УДК 531.19

Ю.П. Мачехин

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ЛАЗЕРОВ, НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Нестабильность частоты лазеров является одним из важнейших параметров излучения, который определяет успешность применения лазеров в анемометрии, гравиметрии, интерферометрии и спектральных измерениях. В настоящей работе, на базе модели обобщенного диффузионного процесса, исследованы условия применения фрактального анализа для оценки нестабильности частоты излучения лазера. В дополнение к широко применяемому параметру оценки долговременной нестабильности частоты излучения лазеров - параметру Алана, который обеспечивает качественную оценку случайного поведения частоты излучения лазеров, в работе предложено использовать фрактальную размерность в качестве параметра количественной оценки нестабильности частоты, основанный на свойствах обобщенного диффузионного процесса.

Ключевые слова: *неопределенность, нестабильность частоты излучения, хаусдорфово пространство, фрактальная размерность.*

Введение

Оценка неопределенности типа А измерений в динамических системах связана с корректным учетом статистических свойств результатов измерений, обусловленными воздействием флуктуаций различной физической природой (тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т.д.). Причины, вызывающие эти флуктуации могут быть различными тем не менее, математические модели, адекватно их описывающие, могут быть общими [1].

Наиболее полно разработан математический аппарат изучения случайных процессов на основе теории марковских процессов. Физической моделью этой теории является теория броуновского движения и процессов диффузионного типа [2]. В частности, диффузионные процессы оказывают доминирующее влияние на фазовую и частотную стабильность стабилизированных по частоте лазеров [3].

Марковским процессом или процессом без последствий называется процесс $z(t)$ такой, что для всех $t_1 > t_2$ условная плотность вероятностей однозначно определяется значением $z(t_2)$, принятым в момент времени t_2 и совсем не зависит от предшествующей истории [2].

С физической точки зрения это означает, что исследуемая система не обладает памятью и поэтому только в этом случае возможно описание случайных процессов обыкновенными дифференциальными уравнениями с гауссовскими флуктуациями параметров. В том случае, когда изучается поведение нелинейной системы под действием внешнего (или внутреннего) шума, то временная эволюция такой системы перестает быть марковской и теряется возможность использовать методы теории марковских процессов, т.е. для исследования таких систем необходимы другие методы и математические модели.

Для анализа результатов измерений в системах с немарковским характером поведения возмущающих флуктуационных процессов необходимы новые методы анализа случайных процессов, основанные на свойствах нелинейных динамических систем [4], поведение которых в свою очередь обладает фрактальными свойствами.

Целью настоящей работе является развитие метода количественной оценки временных рядов измерения нестабильности частоты лазеров, который базируется на свойствах обобщенного диффузионного процесса [5].

Основной материал

Фрактальные свойства временных рядов наблюдений. При использовании фрактального анализа вводятся несколько определений и условий.

Во-первых, результаты измерений представляются в виде множества в двумерном топологическом пространстве. Во-вторых, при работе с эти множеством пользуются операции, введенные в теории множеств. В-третьих, для каждого множества вводится понятие фрактальной размерности, которая может совпадать или не совпадать с топологической размерностью пространства. Существует только один случай, когда размерность множества измерений может быть дробной (и соответственно не совпадает с целочисленной топологической размерностью пространства). Это возможно только тогда, когда изучаемое множество можно определить как хаусдорфово, т.е. для этого множества применима метрика Хаусдорфа. Размерность этого множества, называемая размерностью Хаусдорфа, или фрактальной размерностью, может быть дробной [5]. Существует несколько методов расчета фрактальной размерности, один из них будет использован в настоящей работе [6].

Поскольку существует определение хаусдорфова множества, то можно доказать [7], что множество значений физической величины, полученные с установленной точностью и разделенные конечными интервалами времени между измерениями, является хаусдорфовым множеством и может иметь дробную размерность. Величина этой размерности полностью зависит от «свойств» этого множества.

С другой стороны для множеств с нецелой размерностью было введено Мандельбротом понятие фрактала [8] и фрактальной размерности, которое адектватно понятию хаусдорфовой размерности и описывает сложный (изломанный) характер кривой или поверхности в топологическом пространстве.

Как правило, пространство, в котором рассматривается множество результатов измерений именно таким и является. Примером тому являются множества результатов частотных измерений, которые размещаются в пространстве с координатами частота и время. Поэтому для задач метрологии и теории измерений, в первую очередь представляют интерес самоаффинные фракталы.

