УДК 519.859

А.В. Кривуля

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ СЕМЕЙСТВОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рассматривается оптимизационная задача покрытия многоугольной области семейством прямоугольников. В качестве средств математического моделирования трансляционного покрытия используется понятие Г-функции. Строится математическая модель задачи.

математическая модель, покрытие, многоугольная область, семейство прямоугольников, Г-функция

Мотивация и приложения [1] Задачи покрытия имеют различные области применения. В качестве примера можно привести задачи покрытия датчиками в военных сценариях. Целью является найти такое размещение множества обнаруживающих областей, чтобы интересующие точки были бы покрыты. В телекоммуникациях геометрические задачи покрытия возникают в приложениях для мобильной связи. В этом случае требуется определить положения для новых базовых станций (передатчиков), которые учитывают характер спроса пользователей.

При распознавании формы в робототехнике и в графических приложениях и в приложениях по обработке образов иногда полезно представить форму объекта, как набор объектов с более “простой” формой. Однако, имея набор объектов и целевую форму, может оказаться трудным определить, может ли целевая форма быть описана данным набором частей. Целью является получение внешней аппроксимации формы, использующей данные части. Оптимизация запросов в пространственных базах данных является еще одним источником задач покрытия. В этой задаче запрос может соответствовать геометрической области и быть выражен в исходной форме, используя геометрические параметры. Имея множество существующих геометрических, параметризованных областей запросов и набор целевых точек или областей, можно задать вопрос о существовании значений параметров, позволяющих областям запросов покрыть цель. Существуют также задачи размещения и упаковки в производстве, для которых могут быть полезны решения задач покрытия. Одним из примеров может быть “постановка меток” в задаче раскладки выкроек на рулонах ткани в швейной промышленности.

Кроме того, задачи покрытия возникают в ирригации, пожарной безопасности, *вентиляции ванн*, системы воздушного и космического наблюдения, медицине.

Анализ публикаций, посвященных решению 2D задачам покрытия, позволяет сделать следующие выводы. Большинство геометрических задач покрытия, которые можно встретить в литературе являются NP-сложными. В основном, для решения задач покрытия прямоугольных и многоугольных областей используются эвристические методы.

Разработка эффективных методов решения рассматриваемого класса задач требует построения математических моделей, использующих конструктивные средства математического моделирования.

Целью статьи является построение математической модели задачи покрытия многоугольной области семейством прямоугольников.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача покрытия в следующей постановке [2].

Пусть задана компактная связная многоугольная область $\Omega \subset R^2$ и семейство $\Lambda = \{P_i, i = 1,2,...,n\}$ прямоугольников

$$P_i = \{(x,y) \in R^2, -a_i \le x \le a_i, -b_i \le y \le b_i\},$$
$$i = 1, 2,..., n,$$

где R^2 – двумерное арифметическое евклидово пространство.

Расположение Ω и P_i в пространстве R^2 однозначно определяется векторами трансляции $u_0 = (x_0, y_0)$ и $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2,..., n$ соответственно. Полагаем, что область Ω неподвижна и $u_0 = (0,0)$. В дальнейшем прямоугольник P_i, транслированный на вектор u_i, обозначим $P_i(u_i)$, а семейство транслированных прямоугольников $P_i(u_i), i = 1, 2,..., n$ обозначим $\Lambda(u)$, где $u = (u_1, u_2,..., u_n) \in R^{2n}$.

В статье [2] строится математическая модель поставленной задачи при условии, что для каждой пары прямоугольников P_i и P_j выполняется соотношение: $a_i \ne a_j$ и $b_i \ne b_j$, $i < j = 2,...,n$. В данном исследовании рассматривается общий случай, когда ограничение на значение метрических характеристик прямоугольников снимается.

Следуя [2], семейство $\Lambda(u)$ называется покрытием области Ω, если существует вектор $u \in R^{2n}$, такой что

$$\Omega \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i)) = \Omega . \qquad (1)$$

Задача. Необходимо определить, существует ли вектор $u \in R^{2n}$ такой, что семейство $\Lambda(u)$ является покрытием области Ω.

Семейство $\Lambda(u^0)$ является покрытием области Ω, если существует фиксированный вектор $u^0 \in R^{2n}$, такой что $\Omega \subset P(u^0)$, т.е. выполняется соотношение

$$\Omega \bigcap \operatorname{int} H(u^0) = \varnothing , \qquad (2)$$

где $\operatorname{int}(\cdot)$ – внутренность множества $(\cdot)$ [3],

$H(u^0) = R^2 \setminus \operatorname{int} P(u^0)$, $P(u^0) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)$.

