УДК 53.088(045)

Е.Т. Володарский[1], А.Н. Карпенко[2]

[1]Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина
[2]Национальный авиационный университет, Киев, Украина

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ЗАМЕНЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫМ

Рассматриваются погрешности, возникающие при поиске расширенной неопределенности в случае не выполнения условий центральной предельной теоремы и объединении неопределенностей, основанном на замене результирующего распределения нормальным. Полученные результаты не противоречат тенденциям, упомянутым в Руководстве, и дают количественную оценку возможных погрешностей в результате замены реального результирующего распределения на нормальное. Приведенные значения позволяют на основании требований к точности результата измерения принимать решение о возможности применения более простого способа объединения трех составляющих погрешностей на основе нормального распределения или переходить к более сложным и точным методам, учитывающих реальные законы распределения компонент.

Ключевые слова: *расширенная неопределенность, объединение неопределенностей, ограничения центральной предельной теоремы.*

Введение

При оценке точности результатов измерений одной из основных является задача суммирования погрешностей. Ее решение позволяет оценить комплексное влияние нескольких факторов на результат измерения. Так как влияющие факторы в каждый отдельный момент времени принимают различные значения, т.е. являются случайными величинами, то методы суммирования погрешности основываются на теории вероятности. В последнее время при решении многих прикладных задач концепция погрешности заменяется концепцией неопределенности результата измерений. При технических измерениях [1] в качестве исходной неопределенности используются данные, взятые из нормативной и научно-технической документации, которые представляются в виде стандартной неопределенности по типу В. Для объединения неопределенностей результатов измерений используются те же подходы, что и при объединении погрешностей результатов измерений.

Основной материал

В данной статье рассматривается объединение погрешностей, распределения которых известны априори, т.е. неопределенностей по типу В. На практике широко используются результаты Центральной предельной теоремы, которая гласит, что если имеется линейная функциональная зависимость:

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$$

и все X_i характеризуются нормальным распределением, то результирующее распределение Y также будет нормальным.

Согласно этой теореме, распределение Y может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i E(X_i)$$

и дисперсией

$$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \sigma^2_{X i},$$

где $E(X_i)$ – математическое ожидание X_i, $\sigma^2_{X_i}$ – дисперсия X_i, если X_i взаимно независимы и $\sigma^2(Y)$ много больше любой из составляющих $c_i^2\sigma^2_{X_i}$ даже для случая, когда X_i имеют ненормальное распределение [2].

Однако, как указано в Руководстве по выражению неопределенности измерений (Приложение G.6.5.) [2], в определённых ситуациях, условия, требуемые Центральной предельной теоремой, могут выполняться не достаточно хорошо, и приближение может приводить к неприемлемому результату. Например, если $u_c(y)$ – комбинированная неопределенность, определяется доминирующей составляющей неопределённости с равномерным распределением или количество составляющих, имеющих ненормальное распределение, меньше пяти.

Там же в Руководстве (Приложение G.2.2) указано, что свертка трех одинаковых равномерных распределений, представляющих собой пример резко отличных от нормальных распределений, является приблизительно нормальной. Таким образом, в определенных ситуациях, в зависимости от требуемой точности, результирующее распределение может быть принято как приблизительно нормальное, в других ситуациях нет. Общие тенденции упомянуты в Руководстве (Приложение G.2.2) как следствия

Центральной предельной теоремы: сходимость будет более быстрой, если значения $c_i^2\sigma^2_{X_i}$ будут ближе друг к другу (на практике это равноценно тому, что все входные оценки x_i вносят соизмеримые неопределённости в суммарную неопределённость оценки измеряемой величины Y); чем “ближе” распределения вероятностей X_i к нормальному, тем меньшее количество составляющих X_i потребуется, чтобы обеспечить более точную аппроксимацию результирующего распределения величины Y нормальным.

Рассмотрим, как изменяется неопределенность оценки результата при замене реального распределения на нормальное в случае объединения трех и четырех составляющих неопределенности. Решение поставленной задачи рассматривается на примере объединения наиболее широко используемых на практике законов распределения плотности вероятности: равномерного, нормального, трапецеидального (соотношение основ 1:2), Лапласа, Симпсона и арксинусоидального законов.

Сначала рассмотрим объединение трех составляющих. В процессе исследования сравнивались доверительные интервалы ($P_Д = 0,90$, $P_Д = 0,95$, $P_Д = 0,99$), полученные на основании реальной свертки различных комбинаций исследуемых законов I, с доверительными интервалами I_H, рассчитанными в предположении, что результирующий закон является нормальным распределением с параметрами $m_H = m_1 + m_2 + m_3$, $\sigma_H = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$, где m_1, m_2, m_3 - значения математических ожиданий составляющих, а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ их среднеквадратические отклонения. Предметом анализа является $\delta = \left(\frac{I_H}{I} - 1\right) \cdot 100\%$ – относительная погрешность, которая возникает при расчете доверительных интервалов с предположением о нормальности закона распределения композиции трех составляющих неопределенности. Полученные результаты сгруппированы в зависимости от закона распределения доминирующей составляющей. При этом критерий ничтожной погрешности ограничивает диапазон возможных соотношений СКО. Так, если $\sigma_1 \le \sigma_2 \le \sigma_3$, то мы не рассматриваем ситуации, когда соотношение $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} > 3$, так как в этом случае меньшей составляющей можно пренебречь. В случае, когда $\sigma_2 \approx \sigma_3$, то для выполнения условий критерия ничтожной погрешности достаточно выполнения соотношения $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} > 2,4$. Результаты исследования показывают, что относительная погрешность принимает свое максимальное значение, когда $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$ и $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \to 3$. Это объясняется тем, что в этом случае доминирующий закон имеет наибольшее влияние, т.е. если вторая по значению составляющая не равна минимальной, а имеет промежуточное значение, то относительная погрешность будет меньше. Чем ближе вторая составляющая по значению к доминанте, тем меньше влияние доминирующей составляющей на вид результирующее распределения, т.е. тем меньше результат объединения отличается от нормального. Исходя из приведенных выше утверждений, при рассмотрении объединения четырех составляющих мы исследуем лишь наихудший вариант, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, а σ_4 изменяется от 1 до 3. Полученные результаты анализа представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Относительная погрешность при объединении трех составляющих для различных доминирующих законов

