УДК 681.3+623.4

Е.А. Макогон

Факультет военной подготовки НТУ «ХПИ»

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ЗАВИСИМОСТЬ БОЕВОЙ МОЩИ ТАНКА ОТ ЗНАЧЕНИЙ ЕГО ТАКТИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Предлагается методика определения вектора весовых коэффициентов в уравнении, связывающих показатель боевого могущества танка по результатам боев для выбранной пары стратегий.

танк, боевая мощь, тактико-технические характеристики, стратегия

Введение

Боевая мощь танка зависит от численных значений набора их тактико-технических характеристик (ТТХ).

Введем набор тактико-технических характеристик, влияющих на уровень боевой мощи танка:

F_1 – длина, мм;

F_2 – ширина, мм;

F_3 – высота, мм;

F_4 – начальная скорость снаряда, м/с;

F_5 –максимальная скорость движения, м/с;

F_6 – максимальная толщина брони (эквивалентная), мм;

F_7 – время поиска цели, с;

F_8 – эффективная дальность стрельбы, м [1].

Определим искомую зависимость уровня боевой мощи машины y от значений компонентою вектора $F = \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ в общем виде следующим образом:

$$y = a_1 F_1 + a_2 F_2 + ... + a_m F_m .$$

Кроме того, для каждой стратегии ведения боя введем коэффициент l_q усиления боевой мощи, с учетом которого уровень боевых возможностей машины определим по формуле

$$\tilde{y}_q = l_q \left(\sum_{k=1}^{m} a_k F_k\right) . \qquad (1)$$

Постановка задачи. С использованием имитационной модели боя двух групп боевых единиц для каждой пары (i, j) типов боевых единиц при реализации пары (q, s) стратегий ведения боя может быть получено некоторое соответствующее число $k_{ij}^{(q,s)}$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$, $q = 1,2,...,l$, $s = 1,2,...,l$. Это число $k_{ij}^{(q,s)}$ однозначно определяет степень преимущества танков типа i, использующих стратегию q, перед танками типа j, использующих стратегию s. Численное значение параметра $k_{ij}^{(q,s)}$, рассчитывается как отношение числа побед танков типа i над танками типа j при использовании ими стратегий q и s соответственно.

Естественно считать, что

$$\frac{l_q (a_1^{(q,s)} F_{i1} + a_2^{(q,s)} F_{i2} + ... + a_m^{(q,s)} F_{im})}{l_s (a_1^{(q,s)} F_{j1} + a_2^{(q,s)} F_{j2} + ... + a_m^{(q,s)} F_{jm})} = k_{ij}^{(q,s)} .$$

Необходимо найти коэффициенты уравнения (1), используя результаты имитационного моделирования.

Основные результаты

Разделим числитель и знаменатель этого соотношения на $a_1^{(q,s)}$.

При этом получим

$$r_{qs} \cdot \frac{F_{i1} + \dfrac{a_2^{(q,s)}}{a_1^{(q,s)}} F_{i2} + ... + \dfrac{a_m^{(q,s)}}{a_1^{(q,s)}} F_{im}}{F_{j1} + \dfrac{a_2^{(q,s)}}{a_1^{(q,s)}} F_{j2} + ... + \dfrac{a_m^{(q,s)}}{a_1^{(q,s)}} F_{jm}} = \qquad (2)$$

$$= r_{qs} \cdot \frac{F_{i1} + b_2^{(q,s)} F_{i2} + ... + b_m^{(q,s)} F_{im}}{F_{j1} + b_2^{(q,s)} F_{j2} + ... + b_m^{(q,s)} F_{jm}} = k_{ij}^{(q,s)} ,$$

где $b_p^{(q,s)} = \dfrac{a_p^{(q,d)}}{a_1^{(q,s)}}$, $p = 2,3,...,m$, $r_{qs} = \dfrac{l_q}{l_s}$.

Параметры уравнения регрессии (1) и коэффициенты r_{qs}, $q = 1,2,3,...,l$, $s = 1,2,3,...,l$, будем отыскивать раздельно.

Положим $q = s$.

Тогда из (2) имеем:

$$b_2^{(q,q)} (F_{i2} - k_{ij}^{(q,q)} F_{j2}) + ... + b_m^{(q,q)} (F_{im} - k_{ij}^{(q,q)} F_{jm}) =$$
$$= F_{ji} k_{ij}^{(q,q)} - F_{i1}$$

