УДК 629.395

А.В. Омельченко, А.А. Астраханцев, А.В. Шкловец

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

СИНТЕЗ СИГНАЛОВ С КОМПАКТНЫМ СПЕКТРОМ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

Разработан метод синтеза сигналов с компактным спектром, удовлетворяющих критерию Найквиста. По критерию минимума энергии в боковых лепестках выполнен синтез сигналов в виде сплайн-функций второго, третьего и четвертого порядка. Для полученных сигналов оценен выигрыш по сравнению с сигналами, обладающими спектром типа «приподнятый косинус». Выполнено сравнение полученных сигналов с сигналами, использующимися в цифровых системах связи.

Ключевые слова: *синтез, сигналы с компактным спектром, критерий Найквиста, представление сигналов, сплайны, межсимвольная интерференция.*

Введение

В современных цифровых системах связи для передачи информации по каналам с ограниченной полосой пропускания широко используются сигналы с компактным спектром [1 – 3]. В данных системах для формирования сигнала импульсы пропускаются через фильтр с передаточной функцией, удовлетворяющей критериям Найквиста. Достоинствами таких сигналов является очень высокая концентрация энергии в ограниченной полосе частот, что обуславливает возможность их эффективного уплотнения. При этом сигналы с компактным спектром имеют конечную импульсную характеристику, что приводит к межсимвольной интерференции.

Наибольшее распространение в цифровых системах передачи получила передаточная функция типа «приподнятый косинус», обеспечивающая высокую скорость убывания боковых лепестков сигнала на выходе канала. Высокая скорость убывания боковых лепестков необходима для уменьшения межсимвольной интерференции (МСИ), которая приводит к повышению вероятности ошибочного приема символов.

Передаточная функция вида «приподнятый косинус» обладает рядом достоинств, которые обеспечили данному фильтру широкую применимость, однако в современных отечественных и зарубежных источниках не доказана оптимальность данной функции.

Формулирование проблемы. Существующий в современных сетях джиттер, при высоком уровне боковых лепестков импульсной характеристики сигнала, будет приводить к тому, что в отсчетных точках, кроме информационного сигнала, принимаемый уровень энергии будут формировать соседние отсчеты, приводя к ошибочному приему символов.

Целью работы является синтез сигналов с компактным спектром, применение которых обеспечивало бы меньшую межсимвольную интерференцию, чем применение сигналов со спектром типа «приподнятый косинус».

Для синтеза передаточных функций формирующих фильтров предлагается использовать ее представление сплайн-функциями. Достоинствами сплайн-функций является непрерывность сигнала и его первых производных, а также простота аппаратной реализации. Представление спектра сигнала в виде сплайна позволит сформировать требуемую передаточную функцию формирующего фильтра и обеспечить выполнение первого критерия Найквиста.

1. Модель сигнала с нулевой МСИ

Согласно [2] передаваемый сигнал для различных видов линейной цифровой модуляции описывается выражением

$$\upsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n g(t - nT), \tag{1}$$

где $\{I_n\}$ – последовательность информационных символов, а $g(t)$ – сигнальный импульс с ограниченным по полосе спектром.

Сигнал (1) передается по каналу с АЧХ C(*f*). На выходе канала наблюдается смесь сигнала с аддитивной помехой

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n h(t - nT) + z(t),$$

где $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot c(t-\tau)d\tau$; $z(t)$ – аддитивный гауссовский белый шум; $c(\tau)$ – импульсная характеристика канала.

В приемнике сигнал сначала пропускается через фильтр, а затем стробируется со скоростью 1/T отсчетов в секунду. Тогда сигнал на выходе фильтра приемника, после стробирования во времени в точках $t = kT + \tau_0$, k = 0,1..., будет иметь вид:

$$y_k = I_k + \sum_{\substack{n=0\\ n\ne k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k ,$$

где τ_0 – задержка при передаче по каналу; I_k – восстановленный информационный символ в k-ой отсчетной точке; x_k – сигнал на выходе фильтра; v_k – k-й отсчет помехи.

