УДК 519.7

І.Д. Вечірська, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

Харківський національний університет радіоелектроніки

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЛІНІЙНИХ ЛОГІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Досліджені основні поняття логічних просторів, зокрема, лінійного логічного перетворення як основного засобу побудови логічних мереж. Проведено аналогію між оператором замикання та лінійним логічним перетворенням. Описана суперпозиція лінійних логічних перетворень. Наведено метод знаходження n -ого лінійного логічного перетворення та проведено його аналіз.

лінійне логічне перетворення, логічна мережа, логічний простір, породжуюча сукупність векторів, теорія категорій

Вступ

Останнім часом широкого розповсюдження набувають найрізноманітніші методи формального опису природної мови. Дійсно, з цією метою використовують формальні граматики [1], теорію ймовірностей, теорію логічних систем [2, 3], навіть сінергетику та квантову механіку [4]. Дослідження в цьому напрямку проводилися ще з 60-х років ХХ ст. Проте виявилося, що формалізація природної мови є надзвичайно складною проблемою. Але спроби формального опису природної мови доцільно продовжувати принаймні для того, щоб краще зрозуміти, яким чином людина сприймає інформацію, повідомлену природною мовою [5]. Одним з формальних засобів опису природної мови є логічні мережі [6]. Перевагами логічних мереж можна вважати наступні: логічна мережа є засобом опису будь-яких відношень; вхідна і вихідна інформація представлена у вигляді знань; наявність проміжних змінних в мережі гарантують відсутність пробок.

Крім того, логічні мережі доцільно використовувати для формалізації не тільки фрагментів природної мови, а для об'єктів будь-якої природи. Таким чином, дослідження логічних мереж, а саме лінійних логічних перетворень як основного засобу їх реалізації, є важливою та перспективною задачею. *Мета статті* – дослідження властивостей лінійних логічних перетворень для подальшого розвитку теорії логічних мереж та перспектив використання.

Логічні простори

В зв'язку з використанням властивостей логічного простору під час дослідження властивостей лінійних логічних перетворень важливою є задача дослідження таких понять як базис і розмірність логічного простору [7, 8].

Логічним простором назвемо непусту множину векторів M над полем скалярів G, де для скалярів і векторів виконуються відповідно закони ідемпотентності, комутативності, асоціативності, нуля та одиниці, а зв'язок між скалярами та векторами описують за допомогою законів лівої та правої дистрибутивності (відносно відповідно диз'юнкції скалярів та диз'юнкції векторів) та законів нуля та одиниці. Далі введемо в логічному просторі поняття комбінації векторів і незалежної системи векторів. Комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ називається вектор u, рівний

$$u = \alpha_1 a_1 \vee \alpha_2 a_2 \vee \ldots \vee \alpha_m a_m = \bigvee_{k=1}^{m} \alpha_k a_k ,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – коефіцієнти комбінації.

Сукупність векторів називається породжуючою, якщо всі вектори простору M являються їх комбінаціями.

Твердження. Якщо породжуюча система векторів $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ простору M містить вектор a_i, який можна виразити лінійно через інші вектори системи, то, якщо його викинути з породжуючої сукупності, знову отримаємо породжуючу сукупність для M.

Дійсно, кожний вектор простору можна виразити через деяку комбінацію векторів з породжуючої сукупності. Якщо замінити в цих комбінаціях вектор a_i його виразом через інші вектори породжуючої сукупності, то отримаємо вираження будь-якого вектору простору через вектори породжоючої сукупності, які не містять a_i, що й потрібно було довести.

