УДК 006.91: 53.088

И.П.Захаров, С.В. Водотыка

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрена процедура Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях. Предложен принцип моделирования совместного распределения двух коррелированных величин с произвольными законами распределения. Разработаны алгоритмы формирования массива данных, распределенных по закону Стьюдента, а также формирования совместного закона распределения двух коррелированных и некоррелированных величин, распределенных по закону Стьюдента. Приведены формулы для определения результата измерения и расширенной неопределенности.

Ключевые слова: *неопределенность измерений, метод Монте-Карло, корреляция, стандартная неопределенность, расширенная неопределенность.*

Введение

Общий подход оценивания неопределенности измерений, описанный в GUM [1] имеет ряд ограничений, которые перечислены в [2]. Устранить эти ограничения может применение метода статистического моделирования (Монте-Карло), в основе которого лежит закон распространения распределений [3]. Этот метод положен в основу Приложения 1 к GUM «Численные методы распространения законов распределений», разработанного Рабочей Группой 1 (WG1), созданной в рамках Объединенного комитета по руководствам в метрологии, возглавляемого директором BIPM [4]. Следует отметить, что в Приложении 1 (еще не опубликованном) не рассмотрены вопросы формирования совместных законов распределения Стьюдента при оценивании неопределенности типа А при наличии наблюдаемой корреляции, а так же совместных равномерных законов распределения при оценивании неопределенности типа В при наличии предполагаемой корреляции.

Настоящая статья содержит изложение вопросов оценивания неопределенности измерений методом Монте-Карло с учетом наличия наблюдаемой и предполагаемой корреляции.

1. Метод Монте-Карло и его реализация

В методе Монте-Карло входные величины $X_1, X_2, ... X_m$ представляются как случайные величины с плотностями распределения вероятностей $g_1, g_2, ... g_m$.

Математические ожидания и стандартные отклонения этих распределений вероятности задаются равными оценкам входных величин $x_1, x_2, ... x_m$ и их стандартным неопределенностям $u_1, u_2, ... u_m$ соответственно.

В этом случае применение метода Монте-Карло заключается в выполнении следующих операций (рис. 2):

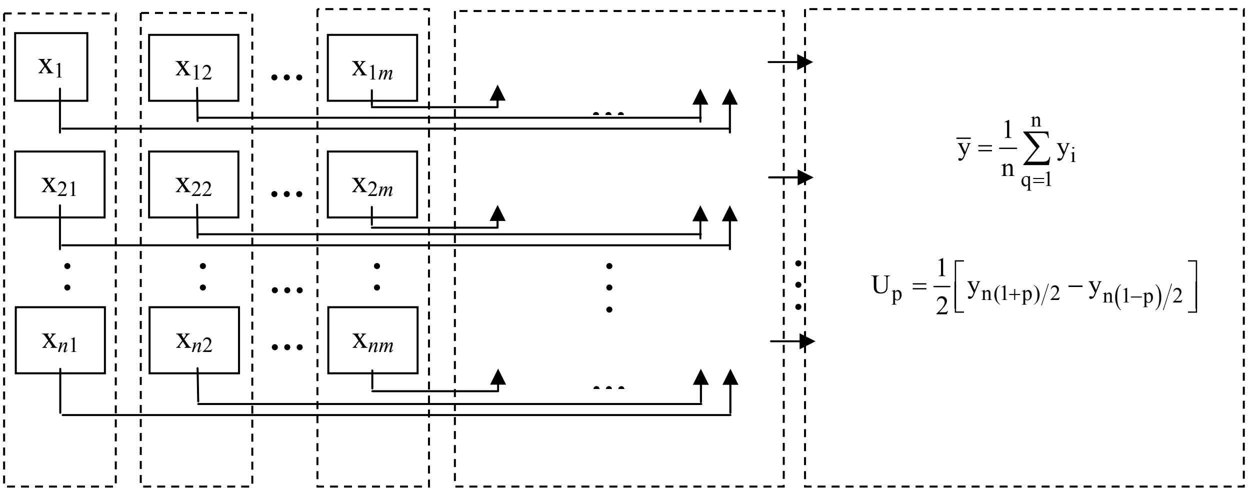

Рис. 1. Реализация метода Монте-Карло

1. Генерирование m массивов случайных чисел x_j, $j = 1, 2, ..., m$ заданного объема n (n=105 - 106), подчиняющихся требуемым законам распределения.