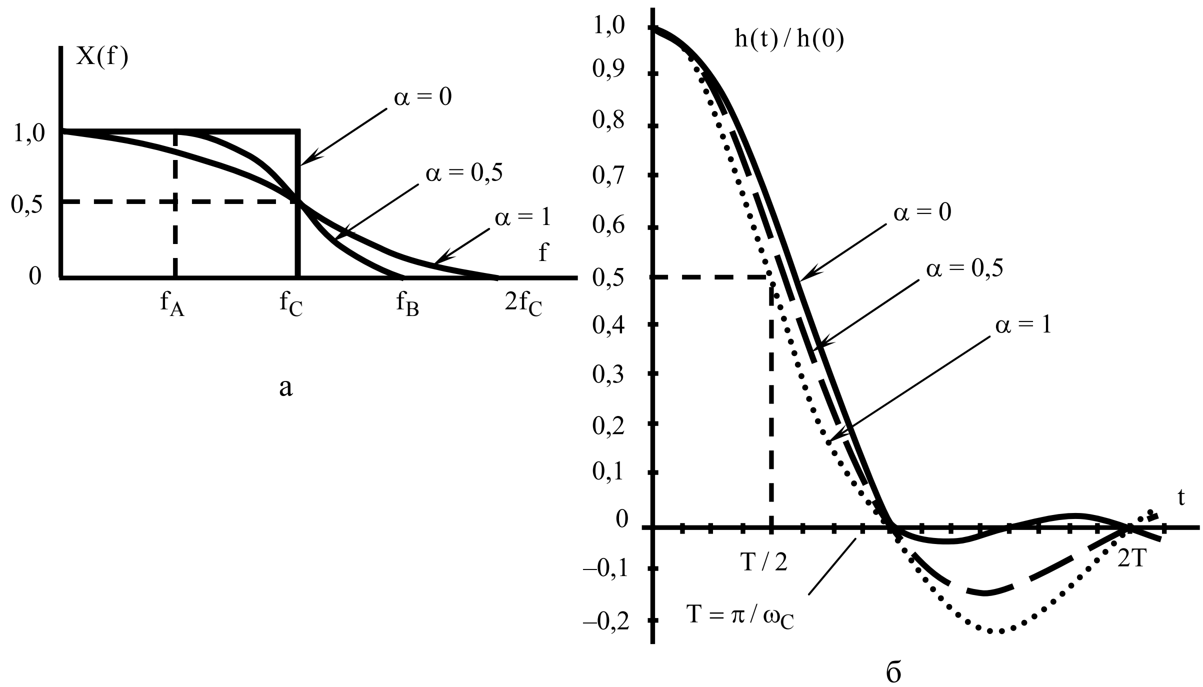

Рис. 1. Импульс типа “приподнятый косинус”:
а – АЧХ формирующего фильтра; б – импульсная реакция формирующего фильтра

Для обеспечения нулевой межсимвольной интерференции необходимо обеспечить, чтобы сигнал $h(t)$ удовлетворял условию [1]

$$h(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{при } k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases} \quad (2)$$

что достижимо, если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left[f + \frac{m}{T}\right] = T, \quad (3)$$

где X(f) – модуль спектральной плотности импульса $h(t)$, а $T = 1/2f_C$ – период отсчетов.

Спектральная плотность импульса для случая T > 1/2F (F – полоса пропускания канала), которая имеет требуемые спектральные свойства и широко применяется на практике, носит название «приподнятый косинус».

Рассмотрим АЧХ формирующего фильтра, типа "приподнятый косинус", изображенную на рис. 1, а. Вид характеристик и скорость убывания энергии в боковых лепестках зависят от коэффициента ската [1]:

$$\alpha = \frac{f_C - f_A}{f_C}.$$

Заметим, что при α = 0 АЧХ формирующего фильтра становится прямоугольной, а скорость передачи символов равна 1/T = 2F. Если α = 1, скорость передачи символов 1/T = F.

Как видно из рис. 1, а, передаточная функция может быть разбита на два симметричных относительно точки С отрезка – АС и СВ, что будет учтено при построении сплайна.

2. Представление модуля спектральной плотности сигнала с компактным спектром в виде сплайн-функций

Пусть на интервале $[x_0, x_N]$ задана некоторая функция $S_{n,v}(x)$ и заданы точки $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$, причем $x_i > x_{i-1}$. По определению [4] функция $S_{n,v}(x)$ является сплайном степени *n* дефекта *v* на интервале $\left[x_0, x_{N-1}\right]$, если на каждом произвольном отрезке $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ функция $S_{n,v}(x)$ является многочленом степени n, т.е.

$$S_{n,v}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^i (x - x_i)^k ,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, N-1$$

и $S_{n,v}(x)$ на указанном интервале $[x_0, x_{N-1}]$ имеет n – v непрерывных производных.