Неважко також довести, що будь-яка мінімальна (за кількістю векторів) породжуюча сукупність векторів незалежна. Дійсно, нехай сукупність векторів $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – мінімальна за кількістю векторів m. Оскільки сукупність векторів породжуюча, то кожний вектор $u_i, 1 \le i \le m$ простору M можна виразити наступною формулою: $u_i = \bigvee_{k=1}^{m} \alpha_k a_k$. Нехай система $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ залежна, тоді існує вектор $a_l = \bigvee_{k=1}^{m-1} \alpha_k a_k$, який залежить від інших. Тоді $u_i, 1 \le i \le m$ можна виразити через комбінацію векторів $\{a_1, a_2, ..., a_{l-1}, a_{l+1}, ..., a_m\}$ без залежного наступним чином:

$$u_i = \left(\bigvee_{k=1}^{m-1} \alpha_k a_k\right) \vee \left(\alpha_l \bigvee_{k=1}^{m-1} \alpha_k a_k\right) = \bigvee_{k=1}^{m-1} \alpha_k a_k.$$

Тоді породжуюча сукупність перестає бути мінімальною, що суперечить умові. Значить незалежна.

Твердження. Будь-яка максимальна (за кількістю векторів) незалежна сукупність векторів є породжуючою.

Припустимо, що існує такий вектор простору, який не можна представити комбінацією векторів системи $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Тоді його можна представити двома можливими способами: 1) добавити до даної системи деяку кількість векторів простору, 2) замінити один (або декілька) векторів з сукупності вектором (векторами) простору. В першому випадку сукупність перестає бути максимальною, що суперечить умові, в другому – за кількістю векторів сукупность все рівно залишається максимальною. Таким чином, доведення зводиться до пошуку відповіді на питання чи існує вектор простору, який можна було б виразити через меншу сукупність векторів, але не через максимальну незалежну. Очевидно, що якщо вектор можна виразити через меншу незалежну сукупність векторів, то можна й через максимальну. Якщо ж цей вектор виражається через систему, в яку входять і залежні вектори, то їх завжди можна виразити в вигляді комбінації незалежних (які в свою чергу є підмножинами максимальної незалежної сукупності).

Лінійні логічні перетворення вводять на логічних просторах наступним чином [9]. Для того, щоб функція $F: P_A \to P_B$ була лінійним логічним перетворенням, необхідно та достатньо, щоб вона мала вигляд

$$[\mathcal{F}(P)](y) = \bigvee_{x \in A} (K(x, y) P(x))$$

для будь-якого $y \in B$, де $K(x, y)$ – предикат з $P_{A \times B}$.

Вступ до теорії категорій

Як відомо, теорія категорій, дає нам загальний підхід до розв’язання різноманітних проблем [10]. Логіка предикатів будує своєрідний «місток» між теорією категорій і практикою. Предикатна інтерпретація категорій без об’єктів та за їх наявністю була наведена в [11]. В [12] визначено поняття модифікованої теорії категорій і сформульована задача розробки теорії модифікованих категорій, що відкриває перспективи для розробки швидкодіючих машин паралельної дії.

Сформулюємо далі деякі поняття теорії категорій та їх інтерпретацію мовою логіки предикатів. Зокрема, зупинимось на основному понятті теорії категорій – операторі замикання та згаданому вище поняттю алгебри логіки лінійному логічному перетворенню.

Оператором замикання на множині A називається відображення C множини всіх підмножин $(P)A$ в себе, в якому для всіх $X, Y \in (P)A$ виконуються наступні властивості:

1) якщо $X \subseteq Y$, то виконується $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонність);

2) $X \subseteq C(X)$ (рефлексивність);

3) $CC(X) = C(X)$ (ідемпотентність).

Розглянемо приклад лінійного логічного перетворення, яке є оператором замикання. Нехай $x \in A$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$, $y \in B$, $P(x) = x^a$, $P'(x) = x^a \vee x^c$, $Q(y) = y^a \vee y^b$, $Q'(y) = y^a \vee y^b \vee \vee y^c$, $K(x, y) = x^a y^a \vee x^a y^b$. Перевіримо виконання властивостей оператора замикання:

1) $P(x) \subset Q(y) \Rightarrow P'(x) \subset Q'(y)$ – розглянуте перетворення монотонне;

2) $P(x) \subset Q(y)$ – розглянуте перетворення рефлексивне;

3) $Q(y) = \exists x \in A \ (K(x, y) P(x))$,

$P^{(1)}(x) = \exists y \in B \ (K(y, x) Q(y))$,

$Q^{(1)}(y) = \exists x \in A \exists y \in B \ (K(x, y) K(y, x) Q(y))$.