2. Получение массива оценки выходной величины y объема n.

3. Вычисление оценок параметров полученного распределения: среднего арифметического $\overline{y}$ и расширенной неопределенности $U_p(\overline{y})$ для заданного уровня доверия p.

4. Повторение L раз (L=50-100) шагов 1-3 с получением усредненных значений оценок перечисленных в п. 3 параметров и вычислением оценки их СКО для определения их достоверности.

Достоинством метода Монте-Карло является возможность практически неограниченного повышения его точности путем увеличения объемов $n \times L$ массивов случайных чисел.

2. Формирование массивов данных входных величин, оцениваемых по типу B

При оценивании неопределенности типа B необходимо получать массивы данных, распределенных по нормальному, равномерному, треугольному, арксинусному или другим законам, применяемым в этом случае. Как правило, встроенные генераторы случайных чисел в математические и статистические пакеты обеспечивают генерацию чисел, распределенных по нормальному и равномерному законам. Остальные требуемые законы распределения могут быть получены методом обратных функций.

Для реализации метода обратных функций необходимо осуществить генерацию случайных чисел, распределенных равномерно в диапазоне [0;1]. Эти числа преобразуются в соответствии с выражением

$$x_{ji}^* = G^{-1}\left(x_{ji}\right),$$

где x_{ji} – исходное i-ое случайное число j-й входной величины, распределенное по равномерному закону; x_{ji}^* – искомое i-ое случайное число j-й входной величины, распределенное по заданному закону; G^{-1} – обратная интегральная функция заданного закона распределения.

Некоторые законы распределения можно получить путем сложения случайных чисел, распределенных по известным законам. Так, треугольный закон распределения получается путем сложения двух массивов случайных чисел, распределенных по равномерному закону с равными СКО, трапецеидальный закон является результатом сложения двух массивов случайных чисел, распределенных по равномерному закону с разными СКО σ_1 и σ_2. При этом СКО результирующего закона σ_Σ определяется в соответствии с правилом сложения дисперсий: $\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

При оценивании неопределенности типа B возможным является наличие нескольких попарно коррелированных входных величин. Корреляция этих величин (т.н. предполагаемая корреляция) обусловлена использованием при их определении одного и того же измерительного прибора, физического эталона измерения или одних и тех же справочных данных, имеющих значительную неопределенность.

Для осуществления процедуры Монте-Карло в этом случае необходимо генерировать совместный (двумерный) закон распределения коррелированных входных величин. Эта задача легко решается для нормальных законов распределения [4]. Однако для других законов эта процедура не отработана, хотя в ней имеется острая необходимость, поскольку вклады неопределенности, оцениваемые по типу B, как правило распределены по законам, отличным от нормального. Разработанный метод моделирования совместного распределения двух коррелированных величин с произвольными законами распределения [5] включает операции, приведенные на рис. 2.

