

УДК 515.2

О.М. Ларін¹, В.С. Новіков²¹Університет цивільного захисту України, Харків²ЦП ГУ МНС України в Харківській області, Харків

МОДЕЛЮВАННЯ КОНСЕРВАТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В МЕХАНІЦІ

Досліджено загальний випадок руху тіла масою m під дією двох сил – відновлюючої $f(x)$ і демпфуючої $g(x)$, коли у рівнянні руху зазначені сили будуть нелінійними.

консервативні динамічні системи, відновлююча сила, демпфуюча сила

Вступ

Постановка проблеми. З практики добре відомо, що в будь-якій реальній динамічній системі енергія розсіюється. Розсіювання (дисипація) енергії звичайно відбувається в зв'язку з наявністю тієї або іншої форми (виду) тертя. Разом з тим у деяких конкретних випадках розсіювання енергії буває настільки повільним, що їм можна знехтувати, якщо обмежитися відносно нетривалим відрізком часу [1 – 4]. У таких випадках можна вважати, що при розгляді конкретної фізичної системи має місце закон збереження енергії. А саме: сума кінетичної і потенційної енергій постійна. Системи такого типу називають *консервативними* [1].

Аналіз відомих робіт. Найпростішим прикладом консервативної системи є система, що складається з тіла, яке здійснює горизонтальні рухи у вакуумі під дією двох пружин (рис. 1).

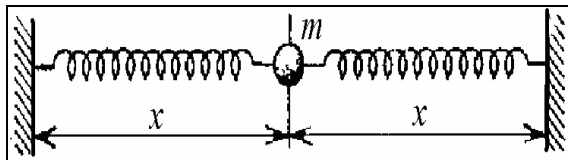


Рис. 1. Приклад коливальної консервативної системи

Якщо x позначає зсув тіла масою m зі стану рівноваги, а сила, з якою пружини діють на тіло (відновлююча сила), пропорційна зсувові x , то рівняння руху має вигляд [1 – 4]

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad k > 0. \quad (1)$$

Пружини цього типу називаються *лінійними*, тому що їхня відновлююча сила, є лінійною функцією x . Якщо тіло масою m рухається в середовищі з опором і опір (демпфуюча сила), що діє на це тіло, пропорційний швидкості руху, то рівняння руху неконсервативної системи буде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad c > 0. \quad (2)$$

Тут ми маємо лінійне загасання, тому що демпфуюча сила являє собою лінійну функцію швидко-

сті dx/dt . Якщо f і g є довільними функціями і такими, що $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, то більш загальне рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + g \frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \quad (3)$$

можна інтерпретувати як рівняння руху тіла маси m під дією двох сил – відновлюючої $f(x)$ і демпфуючої $g(x)$.

Постановка завдання. Проаналізувати і унаочнити загальний випадок, коли у рівнянні (3) зазначені сили будуть нелінійними (це рівняння можна розглядати як основне рівняння нелінійної механіки).

Основна частина

Розглянемо спеціальний випадок нелінійної консервативної системи, що описується рівнянням

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0, \quad (4)$$

де демпфуюча сила дорівнює нулеві, що унеможливує розсіювання енергії. Від рівняння (4) можна перейти до автономної системи виду

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \quad (5)$$

Якщо тепер у системі (5) виключити час t , то одержимо диференціальне рівняння траєкторій системи на фазовій площині $\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my}$. Останнє рівняння можна переписати так:

$$mydy = -f(x)dx. \quad (6)$$

Тоді, вважаючи, що $x = x_0$ при $t = t_0$ а $y = y_0$, після інтегрування рівняння (6) у межах від t_0 до t маємо тотожність

$$\frac{1}{2} my^2 - \frac{1}{2} my_0^2 = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad \text{яку можна переписати так:}$$

$$\frac{1}{2} my^2 + \int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} my_0^2 + \int_0^{x_0} f(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Значимо: $\frac{1}{2} my^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ – формула для обчислення кінетичної енергії динамічної системи, а

$$V(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi - \quad (8)$$

формула для обчислення її потенційної енергії, тобто рівняння (7) виражає закон збереження енергії:

$$\frac{1}{2} m u^2 + V(x) - E, \quad (9)$$

де $E = \frac{1}{2} m u_0^2 + V(x_0)$ – повна енергія динамічної системи. Ясно, що рівняння (9) – це рівняння фазових траєкторій системи (5), оскільки воно отримано в результаті інтегрування рівняння (6). Таким чином, різним значенням E на фазовій площині відповідають різні криві постійної енергії. Особливими точками системи (5) є точки $M_v(x_v, 0)$, де x_v – корені рівняння $f(x) = 0$. Як уже відзначалося, особливі точки є точками рівноваги динамічної системи, описуваної рівнянням (4). З рівняння ж (6) випливає, що фазові траєкторії перетинають вісь x під прямим кутом, а прямі $x = x_v$ – горизонтально. Крім того, рівняння (9) показує, що фазові траєкторії симетричні відносно осі x . У такому випадку, якщо переписати рівняння (9) як

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \quad (10)$$

то можна легко побудувати фазові траєкторії. Дійсно, доповнимо фазову площину (x, y) площиною (x, z) – яку вважатимемо «площиною балансу енергії» (рис. 2, а), у якій вісь z лежить на тій же вертикальній прямій, що і вісь y фазової площини. Потім зобразимо графік функції $z = V(x)$ і декілька горизонтальних прямих $z = E$ в площини (x, z) (на рис. 2, а зображено одну з таких прямих).