или

$$b_2^{(q,q)}R_{ij,2}^{(q,q)}+...+b_m R_{ij,m}^{(q,q)}=d_{i,j}^{(q,q)}.$$

Введем матрицу $H^{(q,s)}$, вектора $B^{(q,s)}$ и $D^{(q,s)}$ следующим образом:

$$H^{(q,q)}=\begin{pmatrix} R_{12,2}^{(q,q)} & R_{12,3}^{(q,q)} & ... & R_{12,m}^{(q,q)} \\ R_{13,2}^{(q,q)} & R_{13,3}^{(q,q)} & ... & R_{13,m}^{(q,q)} \\ ... & ... & ... & ... \\ R_{1n,2}^{(q,q)} & R_{1n,3}^{(q,q)} & ... & R_{1n,m}^{(q,q)} \\ \cdot\ R_{23,2}^{(q,q)} & R_{23,3}^{(q,q)} & .... & R_{23,m}^{(q,q)} \\ ... & ... & ... & ... \\ R_{2n,2}^{(q,q)} & R_{2n,3}^{(q,q)} & ... & R_{2n,m}^{(q,q)} \\ ... & ... & ... & ... \\ R_{n-1n,2}^{(q,q)} & R_{n-1n,3}^{(q,q)} & ... & R_{n-1n,m}^{(q,q)} \end{pmatrix},$$

$$B^{(q,q)}=\begin{pmatrix} b_2^{(q,q)} \\ b_3^{(q,q)} \\ ... \\ b_m^{(q,q)} \end{pmatrix}\ D^{(q,q)}=\begin{pmatrix} d_{1,2}^{(q,q)} \\ d_{1,3}^{(q,q)} \\ ... \\ d_{1,n}^{(q,q)} \\ d_{2,3}^{(q,q)} \\ ... \\ d_{n-1,n}^{(q,q)} \end{pmatrix}.$$

При этом, как легко видеть,

$$\dim H^{(q,q)}=\frac{n(n-1)}{2}\times(m-1),$$

$$\dim B^{(q,q)}=(m-1)\times 1,\ \dim D^{(q,q)}=\frac{n(n-1)}{2}\times 1.$$

Тогда задача отыскания компонентов вектора $B^{(q,q)}$ сводится к решению переопределенной системы уравнений

$$H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}=D^{(q,q)}, \tag{3}$$

наилучшему в смысле минимума суммы квадратов невязок между левой и правой частями системы уравнений (3). Сформируем функционал наименьших квадратов

$$J(B^{(q,q)})= \\ =(H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}-D^{(q,q)})^T(H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}-D^{(q,q)}). \tag{4}$$

Поставим задачу расчета $B^{(q,s)}$, минимизирующего (4).

Решим поставленную задачу. Сформируем вспомогательную функцию

$$\Phi(t)=J(B^{(q,q)}+ht)=\Big[(H^{(q,q)}\cdot(B^{(q,q)}+ht)-D^{(q,q)})^T\ \times \\ \times(H^{(q,q)}\cdot(B^{(q,q)}+ht)-D^{(q,q)})\Big],$$

где h – произвольный вектор-столбец, причем $\dim h=\dim B^{(q,q)}=(m-1)\times 1$;

t – скаляр.

Как показано в [2], искомая производная $\frac{dJ(B^{(q,q)})}{dB^{(q,q)}}$ равна матричному оператору, действующему слева на вектор-столбец h в выражении $\left.\frac{d\Phi(t)}{dt}\right|_{t=0}$.

Выполним необходимые операции.

$$\Phi(t)=(H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}+H^{(q,q)}\cdot ht-D^{(q,q)})^T\times \\ \times(H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}+H^{(q,q)}\cdot ht-D^{(q,q)})= \\ =\Big[(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T+h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot t-(D^{(q,q)})^T\Big]\times \\ \times\Big[H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}+H^{(q,q)}\cdot ht-D^{(q,q)}\Big]= \\ =(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})\cdot H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}+(B^{(q,q)})^T\times \\ \times(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot ht-(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}+ \\ +h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}\cdot t+h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\times \\ \times H^{(q,q)}\cdot ht^2-h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}\cdot t-(D^{(q,q)})^T\times \\ \times H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}-(D^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot ht+(D^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}.$$

Далее,

$$\left.\frac{d\Phi(H)}{dt}\right|_{t=0}=(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot h+h^T\times \\ \times(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}-h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}- \\ -(D^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot h. \tag{5}$$

Заметим теперь, что

$$h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}$$

и $h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}$ – скаляры.

Поэтому:

$$h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}= \\ =\Big[h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot B^{(q,q)}\Big]^T= \\ =(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot h, \tag{6}$$

$$h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}=\Big[h^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot D^{(q,q)}\Big]=^T \\ =(D^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot h.$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\left.\frac{d\Phi(H)}{dt}\right|_{t=0}=2(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot h- \\ -2(D^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\cdot h= \\ =2\Big[(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}-(D^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\Big]\cdot h.$$

Тогда, с учетом сделанного выше замечания, искомая производная $\frac{dJ(B^{(q,q)})}{dB^{(q,q)}}$ имеет вид

$$\frac{dJ(B^{(q,q)})}{dB^{(q,s)}}=2\Big[(B^{(q,q)})^T\cdot(H^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}- \\ -(D^{(q,q)})^T\cdot H^{(q,q)}\Big].$$