Конструктивным средством аналитического описания взаимодействия множества Ω и семейства $\Lambda(u)$ является Γ - функция [2].

Пусть имеется функция

$$F(u,v) = \begin{cases} F_1(u,v) \text{ если } u \in R_1^{2n}, \\ F_2(u,v) \text{ если } u \in R_2^{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_\eta(u,v) \text{ если } u \in R_\eta^{2n}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $R^{2n} = \bigcup_{k=1}^{\eta} R_k^{2n}$ – разбиение пространства R^{2n}, $\eta \le K^\sigma$, $\sigma = \frac{1}{2} n(n-1)$. Здесь $K = 11$, если $a_i \ne a_j$ и $b_i \ne b_j$; $K = 7$, если $a_i = a_j$ и $b_i \ne b_j$ или $a_i \ne a_j$ и $b_i = b_j$; $K = 5$, если $a_i = a_j$ и $b_i = b_j$.

По определению функция $F(u,0)$ называется Γ-функцией для множеств Ω и $P_i(u_i)$, $i = 1,2,...,n$ и обозначается $\Gamma(u)$, т.е.

$$\Gamma(u) = \begin{cases} \Gamma_1(u) \text{ если } u \in R_1^{2n}, \\ \Gamma_2(u) \text{ если } u \in R_2^{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Gamma_\eta(u) \text{ если } u \in R_\eta^{2n}. \end{cases} \qquad (4)$$

Таким образом, если

$$\Gamma(u^*) = \max \Gamma(u) \ge 0 ,$$

тогда множества $P_i(u_i^*)$, $i = 1,2,...,n$ покрывают область Ω.

Определение Γ - функции основано на понятии Φ -функции, поскольку

$$F_i(0,v) = \Phi_i(v), i = 1,2,...,\theta_m .$$

Заметим, что Φ -функция вида $\Phi_0(v) = \min\{\Phi_{0j}(v), j = 1,2,...,\lambda_q\}$ для множеств $h \in H_q^{2n}(u)$ и Ω при любом $u \in R_q^{2n}$ имеет один и тот же вид [4], где $\Phi_{0j}(v)$ – Φ -функция для объектов Ω и C_{i_j}, $j = 1,2,...,\lambda_q$, $v = (x,y)$.

Рассмотрим функции $\Phi_{0j}(v)$, полагая, что множество Ω – выпуклое и описывается системой линейных неравенств.

Обозначим вершины области Ω через (x^j, y^j), $j = 1,2,...,t$.

В качестве базовых объектов C_i в данном исследовании рассматриваются полуплоскости, конусы, полубесконечные полосы и прямоугольники.

Из [5] следует, что Φ -функции для Ω и множеств C_i, $i = 1,2,...,13$, имеют в общем случае следующий вид соответственно:

$$\Phi_j(v) = \max\{f_{ji}(v), i = 1,2,...,M_j\} ,$$

где – M_j число сторон многоугольника, который является границей суммы Минковского множеств $\Omega(0)$ и $C_i(0)$, т.е. $\operatorname{fr}\{\Omega(0) \oplus C_i(0)\}$.

Пусть $u^0 \in \operatorname{int} R_q^{2n}$. Тогда Φ -функция для множеств Ω и $h(u^0) \in H_q^{2n}(u)$ имеет следующий вид

$$\Phi_q(v) = \min\{\Phi_{qj}(v), j = 1,2,...,\lambda_q\} , \qquad (5)$$

где $\Phi_{qj}(v)$ – это Φ -функция для множеств Ω и $C_{i_j}^0 = C_{i_i}(u^0)$.

Таким образом, если $\Phi_q(v^*) = \max \Phi_q(v) \ge 0$, тогда семейство $\Lambda(u^0)$, заданное соотношением (2), является покрытием области Ω.

