

УДК 621.37 : 621.391

С.Г. Рассомахин

*Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТОЧНОСТИ ПЕРЕДАЧИ ЧИСЛОВЫХ КОДОВ ПО ГАУССОВЫМ КАНАЛАМ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ

*Рассмотрено решение оптимизационной задачи, минимизирующее дисперсию ошибки приема числовых кодов в условиях действия гауссова флуктуационного шума. Получены формулы для оценки функций правдоподобия и дисперсии ошибки при различных отношениях сигнал/шум, обеспечиваемых для позиционно-значимых разрядов чисел. Исследована возможность повышения точности за счет различного распределения векторов амплитудных коэффициентов для каждого из передаваемых чисел. Дано объяснение физической сущности явления, приводящего к дифференциации среднеквадратической ошибки восстановления чисел натурального ряда, передаваемых в одинаковых условиях.*

*позиционные числовые коды, средний квадрат ошибки, асимметрия функций правдоподобия, распределение энергии*

### Введение

**Постановка проблемы.** Процессы, связанные с обработкой и передачей количественной информации, являются характерными для большинства автоматизированных систем управления и связи, а также для телеметрических и радиолокационных систем. Качественные характеристики управления во многом определяются корректностью данных, передаваемых и принимаемых в условиях возмущающих факторов внешней среды. Поэтому актуальность совершенствования методов и средств рационального представления и эффективной обработки числовых данных в условиях помех не вызывает сомнений. Результаты исследований, представленные в данной работе, посвящены уточнению некоторых представлений о характеристиках числовых систем, использующих неравномерную энергетическую избыточность, как средство снижения среднеквадратической ошибки передачи чисел по гауссовым каналам.

**Анализ последних исследований.** Фундаментальные основы теории числовой передачи данных созданы К. Шенноном в рамках общей теории информации [1]. Различные информационно-теоретические аспекты рассматриваемых вопросов составляют элементы теории нормы искажения (Rate-Distortion Theory), активно развиваемой в настоящее время. Интересные технические приложения и особенности оперирования с числовыми данными в каналах с помехами при использовании различных видов манипуляционного кодирования и модуляции достаточно подробно изложены в работах [2 – 5]. Данная статья является продолжением исследований, направленных на более глубокое изучение особенностей и явлений, свойственных передаче коли-

чественной информации и числовых помехоустойчивых кодов. В частности, основное внимание уделено оптимизации передачи по критерию минимума среднеквадратической ошибки восстановления чисел при ограничении на среднюю мощность передатчика. Несмотря на достаточную традиционность задачи (в общем виде она рассмотрена достаточно давно [2, 3]), настоящая работа содержит ряд оригинальных, по мнению автора, моментов, связанных с углубленным изучением асимметрии функций правдоподобия при неравномерном распределении энергии между значащими разрядами чисел в двоичном канале. Полученные аналитические выражения и графики дают наглядное представление о характере искажения числовых кодов в гауссовых каналах. При этом своеобразным "катализатором" и источником искажений становится явление, аналогичное "центробежному возрастанию ошибки" в каналах с равномерным распределением энергии между разрядами передаваемых чисел.

**Целью данной работы** является математическое описание процесса искажения числовых кодов при восстановлении их на выходе гауссова канала, а также углубленное изучение последствий асимметрии функций правдоподобия для чисел, расположенных в различных участках допустимого диапазона при неравномерной энергетической защите позиционных разрядов.

### Основная часть

В предыдущих работах [4, 5], посвященных анализу вероятностных свойств процесса передачи числовых позиционных кодов, показано, что простое лексикографическое представление чисел в гауссовых каналах при использовании оптимально-

го когерентного приема двоичных сигналов с фазовой манипуляцией вызывает появление систематической ошибки особого вида. Природа этой ошибки вызвана асимметрией функций правдоподобия, которая линейно нарастает при приближении чисел к границам диапазона на числовой оси. Поэтому распределение среднего квадрата ошибки восстановления чисел имеет вид параболы с минимумом в центре диапазона. Характер возникающей ошибки и природа ее возникновения позволяют с полным основанием называть ее центробежной.

Покажем теперь, что применение методов неравномерной энергетической защиты значащих разрядов приводит к существенному изменению поведения среднего квадрата ошибки в пределах диапазона передаваемых чисел. В условиях ограниченной средней мощности передатчика, энергия, затрачиваемая на передачу каждого из двоичных чисел с постоянным числом значащих разрядов, должна оставаться фиксированной. Однако, в пределах одного кодового слова, целесообразно перераспределение мощности (амплитуды) несущей частоты в соответствии с весом соответствующих позиционных разрядов передаваемого числа [3, 5].

