УДК 623.021 : 005

В.Б. Кононов

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМ ВОЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ БОЯ И ОПЕРАЦИИ

В статье изложено общая математическая модель динамики боя между разнородными боевыми средствами противоборствующих группировок и частный случай, описывающий бой, в котором и наносится удар по плацдарму противника.

математическая модель, динамика боя, операция, противоборствующие группировки

Введение

Постановка задачи. Математический анализ моделей военных действий позволяет приближённо оценить влияние таких факторов как огневая мощь и количественный состав применяемых боевых средств, темпы наращивания сил для ответного удара, соотношение сил и средств, темпы восстановления боевых средств и т.д. Для принятия решения при планировании операций командованию целесообразно учитывать рекомендации, которые можно получить при просчёте математических моделей ведения боевых действий. Просчет математических моделей ведения боевых действий при планировании и последующем ведении боевых действий представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины АСУ войсками и оружием.

Анализ литературы. В известной литературе, посвящённой исследованию операций в военном деле [1 – 5] рассматриваются вопросы применения исследования операций к решению задач управления войсками. При этом основное внимание уделено вероятностным оценкам, с помощью которых определяются вероятности выполнении боевых задач конфликтующими группировками. Наиболее распространёнными оценками эффективности систем вооружения являются оценки типа «сдерживающего эффекта» [6 – 9]. При ведении боя и операции на поражение плацдарма противника в качестве меры оценки эффективности различных систем вооружения используется площадь поражения при огневом воздействии. Однако в этих работах не изложен весь спектр математических моделей форм военных действий и их применение для исследования боя и операции.

Целью статьи является разработка общей математической модели динамики боя между разнородными боевыми средствами противоборствующих группировок, позволяющей оценить эффективность таких составных частей боя и операции как удар и огонь.

Основной материал

При разработке модели будем исходить из следующих допущений:

– каждое боевое средство производит пуассоновский поток выстрелов, в случае если оно не поражено;

– суммарная боевая мощь каждой группировки в каждый момент времени пропорциональна математическому ожиданию количества сохранившихся боевых средств;

– каждая из группировок A и B в ходе боя непрерывно пополняется силами резерва.

При построении математической модели динамики боя между разнородными боевыми средствами группировок A и B учтём взаимодействие, маневр, противодействующих группировок.

Построим математическую модель, приняв следующие обозначения: m – количество типов разнородных боевых средств группировки A; n – количество типов разнородных боевых средств группировки B; $x_i(t)\left(i=\overline{1,m}\right)$ – математическое ожидание количества боевых средств i-го типа группировки A, сохранившихся к моменту времени t; $y_j(t)\left(j=\overline{1,n}\right)$ – математическое ожидание количества боевых средств j-го типа группировки B, сохранившихся к моменту времени t; $a_{ji}=\lambda_i P_{ji}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – эффективная скорострельность боевого средства i-го типа группировки A по боевому средству j-го типа группировки B; $\lambda_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – средняя скорострельность боевого средства i-го типа группировки A; $P_{ji}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – вероятность поражения одним выстрелом боевым средством i-го типа группировки A боевого средства j-го типа группировки B; $b_{ij}=\mu_j Q_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – эффективная скорострельность боевого средства j-го типа группировки B по боевому средству i-го типа группировки A; $\mu_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – средняя скорострельность боевого средства j-го типа группировки B; $Q_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – вероятность поражения одним выстрелом боевым средством j-го типа группировки B боевого средства i-го типа группировки A;

$\alpha_{ji}(t)\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – доля боевых средств i-го типа группировки A, противодействующих боевым средствам j-го типа группировки B в момент времени t; $\beta_{ij}(t)\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – доля боевых средств j-го типа группировки B, противодействующих боевым средствам i-го типа группировки A в момент времени t; $c_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, $d_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, $B_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – заданные положительные числа, определяемые ограничениями на темпы поступления резерва и общее количество имеющихся боевых средств группировок A и B соответственно; $u_i(t)\left(i=\overline{1,m}\right)$ – интенсивность поступления боевых средств i-го типа группировки A; $v_j(t)\left(j=\overline{1,n}\right)$ – интенсивность поступления боевых средств j-го типа группировки B; $x_i^0\left(i=\overline{1,m}\right)$ – количество боевых средств i-го типа группировки A до начала боя и операции; $y_j^0\left(j=\overline{1,n}\right)$ – количество боевых средств j-го типа группировки B до начала боя и операции; T– время ведения боевых действий.