Согласно [2], для любого $u \in R_k^{2n}$ множества $C_{i_i}(u_{i_i})$, $j = 1,2,...,\lambda_q$ имеют одинаковую пространственную форму, которые в общем случае отличаются только метрическими характеристиками. Это означает, что Φ -функции $\Phi_{qj}(v), j = 1,2,...,\lambda_q$ для любого $u \in \operatorname{int} R_q^{2n}$ имеют одинаковый вид и отличаются только значениями коэффициентов. Определим функцию $F_q(u,v)$, рассматривая u как переменную в функциях $\Phi_{qj}(v), j = 1,2,...,\lambda_q$, т.е.

$$F_q(u,v) = \min\{F_{qj}(u,v), j = 1,2,...,\lambda_q\} . \qquad (6)$$

Легко видеть, что если

$$F_q(u^*, v^*) = \max F_q(u, v) \geq 0,$$

то множества Ω и $h^*(v^*)$ не пересекаются, то выполняется условие (3), т. е.

$$\Omega \bigcap \operatorname{int} H(u^*) = \varnothing.$$

Пусть $u^0 \in R_m^{2n}$ и $h(u^0) \in H_m^{2n}(u)$. Тогда множество h^0 может быть представлено как пересечение двусвязных множеств

$$h_i^0 = h_i(u^0), \; i = 1, 2, ..., \theta_m.$$

Определим следующую функцию

$$\Psi_m(v) = \min\{\Phi_{mi}(v), i = 1, 2, ..., \theta_m\}, \qquad (7)$$

где $\Phi_{mi}(v)$ – Φ-функции для множеств Ω и h_i^0, $i = 1, 2, ..., \theta$.

Это значит, что функции $\Phi_{mj}(v)$, $i = 1, 2, ..., \theta_m$ имеют вид Φ-функций $\Phi_q(v)$, заданных соотношением (5).

Как следует непосредственно из (7), $\Psi_m(v) < 0$ для всех $v \in R^2$.

Функция $F_m(u, v)$ задается так:

$$F_m(u, v) = \min\{F_{mi}(u, v), i = 1, 2, ..., \theta_m\}, \qquad (8)$$

где $F_{mi}(u, v)$ функция, генерируемая Φ-функциями $\Phi_{mi}(v), i = 1, 2, ..., \theta$.

Таким образом, $\max F_m(u, v) < 0$, при условии $u \in R_m^{2n}$, т. е. множество Ω не может принадлежать множеству $P(u)$ для любого $u \in R_m^{2n}$.

Перечислим некоторые важные свойства Γ-функции [2].

Γ-функция – разрывная функция.

Кроме того, Γ-функция для множеств Ω и $P_i(u_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, кусочно-гладкая на области

$$G = (\bigcup_{k=1}^{\eta} R_k^{2n}) \setminus Q,$$

где Q состоит из точек $u \in \operatorname{fr} R_k^{2n}$, $k = 1, 2, ..., \eta$, таких что, по крайней мере одна пара координат

$$(u_i, u_j) \in \operatorname{fr} R_{ij}^1 \bigcap \operatorname{fr} R_{ij}^q,$$

$$i \neq j, \; i, j = 1, 2, ..., n,$$

$$q \in \{2, 3, ..., 11\}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи может быть сведено к следующей задаче:

$$\max \Gamma(u), \text{ при условии } u \in R^{2n}. \qquad (9)$$

При этом процесс решения может быть завершен, как только $\Gamma(u^j) \geq 0$, где u^j определяется на итерации j.

Так как множество Ω – односвязное, то задача (9) может быть представлена следующим образом:

$$\chi^* = \max\{\chi_{i_q}^*, q = 1, 2, ..., \eta_1\}, \qquad (10)$$

$$\chi_{i_q}^* = \Gamma_{i_q}(u^*) = \max_{u \in R_q^{2n}} \Gamma_{i_q}(u), \quad q = 1, 2, ..., \eta_1 < \eta, \qquad (11)$$

где η_1 – это число функций вида (6).

Следует заметить, что процесс решения заканчивается, как только выполняется неравенство $\chi_{i_q}^* \geq 0$.

Выводы

Таким образом, модель (10) – (11) позволяет построить дерево решения, концевым вершинам которого соответствуют функции $\Gamma_{i_q}(u)$, $q = 1, 2, ..., \eta_1$.

Список литературы

1. *Daniels K., Inkulu R. An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Scince Technical Report. – Number 2001-001.*
2. *Stoyan Y. Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Проблемы машиностроения. – 2007 - Т.10, № 2. - С. 67-82.*
3. *Kuratowski K. Topology // Vol. I: New York and London. – Academic press, 1966. – P. 594.*
4. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Φ - function for complex 2D objects // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – Volume 2, Number 1. - P. 69-84.*
5. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Φ - function for 2D primary objects // Studia Informatica, Paris, University. - 2002. - Vol. 2, № 1. - P. 1-32.*

Поступила в редколлегию 2.08.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Т.Е. Романова, Институт проблем машиностроения НАНУ, Харьков.