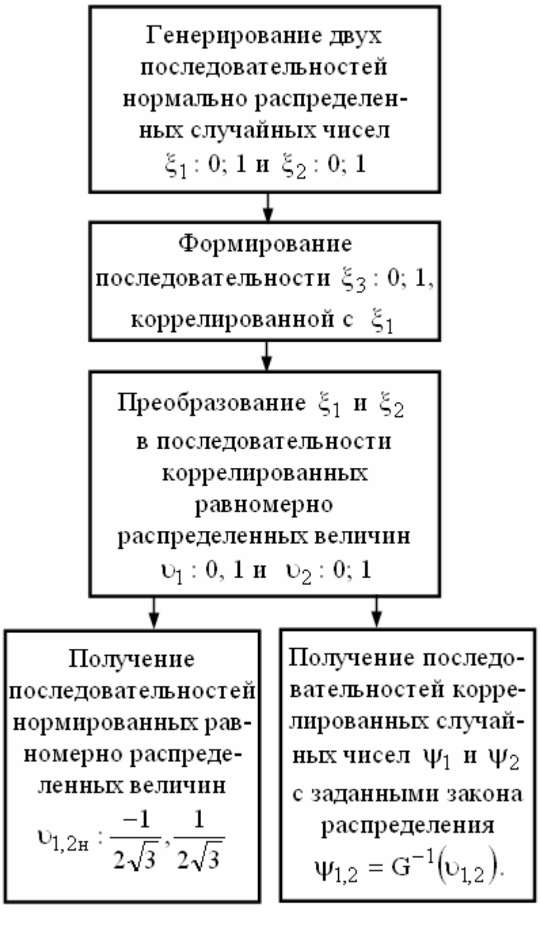

Рис. 2. Принцип моделирования совместного распределения двух коррелированных величин с произвольными законами распределения

Предлагаемый подход позволяет осуществлять генерирование попарно коррелированных случайных чисел с заданными коэффициентами корреляции и любыми, в том числе не одинаковыми, законами распределения.

Исследования показали [8], что методическая систематическая составляющая погрешности воспроизведения коэффициента корреляции при осуществлении имитационного моделирования, обусловленная нелинейностью преобразования исходных законов распределения, не превышает при получении равномерных законов распределения $-0{,}018$ в диапазоне $-1 \le r \le 1$ и достигает максимума в точках $r \approx \pm 0{,}6$.

Осуществление метода обратных функций для получения коррелированных входных величин, распределенных по закону арксинуса, увеличивает максимальное значение дополнительной систематической погрешности воспроизведения коэффициента корреляции до $-0{,}043$. Введение соответствующих поправок к значению коэффициента корреляции позволяет скомпенсировать указанную систематическую погрешность.

3. Формирование массивов данных входных величин, оцениваемых по типу А

При оценивании неопределенности типа А необходимо получать массивы данных, распределенных по закону Стьюдента. Основой для его получения является известное выражение для параметра T :

$$T = \frac{\bar{x} - M_x}{s(\bar{x})} . \qquad (1)$$

Для получения массива случайных чисел, распределенных по закону Стьюдента с заданным числом степеней свободы ν необходимо выполнить операции, приведенные на рис. 3.

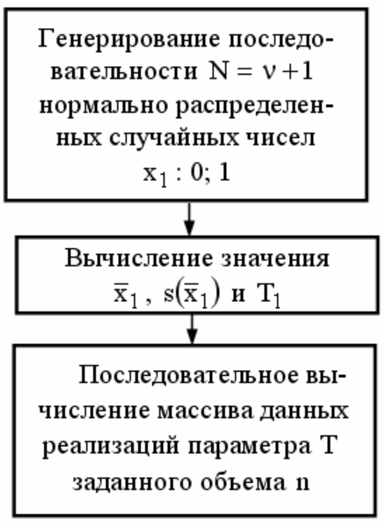

Рис. 3. Принцип формирования массива данных, распределенных по закону Стьюдента

При оценивании неопределенности типа А приходится сталкиваться с ситуациями, когда входные величины попарно коррелированны. В этом случае причиной т.н. наблюдаемой корреляции является измерение двух или более входных величин одновременно в одних условиях. Чаще всего с наблюдаемой попарной корреляцией можно встретиться при проведении косвенных многократных измерений.

Для осуществления процедуры Монте-Карло необходимо генерировать совместный (двумерный) закон распределения Стьюдента коррелированных входных величин. Эта задача решается путем выполнения операций, приведенных на рис. 4.

Рис. 4. Принцип формирования совместного закона распределения Стьюдента коррелированных входных величин.

4. Получение значений расширенной неопределенности по статистическим данным выходной величины

После завершения формирования массивов данных всех входных величин

$$X_1, X_2, ... X_m$$

осуществляется формирование массива данных выходной величины в соответствии с модельным уравнением

$$Y = f\left(X_1, X_2, ... X_m\right) .$$

После полученного массива данных выходной величины определяется оценка результата измерения по формуле:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} y_i$$

Для получения оценки расширенной неопределенности необходимо упорядочить полученный массив данных выходной величины и рассчитать ее интерквантильный интервал по формуле

$$U_p = \frac{1}{2}\left[y_{n(1+p)/2} - y_{n(1-p)/2}\right],$$

где $y_{n(1+p)/2}$ и $y_{n(1-p)/2}$ –

$n(1+p)/2$ и $n(1-p)/2$ члены упорядоченного массива данных выходной величины соответственно с [6].