Оскільки в ядрі перетворення область визначення змінної x співпадає з її областю визначення в предикаті $P(x)$, то виконується

$$Q^{(1)}(y) = \exists x \in A \exists y \in B \ (K(x, y) K(y, x) Q(y)) =$$
$$= \exists x \in A \exists y \in B \ (K(x, y) K(y, x) \wedge \wedge K(x, y) P(x)) =$$
$$= \exists x \in A \exists x \in B \ (K(x, y) P(x)) \overset{A=B}{=} \exists x \in A \ (K(x, y) P(x)).$$

Отримали, що умова ідемпотентності також виконується. Таким чином, лінійне логічне перетворення такого виду є оператором замикання. Необхідно розглянути лінійні логічні перетворення іншого, більш загального виду. Якщо множини визначення змінних не співпадають, то 1) – 3) не будуть виконуватись. Також представляють інтерес дії над лінійними логічними перетвореннями, наприклад, такі як степінь лінійного логічного перетворення або суперпозиція лінійних логічних перетворень.

Суперпозиція лінійних логічних перетворень

Розглянемо довільне лінійне логічне перетворення предикатів. Ядро перетворення задамо наступним графом (рис. 1).

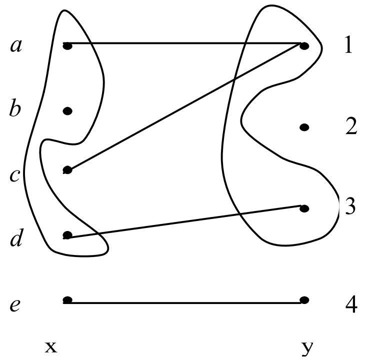

Рис. 1. Графічна інтерпретація ядра лінійного логічного перетворення $K_1(x,y)$

Ядро перетворення матиме вигляд

$$K(x,y) = (x^a \vee x^c)y^1 \vee x^d y^3 \vee x^e y^4 .$$

Тоді маємо лінійне логічне перетворення

$$Q(y) = \exists x \in \{a,b,c,d,e\} \times$$
$$\times (((x^a \vee x^c)y^1 \vee x^d y^3 \vee x^e y^4) \wedge P(x)).$$

Далі по предикату P знайдемо предикат Q як результат якого-небудь лінійного перетворення

$$Q(y) = \exists x \in \{a,b,c,d,e\}(((x^a \vee x^c)y^1 \vee x^d y^3 \vee x^e y^4) \wedge$$
$$\wedge (x^a \vee x^b \vee x^d)) = y^1 \vee y^3.$$

Таблиці предикатів $K_1(x,y)$, $K_2(y,z)$ та $K(x,z)$ можна розглядати як прямокутні матриці, а з’єднання предикатів – як добуток матриць:

$$K(x,z) = K_1(x,y) \circ K_2(y,z) = \bigvee_{y \in N} (K_1(x,y) \wedge K_2(y,z)).$$

Квантор існування відповідає проміжному предикату рівності. Виключаємо проміжні точки, простежуючи можливі шляхи.

Знайдемо далі з’єднання двох предикатів $K_1(x,y)$ та $K_2(y,z)$ (рис. 2). Обчислимо предикат $K(x,z)$ (рис. 3) за формулою:

$$K(x,z) = \exists y \in \{1,2,3,4\}((x^a(y^1 \vee y^2) \vee x^c(y^3 \vee y^4)) \wedge$$
$$\wedge (y^1 z^\beta \vee y^2 z^\alpha \vee (y^3 \vee y^4)z^\gamma)) = x^a(z^\alpha \vee z^\beta) \vee x^c z^\gamma.$$

При цьому результатом суперпозиції розглянутих вище перетворень предикату $R(x) = x^a \vee x^c$ буде предикат $T(z) = z^\alpha \vee z^\beta \vee z^\gamma$.