Основные положения фрактального анализа процессов диффузионного типа. Как было отмечено выше, теория марковских процессов построена на основе модели броуновского движения (или процессах диффузионного типа). Именно для процессов такого типа и была разработана теория фрактального анализа [5]. Сформулируем некоторые основные математические положения, на которых формируется предлагаемая теория.

Построенная Винером [2] математическая модель выборочных реализаций дала обоснование одномерному броуновскому движению. В общем случае винеровским процессом (одномерным броуновским движением) называется гауссовский процесс $X(t)$, если он обладает следующими свойствами:

1. $X(0)=0$ и $X(t)$ почти всегда непрерывна.

2. Свойство гауссовости приращений: случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$, $t_2 > t_1$ имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)$, т.е.

$$P(\Delta X(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) dU.$$

Из этих свойств следует, что для приращений закон дисперсии зависит только от разницы $t_2 - t_1$

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2(t_2 - t_1).$$

Принципиально важным является то, что рассматриваемый гауссовский процесс является марковским, а значит, вероятность события $X(t_2)$ зависит от $X(t_1)$, но не зависит от событий для $t < t_1$.

Отметим еще одну важную особенность, которая будет использована в дальнейшем. Для приращений винеровского процесса (которые являются независимыми) свойственно самоподобие, т.е. для любого $r > 0$

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \frac{1}{\sqrt{r}}(X(t + r\Delta t) - X(t)).$$

Иначе коэффициенты сноса и диффузии нового процесса связаны через r с соответствующими коэффициентами исходного процесса [4]. Это значит, что две случайные величины имеют одинаковое распределение (одни и те же математическое ожидание и дисперсия).

Рассмотрим гауссовский процесс $X(t)$ со следующими свойствами:

1. $X(0)=0$ и $X(t)$ почти всегда непрерывна.

2. Свойство гауссовости приращений: случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$, $t_2 > t_1$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}$, т.е.

$$P(\Delta X(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)^H}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{H} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{U^2}{\sigma\ (t_2 - t_1)^H}\right)^2\right) dU.$$

Как видно, принципиальное отличие от предыдущего случая заключается в появлении параметра H, значение которого может изменяться в интервале от 0 до 1. В этом случае приращения становятся зависимыми, т.е.:

$$E[(X(t) - X(0)[X(t + \Delta t) - X(t)])] = \\ = \frac{1}{2}\sigma^2\left[(t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H}\right] \qquad (1)$$

и, следовательно, такой процесс уже не является марковским, поскольку в статистическом смысле он обладает памятью. Поэтому для него используется термин – обобщенное броуновское движение. Так, если $H > 1/2$, то, в статистическом плане, тенденция поведения исследуемой функции в прошлом и будущем совпадает. Иначе, если функция возрастала в прошлом, то она будет возрастать и в будущем. Для $H < 1/2$ функция будет вести себя противоположным образом – возрастание в прошлом будет сменяться убыванием в будущем. При $H = 1/2$ рассматриваемый процесс обращается в марковский с независимыми приращениями, который был рассмотрен ранее.

Выражение (1) отрицательно при $H < 1/2$, равно 0 при $H = 1/2$ и положительно при $H > 1/2$.

Поскольку статистическим самоподобием, которым обладают гауссовы марковские процессы, также обладают и рассмотренные немарковские процессы, поэтому для всех этих процессов можно ввести единый параметр – фрактальную размерность D реализации, которая в общем случае описывается выражением [5]

$$D = 2 - H.$$

Если закон дисперсии для фрактального броуновского движения описывается как

$$E[(X(t_2) - X(t_1))^2] = \sigma^2 \left(t_2 - t_1\right)^{2H},$$

то, определяя из этих выражений H, можно определить размерность исследуемой реализации. При $H = 1/2$ размерность $D = 1,5$, при $1 > H > 1/2$ - размерность находится в интервале $-1 < D < 1,5$, а при $0 < H < 1/2$ размерность будет $1,5 < D < 2$.

Следуя вышеприведенной теории представление фрактальной размерности множества измерений, можно решать две задачи. Во-первых, исследовать марковский процесс, во-вторых, определять «степень» немарковости процесса, что может дать дополнительную важную информацию о исследуемом объекте.

Основываясь на свойствах диффузионных процессов, в работе исследуются условия использования фрактального анализа для количественной оценки результатов измерений нестабильности частоты стабилизированных по частоте лазеров.