Приравняем полученную производную к нулю и найдем $B^{(q,q)}$. Имеем

$$(B^{(q,q)})^T \cdot (H^{(q,q)})^T \cdot H^{(q,q)} = (D^{(q,q)})^T \cdot H^T. \quad (7)$$

Отсюда, транспонируя левую и правую части данного выражения, получим [3]:

$$(H^{(q,q)})^T \cdot H^{(q,q)} \cdot B^{(q,q)} = (H^{(q,q)})^T \cdot D^{(q,q)}.$$

Тогда

$$B^{(q,q)} = \left[(H^{(q,q)})^T \cdot H^{(q,q)}\right]^{-1} \cdot (H^{(q,q)})^T \cdot D^{(q,q)}. \quad (8)$$

Вернемся к параметрам уравнения регрессии (1). Рассчитаем значения $a_1^{(q,q)}$, $i = 1,2,...m$, используя соотношения:

$$a_1^{(q,q)} + a_2^{(q,q)} + ... + a_m^{(q,q)} = 1, \quad (9)$$

$$a_p^{(q,q)} = b_p^{(q,q)} \cdot a_1^{(q,q)}, \ p = 2,3,...m. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), найдем $a_1^{(q,q)}$:

$$a_1^{(q,q)} + a_2^{(q,q)} \cdot b_2^{(q,q)} + ... + a_1^{(q,q)} \cdot b_m^{(q,q)} =$$

$$= a_m^{(q,q)}(1 + \sum_{p=2}^{m} b_p^{(q,q)}) = 1,$$

$$a_1^{(q,q)} = \frac{1}{1 + \sum_{p=2}^{m} b_p^{(q,q)}}. \quad (11)$$

Тогда

$$a_p^{(q,q)} = \frac{b_p^{(q,q)}}{1 + \sum_{p=2}^{m} b_p^{(q,q)}}, \ p = 2,3,...m. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) задают искомые параметры уравнения регрессии (1).

Найдем теперь набор $(r_{q,s})$.

С этой целью для каждой четверки (i,j,q,s), используя (11), (12), (2), вычислим

$$r_{q,s}^{(i,j)} = k_{i,j}^{(q,s)} \cdot \sum_{p=1}^{m} a_p^q \cdot F_{jp} \Big/ \sum_{p=1}^{m} a_p^{(s)} \cdot F_{ip}.$$

Полученные оценки $r_{q,s}^{(i,j)}$ усредняем. При этом

$$r_{q,s} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{q,s}^{(i,j)}. \quad (13)$$

Таким образом, соотношения (11), (12) определяют вектор весовых коэффициентов в уравнении (1), связывающих показатель боевого могущества танка по результатам боев для выбранной стратегии q, а соотношение (13) задает матрицу коэффициентов усиления боевой мощи при использовании стратегии q против стратегии s.

Понятно, что, комбинируя значения параметров $K_{ij}^{(q,s)}$ для разных (q,s) можно получить более общую информацию.

Например, если в соотношении (2) и, соответственно, при формировании матрицы H использовать

$$K_{ij}^{(q)} = \frac{1}{l} \sum_{s=1}^{l} K_{ij}^{(q,s)},$$

то получаемый при этом по формуле (11) вектор $A^{(q)}$ будет характеризовать набор весовых коэффициентов в уравнении регрессии (1) для ситуации, когда первая сторона применяет стратегию q.

Важный результат будет получен, если осуществить усреднение по выбираемой стратегии ведения боя для случая, когда обе противоборствующие стороны используют одну и ту же стратегию. При этом

$$K_{ij} = \frac{1}{l} \sum_{s=1}^{l} K_{ij}^{(q,q)}.$$

Больший интерес представляет наиболее общий результат, получаемый, если усреднить значения параметра $K_{ij}^{(q)}$ по всем возможным стратегиям обеих сторон. В этом случае

$$K_{ij}^{(0)} = \frac{1}{l^2} \sum_{q=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} K_{ij}^{(q,s)}.$$

Выводы

Весовые коэффициенты уравнения регрессии, полученные согласно изложенной выше методике, будут определяться только значениями ТТХ, но не выбираемыми стратегиями ведения боя.

Список литературы

1. *Бусяк Ю.М., Макогон Е.А., Кобыжской Д.А. Выбор совокупности тактико-технических характеристик образцов бронетанковой техники, определяющих их боевую эффективность // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУ ПС, 2007. – Вип. 2 (14). – С. 134-137.*
2. *Зубарев В.В., Ковтуненко А.П., Раскин Л.Г. Математические методы оценки и прогнозирования технических показателей эксплуатационных свойств радиотехнических систем. – К.: НАУ, 2005. – 184 с.*
3. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1970. – 720 с.*

Поступила в редколлегию 1.08.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.