Обозначим через $\Delta x_i = x_i(t+\Delta t)-x_i(t)$ приращение величины $x_i(t)$ за время Δt. Будем исходить из следующих предположений: за время Δt среднее значение количества боевых средств i-го типа группировки A уменьшится на величину $P_B(x_i)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)b_{ij}y_j(t)\Delta t$, определяемую потерями от воздействий боевых единиц всех типов группировки B, и увеличится на величину поступивших за этот отрезок времени единиц резерва $u_i(t)\Delta t$, т.е.

$$\Delta x_i = -P_B(x_i)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)b_{ij}y_j(t)\Delta t + u_i(t)\Delta t;\ i=\overline{1,m},$$

где $P_B(x_i)$ – вероятность обнаружения x_i боевых средств i-го типа группировки A средствами обнаружения группировки B.

Разделив обе части последнего соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения математического ожидания каждого из количеств боевых средств i-го типа группировки A, сохранившихся на момент времени t:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -P_B(x_i)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)b_{ij}y_j(t)+u_i(t);\ i=\overline{1,m}.$$

Аналогично для $y_j(t)$ имеем

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = -P_A(y_j)\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)a_{ji}x_i(t)+v_j(t);\ i=\overline{1,n},$$

где $P_A(y_j)$ – вероятность обнаружения y_j боевых средства j-го типа группировки B средствами обнаружения группировки A.

Введение в модель параметров $\alpha_{ji}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ позволяет учесть взаимодействие, маневр и противодействие разнородных боевых средств обеих группировок. Таким образом, система уравнений динамики боя для случая разнородных групп боевых средств имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = -P_B(x_i)\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)b_{ij}y_j(t)+u_i(t);\ i=\overline{1,m}; \\ \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -P_A(y_j)\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)a_{ji}x_i(t)+v_j(t);\ j=\overline{1,n} \end{cases} \quad (1)$$

при начальных данных

$$x_{i(0)}=x_i^0;\ i=\overline{1,m};\ y_{j(0)}=y_j^0,\ j=\overline{1,n} \quad (2)$$

и ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}(t)=1;\ j=\overline{1,n};\ \beta_{ij}(t)\ge 0;\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}(t)=1;\ i=\overline{1,m};\ \alpha_{ji}(t)\ge 0;\ j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m};$$

$$0\le u_i(t)\le c_i;\ i=\overline{1,m};\ 0\le v_j(t)\le d_j;\ j=\overline{1,n}; \quad (3)$$

$$\int_0^T u_i(t)dt\le A_i;\ i=\overline{1,m};\ \int_0^T v_j(t)dt\le B_j;\ j=\overline{1,n}.$$

Предложенный метод составления модели применим и для частного случая, когда оперирующая сторона наносит удары по плацдармам противника. Предположим, что плацдармы группировок A и B первоначально находятся в неповреждённом состоянии. Огневое взаимодействие группировки A по плацдарму группировки B за время Δt уничтожает боевые средства на некоторой элементарной площади Δs_B, которая составляет известную долю от площади плацдарма s_B.

В качестве характеристики интенсивности огневого взаимодействия введём средний относительный ущерб в единицу времени, который наносит одна группировка другой в начале боя всеми боевыми средствами. Тогда средний ущерб за время Δt, который нанесёт группировка A по плацдарму стороны B, будет равен

$$R_A\Delta t = \frac{\Delta s_B}{s_B},$$

где R_A – средний относительный ущерб за единицу времени, наносимый в начале боя группировкой A по плацдарму группировки B. Аналогичной характеристикой описывается интенсивность огневого воздействия группировки B по плацдарму стороны A.

Для определения R_A и R_B необходимо найти суммарную среднюю относительную площадь всех разрушений, которые могут нанести все боевые средства за произвольно выбранную единицу времени.