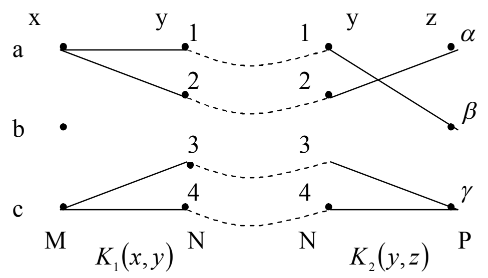

Рис. 2. Графічна інтерпретація ядер лінійного логічного перетворення $K_1(x,y)$ та $K_2(y,z)$

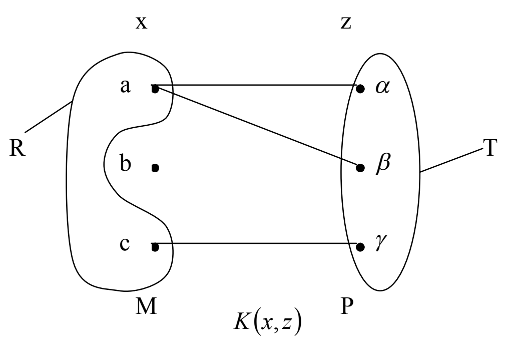

Рис. 3. Графічна інтерпретація ядра лінійного логічного перетворення $K(x,z)$

Так ми розглянули суперпозицію перетворень, де області визначення для змінної y в ядрах $K_1(x,y)$ та $K_2(y,z)$ співпадають. Доцільно також розглянути випадок, де області визначення не співпадають. В [12] було введено поняття модифікованої предикатної категорії, де визначався добуток морфізмів (лінійних логічних перетворень) для випадків, де $N_1 \cap N_2 \neq 0$, а саме

$$K_h(x,z) = \exists y \in N_1 \cap N_2 (K_f(x,y) K_g(y,z)),$$

де $h = fg$, $f : A \to N_1$, $g : N_2 \to D$, A, N_1, N_2, D – довільно обрані підмножини універсуму U . Таким чином, якщо області визначення не співпадають, то для обчислення суперпозиції достатньо взяти перетин областей визначення. Як наслідок, суперпозиція лінійних логічних перетворень існує не лише, коли області визначення співпадають, а достатньо щоб їх перетин не був пустою множиною.

Про метод знаходження n-го лінійного логічного перетворення

Як відомо, лінійні логічні перетворення можна виразити наступною формулою:

$$Q(y) = \exists x \in M(K(x,y)P(x)),$$

де M – область визначення змінної x, а N – область визначення змінної y. В [13] була виведена формула для знаходження n-ої степені лінійних логічних перетворень:

$$Q^{(n)}(y) = \bigwedge_{i=1}^{n} K_i Q(y)\text{, де } K_i = K = K(x,y)K(y,x);$$

$$P^{(n)}(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} K_i' P(x)\text{, де } K_i' = K' = K(y,x)K(x,y).$$

Матриця K є суперпозицією ядер лінійних логічних перетворень з $P(x)$ в $Q(y)$ і, відповідно, з $Q(y)$ в $P'(x)$: $K = K(x,y)K(y,x)$.

Було доведено твердження про те, що при знаходженні степеня лінійного логічного перетворення якщо на двох послідовних кроках значення перетворення повторюється, то це значення буде повторюватись також і на наступних кроках. Тобто якщо при знаходженні n-го степеня лінійного логічного перетворення, було отримано однакові результати на n-му та (n – 1)-му кроках, то цей результат отримаємо також і на наступних (n + 1) -ому, (n + 2)-му і т.д. кроках. Тоді таке лінійне перетворення і є шуканим. Таким чином, метод знаходження n-го лінійного логічного перетворення дає нам критерій закінчення роботи логічної мережі і обґрунтовує його.