Фрактальные свойства частотных и фазовых шумов стабилизированных по частоте лазеров. Выходной сигнал реального лазера в общем случае можно описать следующим выражением

$$U(t) = [((U_0 + \Delta U(t))\mathrm{Sin}(2\pi\upsilon_0 t + \Phi(t)],$$

где $\Delta U(t)$ – случайные изменения (флуктуации) амплитуды относительно U_0; $\Phi(t)$ – фазовая модуляция, обусловленная случайными флуктуациями.

Текущее (мгновенное) значение частоты сигнала можно записать как

$$\nu(t) = \nu_0 + \Delta\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d}{dt}\Phi(t).$$

Уравнение

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Delta\upsilon(t) \qquad (2)$$

является статистическим уравнением, описывающим флуктуации фазы в автономном генераторе радиодиапазона или лазера, возникающие под действием собственного теплового, дробового или квантового шума.

В теории броуновского движения это уравнение появляется в предельном случае безинерационного поведения броуновской частицы. Поэтому можно рассматривать случайное поведение фазы как диффузионный процесс эквивалентный математически идеальному броуновскому движению. Это подтверждается еще и тем, что в предположении стационарности частотного шума $\Delta\nu(t)$ из уравнения (2) следует, что фазовый случайный процесс нестационарный.

Так, если $\Delta\nu(t)$ – белый шум, то его спектральная плотность $G_0(\omega) = G$, дисперсия $\sigma_0^2 = \left\langle \Delta\nu(t)^2 \right\rangle = \infty$, а корреляционная функция $B_0(\tau)$ имеет простое выражение

$$\left\langle \Delta\nu(t)\Delta\nu(t-\tau)\right\rangle = B_0(\tau) = 2\pi G\delta(\tau) = 2D\delta(\tau).$$

В соответствии с (3) дисперсия фазы (при условии $\left\langle \Phi(t) \right\rangle = 0$)

$$\sigma^2 = \left\langle \Phi(t)^2 \right\rangle = 2\int_0^t (t-\tau)B_0(\tau)d\tau =$$

$$= 2\int_0^t (t-\tau)\cdot 2D\delta(\tau)d\tau = 4D\int_0^t t - \tau\delta(\tau)d\tau = 4Dt,$$

т.е. дисперсия $\Phi(t)$ линейно растет со временем.

Дисперсия разности фаз

$$\sigma_\Delta^2 = \left\langle \left[\Phi(t) - \Phi(t+\tau)\right]^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \Phi(t)^2 - 2\Phi(t)\Phi(t+\tau) + \Phi(t+\tau)^2 \right\rangle =$$

$$= 2\left[R_\Phi^0 - R_\Phi(\tau) \right]$$

зависит только от разностного времени τ [3].

В общем случае выражение для дисперсии разности фаз эквивалентно дисперсии для фрактального броуновского движения

$$\left\langle \left[\Phi(t) - \Phi(t+\tau)\right]^2 \right\rangle = \sigma_\Phi^2 \tau^{2H}.$$

Дисперсия частотных отклонений:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\tau^2}\left\langle \left[\Phi(t) - \Phi(t+\tau)\right]^2 \right\rangle = \sigma_\Phi^2 \tau^{2(H-1)}.$$

С другой стороны, спектральная плотность функции, описывающей фрактальное броуновское движение, $S(\omega) \sim \frac{1}{\omega^\alpha}$, $\alpha = 2H + 1$ [5]. Этот спектр наиболее интересен, поскольку экспериментально подтверждено, что сингулярный он соответствует фазовой модуляции белым шумом и очень часто встречается на практике.

Учитывая, что показатель спектральной плотности $\alpha = 2H + 1$, тогда

$$\sigma_f^2 = \sigma_\Phi^2 \tau^{2H-2} = \sigma_\Phi^2 \tau^{2H+1-3} = \sigma_\Phi^2 \tau^{\alpha-3}.$$

Из сравнительного анализа выражений для σ_f^2 и $S(\omega)$ при разной H следует, что при $H = 0$ $\sigma_f^2 \Rightarrow \tau^{-2}$, что соответствует спектру $S \sim \frac{1}{\omega}$;

при $H = 1$ $\sigma_f^2 \Rightarrow \mathrm{const}$, что соответствует спектру $S \sim \frac{1}{\omega^3}$;

при $H = \frac{1}{2}$ $\sigma_f^2 \Rightarrow \tau^{-1}$, что соответствует спектру $S \sim \frac{1}{\omega^2}$.