Спектральная плотность $X(f)$, приведенная на рис. 1, а, может быть представлена в виде сплайна n-го порядка

$$X(f)=\begin{cases}1, & |f|<f_A;\\ K(|f|), & f_A<|f|\le f_C;\\ L(|f|), & f_C<|f|\le f_B;\\ 0, & |f|>f_B,\end{cases} \qquad (4)$$

где $K(f)$ и $L(f)$ – полиномы n-го порядка; f_A, f_B, f_C – точки сращивания полиномов.

Выразим точки сращивания через коэффициент ската:

$$f_B=f_C+\alpha\cdot f_C,\; f_A=f_C-\alpha\cdot f_C. \qquad (5)$$

Согласно критерию Найквиста

$$\begin{aligned}&K(|f|)=1-P(|f|-f_A);\\ &L(|f|)=P(f_B-|f|),\end{aligned} \qquad (6)$$

где $P(f)=a_1f+a_2f^2+...+a_nf^n$ – полином n-го порядка, $a_1, a_2, ..., a_n$ – действительные числа.

Для нахождения сигнала, обладающего лучшими характеристиками, чем сигнал со спектром типа «приподнятый косинус», рассмотрим представление синтезируемого сигнала в частотной области на основе сплайн-функций второго, третьего и четвертого порядков.

2.1 Представление сигнала на основе сплайна второго порядка дефекта 1. Запишем условия гладкости для сплайна второго порядка:

$$\begin{cases}K(f_C)=L(f_C)=0,5;\\ K'(f_A)=L'(f_B)=0.\end{cases} \qquad (7)$$

При выполнении данных двух условий можно получить сплайн второго порядка, зависящий от коэффициента ската α (условие $K'(f_C)=L'(f_C)$ выполняется автоматически). Для обеспечения отсутствия разрыва в первой производной на концах отрезка, положим, что $a_1=0$, тогда сплайн второго порядка будет описываться выражением (4), в котором $K(f)$ и $L(f)$ являются полиномами второго порядка вида:

$$K(f)=1-a_2\cdot\left(|f|-f_A\right)^2;\; L(f)=a_2\cdot\left(f_B-|f|\right)^2,$$

а коэффициент:

$$a_2=\frac{1}{2\alpha^2f_C^2}. \qquad (8)$$

2.2 Представление сигнала в виде сплайна третьего порядка дефекта 2. Условия формирования сплайна третьего порядка могут быть записаны аналогично (7) и имеют вид

$$\begin{cases}K(f_C)=L(f_C)=0,5;\\ K'(f_A)=L'(f_B)=0;\\ K'(f_C)\equiv L'(f_C);\\ K''(f_C)=L''(f_C).\end{cases} \qquad (9)$$

Четвертое уравнение совокупности условий (9) используется как дополнительное ввиду того, что третье уравнение является тождеством. Из совокупности условий (9) формируется сплайн вида (4) с полиномами $K(f)$ и $L(f)$

$$K(f)=1-a_2\cdot\left(|f|-f_A\right)^2-a_3\cdot\left(|f|-f_A\right)^3; \qquad (10)$$

$$L(f)=a_2\cdot\left(f_B-|f|\right)^2+a_3\cdot\left(f_B-|f|\right)^3, \qquad (11)$$

где коэффициенты сплайна a_2, a_3 являются функциями α и имеют вид

$$a_2=\frac{3}{4\alpha^2f_C^2};\; a_3=-\frac{1}{4\alpha^3f_C^3}. \qquad (12)$$

2.3 Представление сигнала в виде сплайна четвертого порядка дефекта 3. Для построения сплайна четвертого порядка запишем выражения для функций $K(f)$ и $L(f)$ согласно (5) и (6):

$$\begin{aligned}K(f)=1-a_2\cdot\left(|f|-f_A\right)^2-a_3\cdot\left(|f|-f_A\right)^3-\\ -a_4\cdot\left(|f|-f_A\right)^4;\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}L(f)=a_2\left(f_B-|f|\right)^2+a_3\left(f_B-|f|\right)^3+\\ +a_4\left(f_B-|f|\right)^4.\end{aligned} \qquad (14)$$

Таким образом, получаем, что сплайн $X(f)$ зависит от α и от трех коэффициентов a_2, a_3, a_4. Найдем их. Для этого рассмотрим условия гладкости (9). Система условий (9) осталась неизменной, так как четвертый коэффициент сплайна предполагается оставить свободным, чтобы варьировать его значения для получения не одного, а множества сплайнов, удовлетворяющих условиям системы (9). Третье уравнение является тождеством, поэтому мы имеет три уравнения для определения коэффициентов a_2, a_3, a_4:

$$\begin{cases}\alpha^2a_2+\alpha^3a_3+\alpha^4a_4=0,5;\\ -2a_2-6\alpha a_3-12\alpha^2a_4=2a_2+6\alpha a_3+12\alpha^2a_4.\end{cases} \qquad (15)$$