Висновки та перспективи подальших досліджень

В процесі досліджень було отримано наступні результати:

– наведено та доведено твердження про породжуючу сукупність векторів, мінімальну та максимальну незалежну сукупність векторів;

– проаналізовано подібність між оператором замикання та лінійними логічними перетвореннями;

– досліджено суперпозицію лінійних логічних перетворень;

– проведено аналіз методу знаходження n-го лінійного логічного перетворення.

Все це дає змогу краще зрозуміти внутрішню структуру лінійних логічних перетворень як основного засобу функціонування логічних мереж. А сам метод знаходження n-го лінійного логічного перетворення, як уже було зазначено вище, дає нам критерій закінчення роботи логічної мережі. Слід відмітити, що логічні мережі будують для реалізації відношень будь якої природи. Так логічні мережі застосовували не тільки для опису фрагментів природної мови (закінчень повних неприсвійних прикметників, іменників та дієслів російської мови [6, 14, 15]), а також при розв'язанні задачі гіпотетично зв'язаних абонентів в автоматизованій системі комплексних розрахунків інтегрованої інформаційно-обчислювальної системи підприємства електрозв'язку та при побудові комп'ютерного комплексу для автоматизованого керування фірмою та узгодженої роботи її відділів.

Таким чином, необхідно продовжувати дослідження в цьому напрямку. Становить інтерес детальне дослідження обчислення степеня лінійних логічних перетворень на предмет виявлення закономірностей обчислення в залежності від вигляду вхідних векторів та їх областей визначення, що могло б спростити обчислення, а значить прискорити роботу логічної мережі в цілому та для деяких конкретних випадків.

Список літератури

1. *Гладкий А.В. Формальные грамматики и языки. – М: Наука, 1973. – 368 с.*
2. *Широков В.А. Інформаційна теорія лексикографічних систем. – К.: Довіра, 1998. – 331 с.*
3. *Широков В.А. Феноменологія лексикографічних систем. – К.: Наукова думка, 2004. – 327 с.*
4. *Широков В.А. Очерк основных принципов квантовой лингвистики // Бионика интеллекта: научн.-техн. журнал/ – Х.: ХНУРЭ. – 2007. – № 1 (66). – С. 25-32.*
5. *Жюль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Либідь, 2002. – 152 с.*
6. *Бондаренко М.Ф., Чикина В.А., Шабанов–Кушнаренко Ю.П. Модели языка // Бионика интеллекта: научн.-техн. журнал. – Х.: ХНУРЭ. – 2004. – № 1(61). – С. 27-37.*
7. *Ротин И.М. Линейные и билинейные логические операторы и их применение в автоматизированных информационных системах: Дис. ... канд. техн. наук: 05.25.05. – Х., 1994. – 163 с*
8. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Логическая алгебра // Проблемы бионики. – Х.: Основа. – 1991. – Вып. 46. – С. 3-10.*
9. *Вечирская И.Д., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Об общем виде линейных логических преобразований // Сб. научн. тр. международной научно-практической конференции «Дни науки 2005», 15-27 апреля 2005 г. – Днепропетровск. – С. 21-22.*
10. *Маклейн С. Гомология. – М.: Мир, 1966. – 463 с.*
11. *Вечирская И.Д., Дударь З.В., Иванилов А.А., Лещинский В.А. О категорном анализе алгебры предикатов // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – № 20 – С. 38-42.*
12. *О модифицированных категориях / М.Ф. Бондаренко, З.В. Дударь, А.А. Иванилов, В.В. Маникин, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 36-48.*
13. *Вечирская И.Д. Действия над линейными логическими преобразованиями // Новые технологии. – 2005. – № 1-2 (7-8) – С. 162-168.*
14. *Логическая сеть для модели глагольной флексии русского языка / З.В. Дударь, А.А. Иванилов, В.В. Климушев, В.И. Обризан // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Х. – 2006. – 4/2. – С. 80-89.*
15. *Лещинский В.А. Модели бинарных логических сетей и их применение в искусственном интеллекте: Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.23. – Х., 2007 – 159 с.*

Надійшла до редколегії 26.07.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.