Алгоритм формирования последовательности ФМ сигналов модулятором, а точнее распределение амплитуд несущих колебаний в условиях "жесткого" правила принятия решения демодулятором, определяется решением оптимизационной задачи [5]. Формулировка этой задачи для  $n$ -разрядного двоичного числа подразумевает нахождение вектора амплитудных коэффициентов  $\vec{A} = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ , обеспечивающего минимум целевой функции

$$Tg = \min_{\vec{A}} \langle \delta_c^2 \rangle, \tag{1}$$

при ограничивающем условии

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i)^2 = n. \tag{2}$$

При этом функцией минимизации в (1) является средний (по диапазону) квадрат ошибки восстановления передаваемых по гауссову каналу чисел:

$$\delta_c^2 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i-1} \operatorname{erfc} \left( \frac{a_i}{\sqrt{N_0}} \right), \tag{3}$$

где  $N_0$  – спектральная плотность белого гауссова шума. Задача (1) – (3), подразумевает равную вероятность появления на входе передатчика всех чисел из заданного ограниченного диапазона и легко решается численным методом с использованием встроенных процедур системы MathCAD. В таблице 1 представлены результаты оптимизации, полученные для байтового (8-разрядного) числа при нескольких значениях отношения сигнал/шум (для фиксированной средней энергии, затрачиваемой на передачу бита).

Таблица 1

Амплитудные коэффициенты  $a_i$  при оптимальном распределении энергии

$i$ $E/N_0$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0,004	0,018	0,070	0,264	0,696	1,165	1,565	1,907
2	0,026	0,103	0,335	0,675	0,981	1,240	1,465	1,666
3	0,103	0,315	0,592	0,835	1,042	1,223	1,384	1,531
4	0,265	0,505	0,717	0,897	1,054	1,194	1,322	1,440
5	0,423	0,617	0,782	0,924	1,052	1,167	1,274	1,373

Основным способом описания случайных преобразований передаваемых чисел является нахождение функций правдоподобия  $f(Y|k)$ , дающих распределение вероятностей выхода канала  $Y$  при фиксированном состоянии входа  $k = 0, \dots, 2^n - 1$ . Для этого определим вложенный вектор взаимных расстояний Хэмминга между кодовыми словами, соответствующими числам в  $n$ -мерном пространстве:  $\vec{\Theta} = ((\theta_m)_j)_i$ ,  $m = \overline{0, n-1}$ ;  $i, j = \overline{0, 2^n - 1}$ . Элементы этого вектора являются булевыми переменными и позиционируют различия между одноименными битами двоичных представлений чисел допустимого диапазона:

$$((\theta_m)_j)_i = (b_i)_m \oplus (b_j)_m, \tag{4}$$

где  $b_i, b_j$  – двоичное представление чисел  $i$  и  $j$ , соответственно;  $(b_i)_m$  – значение  $m$ -го бита (0 или 1) числа  $i$ . Формализация набора взаимных расстояний (4) дает возможность определить функцию правдоподобия, соответствующую передаваемому числу  $k$  в виде строки, содержащей вероятности соответствующих переходов

$$f(Y|k) = \{f_0(Y|k), \dots, f_{2^n-1}(Y|k)\}, \tag{5}$$

где

$$f_j(Y|k) = \prod_{i=0}^{n-1} p_i^{((\theta_k)_j)_i} \cdot \prod_{m=0}^{n-1} \left[ (1-p_m)^{1-(\theta_k)_j_m} \right]; \tag{6}$$

$p_i = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{a_i}{\sqrt{N_0}} \right)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  – вероятности приема с ошибкой соответствующих бит числа.

Полученная формула (6) является аналогом биномиального закона распределения (Бернулли) для случая не равновероятного искажения бит в гауссовом канале при неравномерном распределении энергии.

Вычисления функций правдоподобия применением выражений (5) и (6), дают возможность анали-

за свойств искажающего действия канала. На рис. 1 представлено несколько примеров функций  $f(Y|k)$ , рассчитанных для "плохого" канала при отношении сигнал/шум, равном единице.