Выразив все коэффициенты сплайна через a_4 и α, получим:

$$a_2=\frac{3}{4f_c^2\alpha^2}+\frac{3}{2}a_4f_c^2\alpha^2;$$

$$a_3=-\frac{1}{4f_c^3\alpha^3}-\frac{5f_c\alpha}{2}.$$

3. Синтез сигналов на основе сплайн-функций

Синтез сигналов выполнен в результате подстановки найденных коэффициентов сплайна a_i в выражения (6) с последующим нахождением преобразования Фурье от спектральной плотности (4). В результате определим выражения для сигналов со спектральными плотностями в виде сплайн-функций второго и третьего порядков

$$g_2(t) = -\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\cos(f_C \cdot \alpha \cdot t) - 1\right] \cdot \sin(f_C \cdot t)}{f_C{}^2 \alpha^2 t^3}; \quad (16)$$

$$g_3(t) = \frac{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(f_C \cdot t)\left[\sin(f_C \cdot \alpha \cdot t) - f_C \cdot \alpha \cdot t \cos(f_C \cdot \alpha \cdot t)\right]}{f_C{}^3 \alpha^3 t^4}. \quad (17)$$

Сигнал со спектральной плотностью в виде сплайна четвертого порядка, является функцией коэффициента a_4 и параметра α и имеет вид

$$g_4(t) = \frac{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(f_C t)\left[\left(1 + 10 a_4 f_C{}^4 \alpha^4\right) t \cdot \sin(\alpha f_C t)\right]}{f_C{}^3 \alpha^3 t^5} - \\ - \frac{f_C \alpha \cdot \left(t^2 + 2 a_4 f_C{}^2 \alpha^2 (f_C{}^2 \alpha^2 t^2 - 8)\right) \cos(\alpha f_C t) - 16 a_4 f_C{}^3 \alpha^3}{f_C{}^3 \alpha^3 t^5}. \quad (18)$$

Исследуем сигналы (16-18) по критерию

$$\eta = \frac{\int\limits_T^{\infty} |g(t)|^2 \, dt}{\int\limits_0^{\infty} |g(t)|^2 \, dt}, \quad (19)$$

где $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(f) \, e^{-j2\pi f} df$ – импульс со спектральной плотностью вида $X(f)$.

Критерий (19) характеризует долю энергии сигнала вне первого лепестка сигнала.

Согласно (19) для сплайнов второго и третьего порядков была определена зависимость уровня энергии от значения коэффициента ската α. Для сплайнов четвертого порядка выполнен поиск оптимального по критерию (19) набора коэффициентов a_i.

Как было показано выше, сплайн четвертого порядка является функцией двух переменных – коэффициента сплайна a_4 и коэффициента ската α, следовательно, при различных значениях α, можно определить значения a_4, при которых выражение (19) будет минимальным.

На рис. 2 представлен график изменения критерия (19) от коэффициента сплайна a_4 при α = 0,5.

Используя метод Ньютона, можно определить оптимальное по критерию (19) значение коэффициента a_4, которое при α = 0,5 составляет a_4 = 16,815.

На рис. 3 и рис. 4 приведены частотные и временные характеристики сигнала со спектром типа «приподнятый косинус» и сигнала на основе сплайна четвертого порядка при α = 0,5 и $f_C = 1$.