Выделим следующие основные факторы, от которых зависит средний относительный ущерб за единицу времени: количество боевых средств; скорострельность боевых средств; вероятность достижения цели носителями боеприпасов; радиус зоны поражения объектов. Пусть, как и ранее, m и n – количество типов боевых средств группировок А и В соответственно. Пусть известны: – $a_i, b_j \left(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right)$ – скорострельности боевых средств i-го типа группировки А и боевых средств j-го типа группировки В; – $p_i, q_j \left(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right)$ – вероятности достижения цели для боевых средств i-го и j-го типа группировок А и В соответственно; – $s_i^A, s_j^B \left(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right)$ – площади разрушений, достаточные для поражения находящихся на них боевых средств, производимые соответственно единицей боевых средств i-го и j-го типа группировок А и В; – $c_i, d_j \left(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right)$ – количество боевых средств i-го и j-го типа группировок А и В. Тогда средний относительный ущерб за единицу времени, наносимый в начале боя группировки А по плацдарму группировки В, равен

$$R_A = \frac{1}{s_B}\sum_{i=1}^{m} a_i p_i c_i s_i^A .$$

Аналогично, $R_B = \frac{1}{s_A}\sum_{j=1}^{n} b_j q_j d_j s_j^B$.

Для вывода уравнений динамики боя между двумя группировками будем рассуждать следующим образом. Основной удар за время Δt всеми боевыми средствами группировки В наносит неповреждённому плацдарму стороны А ущерб, равный $R_B \Delta t$. Так как к моменту удара сторона В располагает лишь частью боевых средств, сохранившихся на уцелевшей площади, относительную величину которой обозначим через s_B^0, то необходимо умножить относительный ущерб на s_B^0.

Кроме того, к моменту удара плацдарм группировки А уже частично поражён и новый удар боевых средств группировки В может прийтись (полностью или частично) на уже повреждённую площадь. В связи с этим средний ущерб, наносимый стороной В по плацдарму группировки А, следует умножить на вероятность того, что этот ущерб придется на ещё непоражённую часть плацдарма группировки А. Естественно эту вероятность принять равной средней доле s_A^0 сохранившейся площади плацдарма А. В результате получим следующие выражения для среднего ущерба:

$$\Delta s_A^0(t) = -R_B s_A^0(t) s_B^0(t)\Delta t,$$

откуда и получим уравнение

$$\frac{ds_A^0(t)}{dt} = -R_B s_A^0(t) s_B^0(t).$$

Рассуждая аналогично для группировки В, получим систему дифференциальных уравнений для относительных площадей сохранившейся части плацдармов в процессе боя и операции:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_A^0(t)}{dt} = -\dfrac{1}{s_A}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j q_j d_j s_j^B \cdot s_A^0(t) s_B^0(t); \\ \dfrac{ds_B^0(t)}{dt} = -\dfrac{1}{s_B}\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i p_i c_i s_i^A \cdot s_B^0(t) s_A^0(t), \end{cases} \tag{4}$$

при начальных данных

$$s_A^0(0) = 1;\ s_B^0(0) = 1. \tag{5}$$

Полученная модель, описываемая соотношениями (4) – (5), позволяет оценить эффективность военных действий по поражению плацдарма противника.

Выводы

1. В статье описана общая математическая модель военных действий, учитывающая взаимодействие, маневра, противодействие разнородных боевых средств обеих группировок, поступление резервов в ходе боя и операции.

2. Предложена модель боя и операции, ведущегося по плацдарму противника.

3. Предложенные математические модели целесообразно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

Список литературы

1. Lanchester F. Aircraft in warfare. – London, 1916. – 120 p.

2. Основы исследования операций в военной технике / Под ред. Ю.В. Чуева. – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.

3. Осинский Л.М. Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушной обороны. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.

4. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.

5. Справочник по исследованию операций / Под общ. ред. Ф.А. Матвейчука – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.

6. Спицнадель В.Н. Основы системного анализа. – С.-Пб.: Бизнес-пресса, 2000. – 326 с.

7. Кононов В.Б., Кушнерук Ю.И., Евстрат Д.И. Площадная интерпретация модели конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2001. – Вип. 5 (15). – С. 39-41.

8. Кононов В.Б. Алгоритм работы системы управления при решении задачи оптимального распределения разнородных средств оперирующих сторон при заданном времени и отсутствии резерва // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2003. – Вип. 6. – С. 55-62.

9. Кушнерук Ю.І., Кононов В.Б., Євстрат Д.І. Оптимальне планування процесів пошуку об`єктів // Ракетно-космічна техніка. – Х.: ХВУ, 1999. – Вип. 1. – С. 71-73.

Поступила в редколлегию 14.11.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. П.А. Качанов, Харьковский университет Воздушных Сил, Харьков.