Связь между показателем спектральной плотности и параметром H дает возможность определять связь между марковскими свойствами случайного процесса и спектром. Так, марковский процесс существует только при $H = 1/2$ и следовательно только при $S \sim 1/\omega^2$ возможен анализ с использованием теории марковских процессов. Любой другой спектр, например, при $0,5 < H < 1$ соответствует спектральной плотности с α от 2 до 3, а при $0 < H < 0,5$ соответствует спектральная плотность с α от 1 до 2, а это соответствует либо персистентному, либо антиперсистентному поведению [6], что однозначно характеризует исследуемую систему как систему с памятью. Поскольку определение размерности D или параметра H операция значительно проще, чем определение спектра, и однозначно характеризует марковость процесса, то применение метода анализа фрактальной размерности позволит значительно эффективнее изучать частотные и фазовые шумы.

Заключение

Развитие моделей и методов анализа результатов измерений, которые не привязываются к гауссовой форме эргодичных случайных возмущений в динамических системах [9], позволяет ввести дополнительные количественные характеристики результатов измерений, основанные на фрактальных свойствах множеств результатов измерений. Нестабильность частоты лазеров является одним из важнейших параметров излучения, который определяет успешность применения лазеров в анемометрии, гравиметрии, интерферометрии и спектральных измерениях.

В настоящей работе, на базе модели обобщенного диффузионного движения, исследованы условия применения фрактального анализа для оценки нестабильности частоты излучения лазера. В дополнение к широко применяемому параметру для оценки долговременной нестабильности частоты излучения лазеров – параметру Алана, который обеспечивает получение только качественной оценки случайного поведения частоты излучения лазеров, в работе изучены условия применения фрактальной размерности для количественной оценки нестабильности частоты, основанные на свойствах обобщенного диффузионного процесса.

Список литературы

1. Кляцкин В.И. Статистические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 335 с.

2. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1967. – 495 с.

3. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981. – 639 с.

4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Наука, 1989. – 446 с.

5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркер, 2000. – 352 с.

6. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.

7. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.

8. Benoit B. Mandelbrot. The fractal Geometry of Nature. Freeman San Francisco, 1982. – 460 p.

9. Мачехин. Ю.П. Физические модели анализа результатов измерений // Измерительная техника. – 2005. – № 6. – С. 25-30.

Поступила в редколлегию 11.04.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОЦІНКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ НЕСТАБІЛЬНОСТІ ЧАСТОТИ ЛАЗЕРІВ, НА ОСНОВІ ФРАКТАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Мачехін Ю.П.

Нестабільність частоти лазерів е одним із найважливіших параметрів випромінювання, який забезпечує використання лазерів в анемометрії, гравіметрії, інтерферометрії та спектральних вимірюваннях. В роботі, на базі моделі узагальненого дифузійного процесу, досліджені умові використання фрактального аналізу для оцінки нестабільності частоти випромінювання лазера. В додаток до широко відомого параметру оцінки довгочасової нестабільності частоти випромінювання лазерів – параметру Алана, якій забезпечує оцінку випадкової поведінки частоти випромінювання лазерів, у роботи запропоновано використати фрактальну розмірність як параметр оцінки нестабільності частоти, базуючись на властивостях узагальненого дифузійного процесу.

Ключові слова: *невизначеність, нестабільність частоти випромінювання, хаусдорфов простір, фрактальна розмірність.*

ESTIMATION OF RESULTS OF MEASUREMENTS OF INSTABILITY OF FREQUENCY OF LASERS, ON A BASIS FRACTAL PROPERTIES DIFFUSION PROCESSES

Machehin Yu.

Instability of frequency of lasers is one of the major parameters of radiation who defines success of application of lasers in anemometry, gravimetry, interferometry and spectral measurements. In the present work, on the basis of model generalized diffusion process, conditions of application fractal analysis for an estimation of instability of frequency of radiation of the laser are investigated. In addition to widely used parameter of an estimation of long-term instability of frequency of radiation of lasers - Alan's to parameter which provides quality standard of casual behaviour of frequency of radiation of lasers, in work it is offered to use fractal dimension as parameter of a quantitative estimation of instability of the frequency, based on properties generalized diffusion process.

Keywords: *vagueness, instability of frequency of radiation, Hausdorff space, fractal dimension.*