УДК 519.9

Г.О. Старець[1], І.І. Сидоренко[2]

[1] *Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків*
[2] *Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків*

ПРО ДЕЯКІ СПЛАЙНИ, ПОВ'ЯЗАНІ З АТОМАРНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Як відомо, сплайни – це кусково-поліноміальні функції. Теорія сплайнів є відносно новою і дуже інтенсивно розвивалася в останні десятиріччя. Така зацікавленість до сплайнів обумовлена тим, що, як виявилося, сплайни мають набір властивостей, що забезпечує дуже зручне і ефективне їх застосування в обчислювальних методах і, тим самим, надає можливість їх широкого та ефективного використання в практичних проблемах будь-яких галузей науки і інженерних питань.

Ключові слова: *фінітність, нескінченна диференційованість, атомарна функція, сплайн.*

Вступ

Постановка проблеми. У роботі розглядаються сплайни $\sigma_{n,m}(x)$. Ці сплайни дуже природньо будуються у зв'язку з атомарними функціями $up_m(x)$, які, як відомо ([5]), є фінітними, нескінченно диференційованими розв'язками диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу спеціального вигляду.

Підкреслимо, що сплайни $\sigma_{n,m}(x)$ – це так звані досконалі сплайни ([1]). Стаття присвячена встановленню деяких елементарних властивостей сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$, а також деяких їх екстремальних властивостей, що дає змогу, зокрема, більш ретельного вивчення атомарних функцій $up_m(x)$. Робота є узагальненням результатів В.О. Рвачова на випадки m > 1. Підкреслимо також, що окрім важливості застосування сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$ до вивчення класів атомарних функцій $up_m(x)$, вони можуть також використовуватись безпосередньо у різних питаннях теорії наближення та її застосувань.

Аналіз літератури. Досконалі сплайни, пов'язані з атомарними функціями, вперше з'явилися у роботах В.О. Рвачова і потім ретельно вивчалися ним та його учнями [5]. Сплайни $\sigma_{n,m}(x)$ узагальнюють сплайни $\sigma_n(x)$, які пов'язані з першою і найбільш важливою атомарною функцією $up_m(x)$. Дослідження в області досконалих сплайнів, пов'язаних з атомарними функціями, відображені, зокрема, у роботах [2 – 5].

Метою даної роботи є встановлення деяких властивостей досконалих сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$ у зв'язку з атомарними функціями $up_m(x)$.

1. Означення сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$

При кожному m = 2, 3, 4, … пов'яжемо з функцією $up_m(x)$ ([2]) систему сплайнів. Покладемо

$$\sigma_{0,m}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ x\in(-1,1);\\ 0,\ x\notin(-1,1).\end{cases}\tag{1}$$

Далі діємо рекурентно

$$\sigma_{n,m}(x)=L_m\sigma_{n-1,m}(x),\ (n=1,2,...),\tag{2}$$

де оператор L_m визначається формулою

$$L_m f(x)=2\int_{-\infty}^{x}\sum_{\ell=1}^{m}(f(2mt+2m-2\ell+1))dt-$$
$$-2\int_{-\infty}^{x}\sum_{\ell=1}^{m}(f(2mt-2\ell+1))dt\ .\tag{3}$$

Таким чином

$$\sigma_{n,m}(x)=L_m^n\sigma_{0,m}(x).\tag{4}$$

Спорідненість сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$ у відношенні до функції $up_m(x)$ підтверджується, зокрема, наступним.

Теорема.

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n,m}(x)=up_m(x)\tag{5}$$

у метриці C [-1,1].