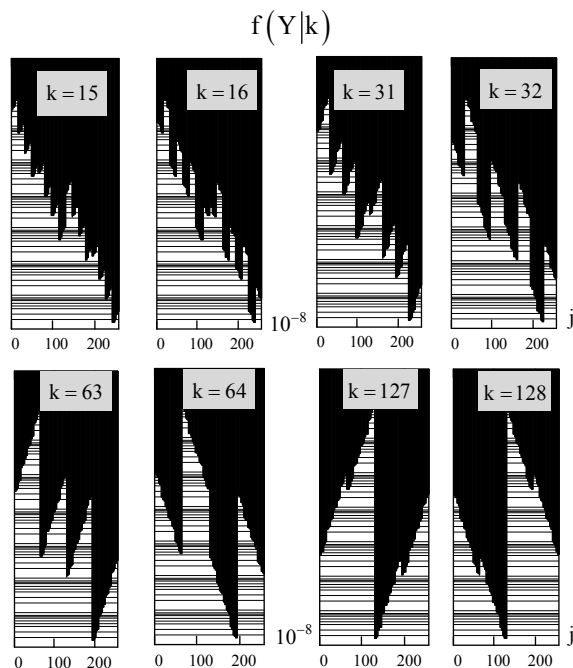


Рис. 1. Функции правдоподобия при неравномерном распределении энергии между битами чисел

На рисунке показаны функции правдоподобия соседних чисел из различных участков диапазона при передаче байтового числа. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть существенные (скачкообразные) изменения вида  $f(Y|k)$ , происходящие в области значений  $k$ , совпадающих с целой степенью числа "2" – основания системы счисления при представлении канального кода чисел. Из анализа данных на рис. 1 следует, что все функции правдоподобия, в той или иной степени, являются асимметричными. Это свойство вызывает смещение математического ожидания функций  $f(Y|k)$  от величины  $k$ , что, в свою очередь, является источником систематической ошибки при восстановлении чисел на выходе канала.

Очевидно, что математическое ожидание систематической ошибки (смещение оценки) можно определить для каждого числа  $k$ , используя выражение

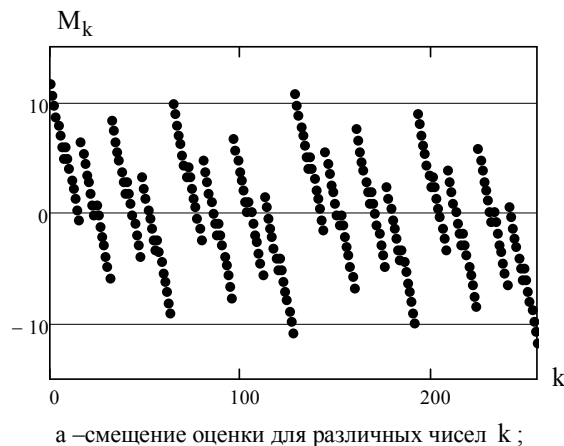
$$M_k = \sum_{i=0}^{2^n-1} i \cdot f_i(Y|k) - k. \quad (7)$$

При этом средний квадрат ошибки приема чисел составляет

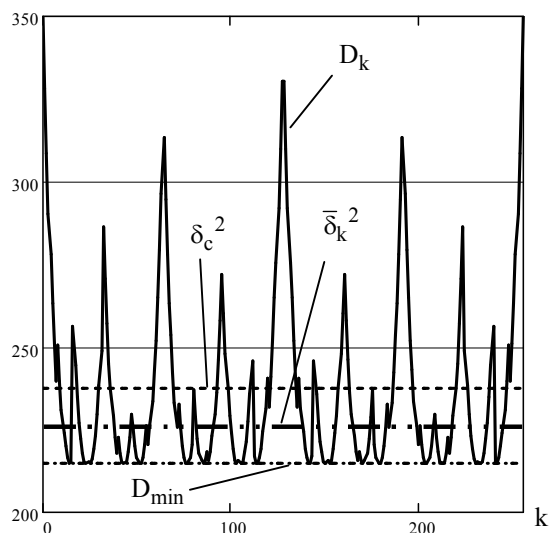
$$D_k = \sum_{i=0}^{2^n-1} (k-i)^2 f_i(Y|k). \quad (8)$$

Дисперсия функций правдоподобия, которая может быть вычислена при учете смещения оценки (7), является одинаковой для любого  $k$  и характеризует минимально достижимое значение среднего квадрата ошибки:

$$D_{\min} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (k-i+M_k)^2 f_i(Y|k). \quad (9)$$



а – смещение оценки для различных чисел  $k$ ;



б – фактический  $D_k$ , средний  $\delta_c^2$  и минимальный  $D_{\min}$  квадрат ошибки;

Рис. 2. Показатели точности восстановления чисел для гауссова канала при неравномерном распределении энергии между битами двоичного кода

На рис. 2 показаны зависимости смещения оценки (7) (рис. 2, а) и средних мощностей ошибки восстановления (8) и (9) (рис. 2, б) от значения байтового числа в условиях, аналогичных рис. 1. Анализ зависимостей  $M_k$  и  $D_k$  свидетельствует о том, что смещения оценки чисел, проявляющиеся периодически на числовой оси, приводят к существенному возрастанию величины среднего квадрата ошибки. Учитывая не равнозначные условия передачи

