-f(x)dx. \tag{6}$$

Тоді, вважаючи, що x = x_0 при t = t_0 а y = y_0, після інтегрування рівняння (6) у межах від t_0 до t маємо тотожність $\frac{1}{2}my^2-\frac{1}{2}my_0^2=\int_{x0}^{x}f(\xi)d\xi$, яку можна переписати так:

$$\frac{1}{2}my^2+\int_0^x f(\xi)d\xi=\frac{1}{2}my_0^2+\int_0^{x0}f(x)dx. \tag{7}$$

Зазначимо: $\frac{1}{2}my^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ – формула для обчислення кінетичної енергії динамічної системи, а

$$V(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi \; - \tag{8}$$

формула для обчислення її потенційної енергії, тобто рівняння (7) виражає закон збереження енергії:

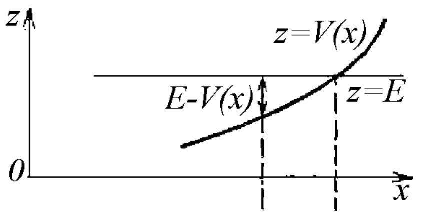
$$\frac{1}{2}my^2+V(x)-E\,, \tag{9}$$

де $E=\frac{1}{2}my_0^2+V(x_0)$ – повна енергія динамічної системи. Ясно, що рівняння (9) – це рівняння фазових траєкторій системи (5), оскільки воно отримано в результаті інтегрування рівняння (6). Таким чином, різним значенням E на фазовій площині відповідають різні криві постійної енергії. Особливими точками системи (5) є точки M_v (x_v, 0), де x_v – корені рівняння f(x) = 0. Як уже відзначалося, особливі точки є точками рівноваги динамічної системи, описуваної рівнянням (4). З рівняння ж (6) випливає, що фазові траєкторії перетинають вісь x під прямим кутом, а прямі $x = x_v$ – горизонтально. Крім того, рівняння (9) показує, що фазові траєкторії симетричні відносно осі x. У такому випадку, якщо переписати рівняння (9) як

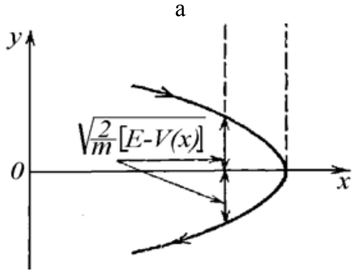
$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E-V(x)\big)}\,, \tag{10}$$

то можна легко побудувати фазові траєкторії. Дійсно, доповнимо фазову площину (x, y) площиною (x, z) – яку вважатимемо «площиною балансу енергії» (рис. 2, а), у якої вісь z лежить на тій же вертикальній прямій, що і вісь y фазової площини. Потім зобразимо графік функції z = V(x) і декілька горизонтальних прямих z = E в площини (x, z) (на рис. 2, а зображено одну з таких прямих).

Відзначимо на рис. 2, б значення різниці E – V(x). Після цього для кожного x помножимо різницю E – V(x) на 2/m, що з урахуванням формули (10) дає можливість нанести відповідні значення y на фазову площину. Оскільки dx/dt = y, то додатній напрямок уздовж траєкторії визначається рухом зображуючої точки праворуч вище осі x і ліворуч нижче осі x.



а



б

Рис. 2. Суміщене зображення фазової площини і «площини балансу енергії»

Іншим типом руху механічних систем є так звані *малі коливання*, що система робить поблизу стійкої рівноваги. Для визначення положення системи досить задати лише одне число. Це не обов'язково повинна бути декартова координата, в залежності від умов задачі може виявитися більш зручним вибір іншої величини. Така величина, яка характеризує положення системи, називається її *узагальненою координатою*.

Стійкій рівновазі відповідає таке положення системи, коли її потенційна енергія U(q), як функція деякої узагальненої координати q, має мінімум. Відхилення від цього мінімуму приводять до виникнення сили –d/ dq, що прагне повернути систему назад.

Проведені міркування дають можливість досліджувати рівняння руху маятника в середовищі без опору [2], що має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\sin x=0, \qquad k>0\,. \tag{11}$$

Оскільки рівняння (11) є частинним випадком рівняння (1), то його можна інтерпретувати і як рівняння, що описує прямолінійний рух без тертя тіла одиничної маси під дією нелінійної пружини, де відновлююча сила дорівнює –k sin x. У цьому випадку опис автономної системи, яка відповідає рівнянню (11), набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt}=y; \qquad \frac{dy}{dt}=-k\sin x\,. \tag{12}$$

Особливими точками тут будуть (0, 0), (±π, 0), (±2π, 0), ..., а рівняння фазових траєкторій системи (12) матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{k\sin x}{y}\,. \tag{13}$$

Розділяючи змінні в рівнянні (13) й інтегруючи, одержимо рівняння фазових траєкторій

$$\frac{1}{2}y^2+k(1-\cos x)=E\,. \tag{14}$$

Рівняння (14) є частинним випадком рівняння (9), де m = 1, а потенційна енергія, обумовлена згідно формули (8), задається співвідношенням

$$V(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi=k(1-\cos x)\,. \tag{15}$$

Зобразимо тепер на площині (x, z) графік функції z = V(x), а також декілька прямих z = E (на рис. 3 для ілюстрації зображена лише одна пряма z = E = 2k). Обчислюючи значення E – V(x), ми можемо схематично унаочнити картину поводження траєкторій на фазовій площині, якщо скористатися співвідношенням

$$y=\pm\sqrt{2\big(E-V(x)\big)}\,. \tag{16}$$

Висновки

З фазового портрета, який зображено на рис. 3, слідує, що коли енергія E змінюється від 0 до 2k, то відповідні фазові траєкторії виявляються замкнутими і рівняння (16) має періодичні розв’язок.

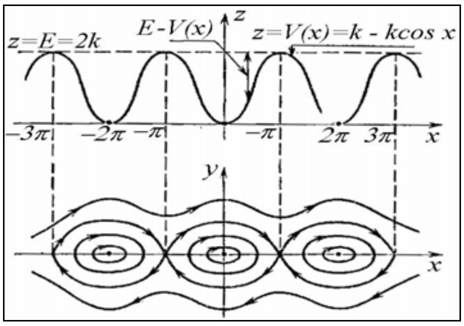


Рис. 3. Зображення для конкретного прикладу на фазовій площині і «площині балансу енергії»

З іншого боку, якщо E > 2k то відповідні фазові траєкторії не будуть замкнутими і рівняння (14) періодичних рішень не матиме. Значенню E=2k на фазовій площині відповідає фазова траєкторія, що розділяє два різних типи рухів, тобто є *сепаратрисою*. Хвилясті фазові траєкторії, які розташовані поза сепаратрис, відповідають обертальним рухам маятника, а замкнуті траєкторії, що розташовані в областях, обмежених сепаратрисами, - його коливальним рухам. З рис. 3 також видно, що в околі особливих точок (±2πm, 0), де m = 0, 1, 2, ..., поводження фазових траєкторій відрізняється від поводження фазових траєкторій в околі особливих точок (±πn, 0), де n = 1, 2, ...

Список літератури

1. *Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 158 с.*

2. *Аладьев В.З., Богдявичюс М. Применение пакета Maple V для решения фізико-технических задач // Междун. конф. TRANSBALTICA-99, апрель 1999. – Вильнюс. – С. 37-41.*

3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 240 с.*

4. *Розенблат Г.М. Механика в задачах и решениях. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.*

Надійшла до редколегії 00.00.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М.Куценко, Університет цивільного захисту України, Харків.