Доведення. Нехай $\hat{C}_0\ [-1,\ 1]$ – клас фінітних з носієм [-1,1], неперервних невід'ємних парних функцій f(x), що задовольняють умові нормування:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=1.$$

Зробимо з класу $\hat{C}_0\ [-1,\ 1]$ метричний простір введенням у ньому рівномірної норми, тобто

$$\|f\|_{\hat{C}_0[-1,1]}=\|f\|_{C\,[-1,\,1]}=\max_{x\in[-1,\,1]}|f(x)|.$$

Тоді для доведення теореми достатньо довести, що оператор L_m –стискуючий у просторі $\hat{C}_0\ [-1,\ 1]$ і що функція $up_m(x)$ – його нерухома точка. Той факт, що $up_m(x)$ – нерухома точка оператора L_m є очевидним, якщо співставити рівняння, що визначає функцію $up_m(x)$ [1] з означенням оператора L_m. Залишається довести, що оператор L_m – стискуючий. Справді, безпосередньо з означення L_m випливає, що якщо

$$f,g\in\hat{C}_0\ [-1,\ 1],$$

то
$$L_m^k f(x)-L_m^k g(x)=0,\ (k=1,2,3,\ldots)\tag{6}$$

при $x=\pm\frac{s}{2m}$, (s=0,1,…,2m).

Позначимо $L_m^k f(x)$ через $f_{k,m}(x)$, і нехай $\|f_{k,m}-g_{k,m}\|_{\hat{C}_0[-1,\,1]}=d$. Розглянемо тепер

$$f_{k+1,m}(x)-g_{k+1,m}(x)=L_m f_{k,m}(x)-L_m g_{k,m}(x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{x}(\sum_{\ell=1}^{m}2f_{k,m}(2mt+2m-2\ell+1)-$$
$$-\sum_{\ell=1}^{m}2f_{k,m}(2mt-2\ell+1)-$$
$$-\sum_{\ell=1}^{m}2g_{k,m}(2mt+2m-2\ell+1)+$$
$$+\sum_{\ell=1}^{m}2g_{k,m}(2mt-2\ell+1))dt\ .\tag{7}$$

Без обмеження загалу можна вважати, що підінтегральний вираз у рівності (7) досягає свого найбільшого значення на відрізку $[-1,\ -1+\frac{1}{2m}]$. Позначимо це значення через ε. З рівності (7) випливає, що ε ≤ 2d. Однак згідно до (6):

$$\|f_{k+1,m}-g_{k+1,m}\|_{\hat{C}_0[-1,\,1]}.\le\int_{-1}^{-1+\frac{1}{4m}}\varepsilon dt=\frac{\varepsilon}{4m}\le\frac{d}{2m}.$$

Залишається тільки відзначити, що $\sigma_{n+1,m}=L_m\sigma_{n,m}$, $\sigma_{n,m}\in\hat{C}_0\ [-1,\ 1]$ і $d\le1$.

Теорему доведено.

Зауваження. Насправді доведено більше, ніж стверджувалося, а саме, отримана оцінка

$$\|\sigma_{n,m}-up_m\|_{C[-1,\,1]}\le(2m)^{-n},\ (n=0,1,2\ldots).\tag{8}$$

2. Властивості сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$

Тепер перелічимо деякі властивості сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$. Цілком природньо, що деякі з цих властивостей є аналогами властивостей функцій $up_m(x)$.

1. $\sigma_{n,m}(x)$ – фінітний поліноміальний сплайн степеня n, дефекту 1; supp $\sigma_{n,m}$ = [–1,1].

2. $\int\limits_{-1}^{1} \sigma_{n,m}(x)dx = 1.$

3. $\sigma_{n,m}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{mt}{(2m)^k}}{\frac{mt}{(2m)^k} m \sin \frac{t}{(2m)^k}} dt$.

4. $\sigma_{n,m}(0) = 1$, ($n \neq 0$).

5. $\sigma_{n,m}(x)$ зростає при $x \in [-1,0]$ і спадає при $x \in [0,1]$, (n≠0).

6. $\sigma_{n,m}(x)$ – парна функція.