различных чисел при наличии смещения оценок, небольшого уменьшения  $D_k$  и  $\delta_c^2$  можно добиться, сформулировав задачу оптимизации перераспределения энергии для каждого из двоичных кодовых слов (чисел) в отдельности. В этом случае целевая функция имеет вид

$$Tg_k = \min_B \langle \delta_k^2 \rangle \quad (10)$$

при  $\bar{B} = \{b_0, \dots, b_n\}$

и ограничивающем условии

$$|\bar{B}|^2 = n. \quad (11)$$

Функция минимизации в (10) определяется

$$\delta_k^2 = \sum_{m=0}^{2^n-1} \left\{ (m-k)^2 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{b_i}{\sqrt{N_0}} \right) \right]^{[(\theta_k)_m]_i} \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=0}^{n-1} \left[ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{b_j}{\sqrt{N_0}} \right) \right]^{1 - [(\theta_k)_m]_j} \right\} \quad (12)$$

Таким образом, оптимизация распределения энергии требует решения  $2^n$  задач (10) – (12) для каждого числа из допустимого диапазона. При этом достигаемая величина среднего по диапазону квадрата ошибки составляет

$$\bar{\delta}_k^2 = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \delta_k^2. \quad (13)$$

Величина  $\bar{\delta}_k^2$ , рассчитанная для единичного отношения сигнал/шум, также показана на рис. 2б. Решение задачи (10) – (13) дает определенное приращение точности передачи чисел, монотонно возрастающее с улучшением качества канала. Однако при этом в памяти модулятора должен находиться свой вектор амплитудных коэффициентов для каждого из  $2^{n-1}$  чисел (для половины из общего количества, так как значения векторов зеркально симметричны относительно числа  $2^{n-1}$ ).

Анализ показывает, что величина  $\bar{\delta}_k^2$  является близкой к предельно достижимой при равномерном распределении чисел на входе канала и реализации приема по правилу максимального правдоподобия. Применение замкнутых манипуляционных кодов (кода Грея и двоичного свернутого кода [2]) для представления чисел в канале не улучшает общий результат.

Также следует отметить, что решение оптимизационной задачи (10) – (12) для каждого из чисел в отдельности приводит к получению оптимальных значений векторов амплитудных коэффициентов,

у которых при малом отношении сигнал/шум "вырожденными" (нулевыми) являются амплитуды, соответствующие средним по позиционному весу разрядам, в то время как младшие разряды остаются не вырожденными. Оптимизация "в среднем" (1) – (3) в аналогичных условиях приводит к исчезающим амплитудам сигналов, соответствующих только младшим битам чисел.

## Выводы

Асимметрия функций правдоподобия является неустранимым явлением при передаче без избыточных числовых кодов, приводящим к различной точности восстановления позиционных чисел, расположенных на различных участках числовой оси. Данное явление следует учитывать для корректной оценки ожидаемой точности передачи по каналам с помехами. Метод оптимального распределения энергии модулятора между разрядами чисел позволяет значительно (в 7 – 20 раз при различном качестве канала) уменьшить средний квадрат ошибки восстановления чисел и снизить влияние асимметрии функций правдоподобия. При этом решение оптимизационной задачи отдельно для каждого передаваемого числа дает повышение средней точности восстановления, но требует большего объема памяти модулятора. Предметом дальнейших исследований могут являться методы обработки в демодуляторе при входных распределениях чисел, отличных от равномерных.

## Список литературы

1. Shannon C.E. *A Mathematical Theory of Communication* // *The Bell System Technical Journal*. – July, October, 1948. – Vol. 27. – P. 379-423; 623-656.
2. Величкин А. И. *Теория дискретной передачи непрерывных сообщений*. – М.: Сов. радио, 1970. – 296 с.
3. Терентьев С. Н. *Минимизация среднеквадратической ошибки при передаче количественной информации* // *Труды Института Кибернетики АН УССР*. – 1969. – Вып. 3. – С. 37-41.
4. Рассомахин С.Г., Ткаченко С.А. *Оценка эффективности применения сигналов с фазово-частотной модуляцией* // *Збірник наукових праць Об'єднаного науково-дослідного інституту Збройних Сил*. – Х.: ОНДІ ЗС, 2007. – Вып. 2 (7). – С. 107-120.
5. Рассомахин С.Г. *Синтез оптимального алгоритма передачи числовых позиционных кодов для дискретно-непрерывных каналов с флуктуационным шумом* // *Системы обработки информации*. – Х.: ХУ ПС, 2007. – № 8 (66). – С. 81-84.

Поступила в редколлегию 28.11.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Л.С. Сорока, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.