Закон / $P_Д$	Равномерный	Симпсона	Лапласа	Арксинусоидальный
$P_Д = 0,90$	3%	1%	6%	7%
$P_Д = 0,95$	9,2%	2,6%	6%	14%
$P_Д = 0,99$	21%	9,5%	6%	28%

Таблица 2

Относительная погрешность при объединении четырех составляющих для различных доминирующих законов

Закон / $P_Д$	Равномерный	Симпсона	Лапласа	Арксинусоидальный
$P_Д = 0,90$	2%	1%	5,5%	4%
$P_Д = 0,95$	7%	2%	5%	10%
$P_Д = 0,99$	16%	7,5%	4,5%	22%

Из анализа приведенных результатов следует, что в случае объединения трех составляющих неопределенности, среди которых доминанта распределена по закону Симпсона, а две другие составляющие распределены по любой комбинации из нормального, равномерного и трапецеидального законов, можно при расчете доверительного интервала с вероятностью 0,90 использовать квантильный множитель для нормального закона, что приведет к погрешности не более 1%. При увеличении доверительной вероятности значение относительной погрешности увеличивается, а с увеличением количества объединяемых составляющих – уменьшается. Для четырех составляющих определение доверительного интервала с вероятностью 0,90 с использованием квантильного множителя для нормального закона не приведет к погрешности более 5,5% для рассматриваемых наиболее широко встречаемых в практической деятельности распределений вне зависимости от характера распределения доминанты и соотношения между СКО составляющих.

Такой же вывод можно сделать при определении длины доверительных интервалов для вероятности 0,90 и 0,95, когда доминирующая составляющая распределена по закону Симпсона, погрешность при этом будет не более 2,6%.

Такие результаты для закона Симпсона объясняются его близостью по форме к нормальному закону, и как было упомянуто в Руководстве, в этом случае сходимость лучше.

В случае, когда объединяемые составляющие имеют одинаковый вес (3, 4 составляющих), причем хотя бы одна из них имеет нормальное распределение, то относительная погрешность для вероятности 0,90 не превышает 3,5% при любых комбинациях рассматриваемых законов, для вероятностей 0,95 и 0,99 погрешность не превышает 4% и 7% соответственно.

Кроме того, так как закон Симпсона и равномерный закон являются частными случаями для трапецеидального закона, то можно утверждать, что при любых соотношениях оснований в случае доминирования составляющей с трапецеидальным законом погрешность не будет превышать 3% при объединении трех составляющих с уровнем доверия 0,90. Также, как видно из табл. 1, 2, объединение трех или четырех составляющих с расчетом расширенной неопределенности с доверительной вероятностью 0,99 и 0,95, используя квантильный множитель нормального закона, приведет к значительным погрешностям.

Выводы

Таким образом, полученные результаты не противоречат тенденциям, упомянутым в Руководстве, и дают количественную оценку возможных погрешностей в результате замены реального результирующего распределения на нормальное. Приведенные значения позволяют на основании требований к точности результата измерения принимать решение о возможности применения более простого способа объединения трех составляющих погрешностей на основе нормального распределения или переходить к более сложным и точным методам, учитывающих реальные законы распределения компонент.

Список литературы

1. Земельман М.А. Метрологические основы технических измерений. – М. Изд-во стандартов, 1991. – 228 с.

2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 p.

Поступила в редколлегию 2.04.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ ЗАМІНІ РЕЗУЛЬТУЮЧОГО РОЗПОДІЛУ НОРМАЛЬНИМ

Володарський Є.Т., Карпенко О.М.

Розглядається похибки, котрі виникають при пошуку розширеної невизначеності за типом В у випадку невиконання вимог центральної граничної теореми та об'єднанні невизначеностей з використанням заміни результуючого розподілу нормальним. Отримані результати не суперечать тенденціям, згаданим в Керівництві, і дають кількісну оцінку можливих погрішностей в результаті заміни реального результуючого розподілу на нормальне. Приведені значення дозволяють на підставі вимог до точності результату вимірювання ухвалювати рішення про можливість застосування простішого способу об'єднання трьох погрішностей, що становлять, на основі нормального розподілу або переходити до складніших і точніших методів, що враховують реальні закони розподілу компонент.

***Ключові слова:** розширена невизначеність, об'єднання невизначеностей, обмеження центральної граничної теореми.*

UNCERTAINTIES WHEN RESULTING DISTRIBUTION REGARDED AS NORMAL ONE

Volodarskiy E.T., Karpenko A.V.

This article regards errors appearing during finding extended uncertainty of B type in case of not satisfaction of conditions of central limit theorem and when combining of uncertainties is based on assumption that a resulting distribution has a normal law. Got results to the not противоречат tendencies, to mentioned in Guidance, and give the quantitative estimate of possible errors as a result of substituting of the real resulting distributing by normal. The resulted values allow on the basis of requirements to exactness of measuring result to make decision about possibility of application of more simple method of uniting three making errors on the basis of normal distribution or to pass to more difficult and exact methods, taking into account the real laws of distributing component.

***Keywords:** extended uncertainty, combining of uncertainties, limitations of central limit theorem.*