Відзначимо на рис. 2, б значення різниці $E - V(x)$. Після цього для кожного x помножимо різницю $E - V(x)$ на $2/m$, що з урахуванням формули (10) дає можливість нанести відповідні значення y на фазову площину. Оскільки $dx/dt = y$, то додатній напрямок уздовж траєкторії визначається рухом зображуючої точки праворуч вище осі x і ліворуч нижче осі x .

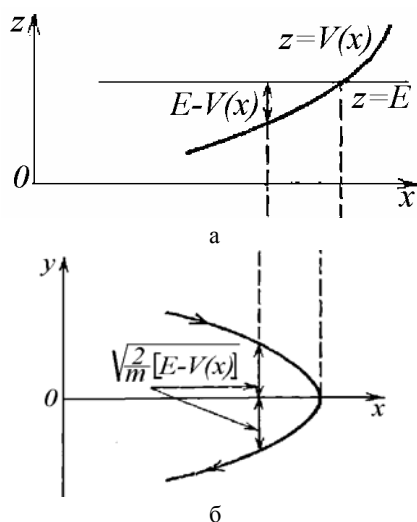


Рис. 2. Суміщене зображення фазової площини і «площини балансу енергії»

Іншим типом руху механічних систем є так звані *малі коливання*, що система робить поблизу стійкої рівноваги. Для визначення положення системи досить задати лише одне число. Це не обов'язково повинна бути декартова координата, в залежності від умов задачі може виявитися більш зручним вибір іншої величини. Така величина, яка характеризує положення системи, називається її *узгаальною координатою*.

Стійкій рівновазі відповідає таке положення системи, коли її потенційна енергія $U(q)$, як функція деякої узгаальної координати q , має мінімум. Відхилення від цього мінімуму приводять до виникнення сили $-dU/dq$, що прагне повернути систему назад.

Проведені міркування дають можливість досліджувати рівняння руху маятника в середовищі без опору [2], що має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \sin x = 0, \quad k > 0. \quad (11)$$

Оскільки рівняння (11) є частинним випадком рівняння (1), то його можна інтерпретувати і як рівняння, що описує прямолінійний рух без тертя тіла одиничної маси під дією нелінійної пружини, де відновлююча сила дорівнює $-k \sin x$. У цьому випадку опис автономної системи, яка відповідає рівнянню (11), набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -k \sin x. \quad (12)$$

Особливими точками тут будуть $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, ..., а рівняння фазових траєкторій системи (12) матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \sin x}{y}. \quad (13)$$

Розділяючи змінні в рівнянні (13) й інтегруючи, одержимо рівняння фазових траєкторій

$$\frac{1}{2} y^2 + k(1 - \cos x) = E. \quad (14)$$

Рівняння (14) є частинним випадком рівняння (9), де $m = 1$, а потенційна енергія, обумовлена згідно формули (8), задається співвідношенням

$$V(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi = k(1 - \cos x). \quad (15)$$

Зобразимо тепер на площині (x, z) графік функції $z = V(x)$, а також декілька прямих $z = E$ (на рис. 3 для ілюстрації зображена лише одна пряма $z = E = 2k$). Обчислюючи значення $E - V(x)$, ми можемо схематично унаочнити картину поведінки траєкторій на фазовій площині, якщо скористатися співвідношенням

$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}. \quad (16)$$

Висновки

З фазового портрета, який зображено на рис. 3, слідує, що коли енергія E змінюється від 0 до $2k$, то відповідні фазові траєкторії виявляються замкнутими і рівняння (16) має періодичні розв'язок.

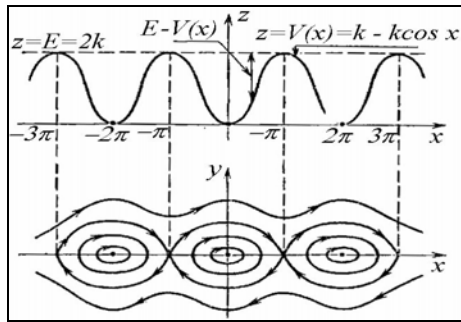


Рис. 3. Зображення для конкретного прикладу на фазовій площині і «площині балансу енергії»

З іншого боку, якщо $E > 2k$ то відповідні фазові траєкторії не будуть замкнутими і рівняння (14) періодичних рішень не матиме. Значенню $E=2k$ на фазовій площині відповідає фазова траєкторія, що розділяє два різних типи рухів, тобто є *сепаратрисою*. Хвилясті фазові траєкторії, які розташовані поза сепаратрис, відповідають обертовим рухам маятника, а замкнуті

траєкторії, що розташовані в областях, обмежених сепаратрисами, - його коливальним рухам. З рис. 3 також видно, що в околі особливих точок $(\pm 2\pi, 0)$, де $m = 0, 1, 2, \dots$, поведіння фазових траєкторій відрізняється від поведіння фазових траєкторій в околі особливих точок $(\pm \pi, 0)$, де $n = 1, 2, \dots$.

Список літератури

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 158 с.
2. Аладьев В.З., Богдьявичюс М. Применение пакета Maple V для решения физико-технических задач // Междуна. конф. TRANSBALTICA99, апрель 1999. – Вильнюс. – С. 37-41.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
4. Розенблат Г.М. Механика в задачах и решениях. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.

Надійшла до редколегії 00.00.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М.Куценко, Університет цивільного захисту України, Харків.