7. $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_{n,m}(x-k) \equiv 1$. Більш того,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_{n,m}(x-\frac{k}{m}) \equiv m.$$

8. Сітка вузлів сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$ – рівномірна і вузли розташовані у точках

$$x = \frac{s}{(2m)^{n-1}},\ (s \in \left\{-(2m)^{n-1},...,(2m)^{n-1}\right\}, n = 1,2,...).$$

9. $N_\ell(\sigma_{n,m}) = \left\{\frac{2s}{(2m)^\ell}\right\}, (\ell = 1,2,3,...,n-1),$

$$s \in \left\{-(2m)^\ell,...,(2m)^\ell\right\}, n \neq 0;\ N_0(\sigma_{n,m}) = \left\{-1,1\right\}.$$

10. $\left\|\sigma_{n,m}^{(\ell)}\right\|_{C[-1,\,1]} = B_\ell^{(m)}, (\ell = 0,1,...,n-1;$ (n≠0) і $\left|\sigma_{n,m}^{(n)}(x)\right| \equiv const = \frac{1}{2}B_n^{(m)}$ майже скрізь, на відрізку [–1,1], тобто скрізь, окрім вузлів. При цьому $sign\sigma_{n,m}^{(k)}(x) = sign\ \ up_m^{(k)}(x)$, k=0,1,…,n-1, а при k=n рівність є вірною скрізь, окрім вузлів.

11. $\Delta^2(\sigma_{n,m}^{(\ell)}(x)) = 0$ у точках $x \in \left\{\frac{s}{m(2m)^\ell}\right\}$ з кроком $h = \frac{1}{m(2m)^\ell}$

$$(s \in Z, |s| < m(2m)^\ell,\ \ s \not\equiv 0(\bmod m), \ell = 0,1,2,...).$$

Зауваження. Завдяки властивості 10 $\sigma_{n,m}$ – досконалі сплайни.

Висновки

Таким чином, ми встановили деякі важливі властивості досконалих сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$ і переконалися у спорідненості цих сплайнів з атомарними функціями $up_m(x)$. Наявність таких сплайнів, як самих атомарних функцій дає можливість їх широкого використання.

Список літератури

1. *Алберг Дж., Нельсон Э., Уолт Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972.*
2. *Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Об одной финитной функции // Докл. АН УССР, серия А. – 1971. – №8. – С. 705-707.*
3. *Рвачев В.А., Старец Г.А. Некоторые атомарные функции и их применение // Докл. АН УССР, серия А. – 1983. – №11. – С. 6-8.*
4. *Старец Г.А. Один класс атомарных функций и его применение: Дисс.…канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Х., 1984. – 104 с.*
5. *Рвачев В.А. Финитные решения дифференциальных уравнений и их применение // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, вып. 1 (271). – С. 77-103.*

Надійшла до редколегії 16.07.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.А. Калкаманов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

О НЕКОТОРЫХ СПЛАЙНАХ, СВЯЗАННЫХ С АТОМАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г.А. Старец, И.И. Сидоренко

Как известно, сплайны – это функции кусковых полиномов. Теория сплайнов является относительно новой и очень интенсивно развивалась в последние десятилетия. Такая заинтересованность к сплайнам обусловлена тем, что, как оказалось, сплайны имеют набор свойств, который обеспечивает очень удобное и эффективное их применение в вычислительных методах и, тем самым, предоставляет возможность их широкого и эффективного использования в практических проблемах любых отраслей науки и инженерных вопросов.

Ключевые слова: *финитность, бесконечная дифференцируемость, атомарная функция, сплайн.*

ABOUT SOME SPLAINES, RELATED TO THE ATOMIC FUNCTIONS

G.O. Starets, I.I. Sidorenko

As is generally known, splines are functions of lump polynomials. A theory of splines is in relation to new and very intensively developed in the last decades. Such personal interest to the splines is conditioned, as appeared, splines have a set of properties, which provides their very comfortable and effective application in calculable methods and, the same, gives possibility of their wide and effective use in the practical problems of any branches of science and engineerings questions.

Keywords: *finitary, endless differentiability, atomic function, spline.*