Так, для $p = 0,95$ и $n = 10^5$ квантили распределения выходной величины оцениваются для 97500 и 2500 члена упорядоченного ряда.

Для уточнения получаемых оценок результата измерения и его расширенной неопределенности и оценивания стандартного отклонения этих оценок необходимо осуществить повторение перечисленных операций L раз (L=50-100) с последующим усреднением.

5. Автоматизация оценивания неопределенности измерения

Авторы развили программное средство для оценивания неопределенности измерения, основанное на реализации метода Монте-Карло [2].

Применение этой программы избавляет оператора от рутинной работы, ускоряет процесс обработки результатов и повышает их достоверность.

Выводы

Описана реализация метода Монте-Карло для оценивания результатов и неопределенности измерений, описываемых модельными уравнениями произвольного вида.

Применение этого метода позволяет устранить недостатки закона распространения неопределенности при наличии существенной нелинейности модельного уравнения, корреляции между входными величинами при отличии закона распределения выходной величины от нормального.

Предлагаемый подход позволяет осуществлять генерирование попарно коррелированных случайных чисел с заданными коэффициентами корреляции и любыми, в том числе не одинаковыми, законами распределения.

Список литературы

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – ISO, Geneva, First Edition, 1995. – 101 p.: Пер. с англ. – С.-Пб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999. – 126 с.

2. Захаров И.П., Водотыка С.В. Программное средство для расчета неопределенности измерений // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2007. – Вип.6 (64). – С. 41-43.

3. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. 4-е изд. доп. и перераб. – М.: Наука, 1995. – 78 с.

4. Кокс М., Харрис П., Зиберт Б.Р.-Л. Оценивание неопределенности измерений на основе трансформирования распределений с использованием моделирования по методу Монте-Карло // Измерительная техника. – 2003. – № 9. – С. 9-14.

5. Захаров И.П. Моделирование коррелированных данных при обработке результатов измерений // Моделювання та інформаційні технології. – К.: ІПМЕ ім. Пухова, 2005. – Вып. 33. – С. 35-40.

6. Захаров И.П., Штефан Н.В., Сезонова И.К. Оценивание границ случайной погрешности результата измерения по малому числу наблюдений // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 1 (18). – С. 53-56.

Поступила в редколлегию 14.04.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У ВИМІРЮВАННЯХ

Захаров І.П., Водотика С.В.

Розглядається процедура Монте-Карло для оцінювання невизначеності у вимірюваннях. Запропоновано принцип моделювання сумісного закону рас поділення двох корельованих величин з довільними законами розподілу. Розроблені алгоритми формування масиву даних, які розподілені за законом Стьюдента, а також формування сумісного закону розподілу двох корельованих та некорельованих вхідних величин, які розподілені за законом Стьюдента. Наведені формули для визначення результату вимірювань та розширеної невизначеності.

Ключові слова: *невизначеність вимірювань, метод Монте-Карло, кореляція, стандартна невизначеність, розширена невизначеність.*

APPLICATION OF MONTE-CARLO SIMULATION FOR AN EVALUATING OF THE MESUREMENTS UNCERTAINTY

Zakharov I.P.,Vodotika S.V.

The Monte Carlo procedure for evaluation of uncertainty in measurements is considered. The principle of modelling of joint distribution of two correlation quantities with any laws of distribution is offered. Algorithms of formation of the data array, distributed under Student's distribution, and also formations of the joint law of distribution of two correlated and non correlated quantities distributed under Student's distribution are developed. Formulas for determination of result of measurement and the expanded uncertainty are resulted. Algorithms of formation correlation and non correlation data arrays of the input quantity estimated on types A and B are developed.

Keywords: *uncertainty in measurement, Monte Carlo simulation, correlation, standard uncertainty, expended uncertainty.*