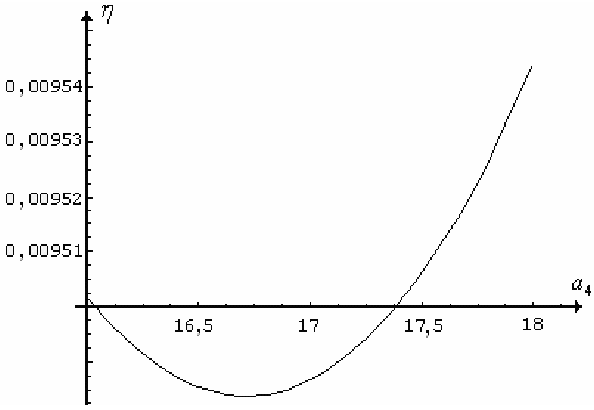

Рис. 2. Зависимость критерия η от коэффициента сплайна a_4

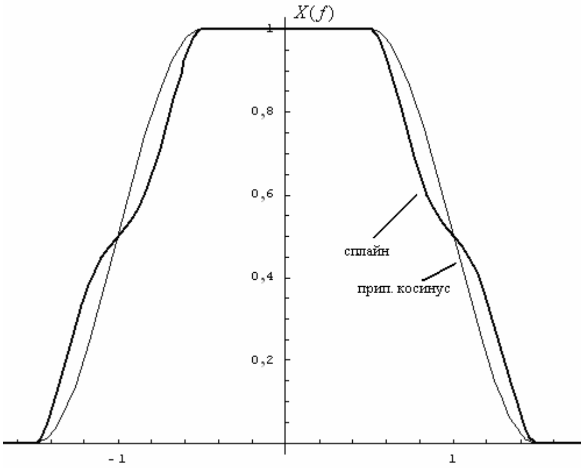

Рис. 3. Спектр сигнала в виде сплайна и спектр «приподнятого косинуса» при α=0,5

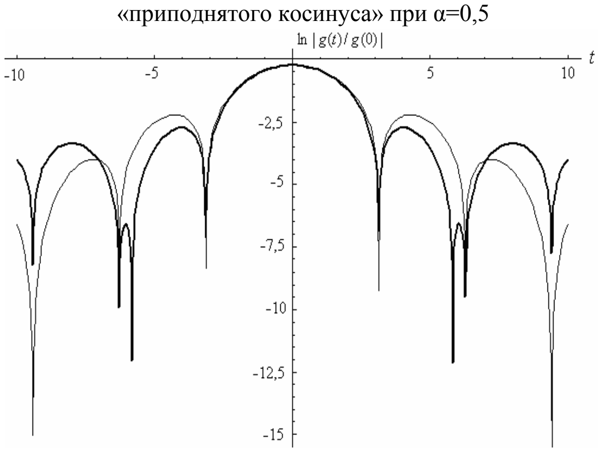

Рис. 4. Логарифм модуля синтезированного сигнала и сигнал со спектром типа «приподнятый косинус» при α = 0,5

Как видно из приведенных рисунков, первый боковой лепесток синтезированного сигнала меньше, чем у сигнала со спектром типа «приподнятый косинус».

В табл. 1 приведены значения коэффициентов полиномов и значения критерия η при различных коэффициентах ската α для сигналов в виде сплайнов второго и третьего порядка. В табл. 2 приведены аналогичные значения для сигналов в виде сплайна четвертого порядка и сигнала, обладающего спектром типа «приподнятый косинус».

Таблица 1

Уровень энергии вне основного лепестка для сигналов в виде сплайнов второго и третьего порядков ($f_C = 1$)

α	Сплайн 2 порядка		Сплайн 3 порядка		
	a_2	η_1	a_2	a_3	η_1
0,1	50	0,0773	75	–250	0,0754
0,3	5,5556	0,0451	8,3333	–9,2593	0,0408
0,5	2	0,0227	3	–2	0,0181
0,7	1,0204	0,0093	1,5306	–0,7289	0,0058
0,9	0,6173	0,0028	0,9259	–0,3429	0,0010
1	0,5	0,0014	0,75	–0,25	0,0004

Таблица 2

Уровень энергии вне основного лепестка для сигнала, в виде сплайна четвертого порядка и «приподнятого косинуса» ($f_C = 1$)

α	Прип. косинус (η)	Сплайн 4 порядка			
		a_2	a_3	a_4	η_1
0,1	0,0760	448,623	–6477,04	24908,2	0,0754
0,3	0,0420	36,4168	–165,279	208,026	0,0408
0,5	0,0191	9,3057	–23,0191	16,8153	0,0095
0,7	0,0066	3,2400	–4,8225	2,3392	0,0026
0,9	0,0014	1,2718	–0,9835	0,2847	0,0007
1	0,0005	0,8052	–0,3420	0,0369	0,0004

Результаты, приведенные в табл. 1 и 2 показывают, что синтез сигналов на основе сплайнов второго порядка не целесообразен, так как не позволяет решить поставленную задачу и получить выигрыш по критерию (19), независимо от значения α. Использование сплайнов 3-го порядка позволяет получить незначительный выигрыш по степени концентрации энергии. Наибольший выигрыш, по сравнению с приподнятым косинусом, достигается применением сплайнов 4-го порядка для случая $\alpha \in [0,5; 0,9]$.

Заключение

Предлагаемый в работе подход к синтезу сигналов с компактным спектром, удовлетворяющих критерию Найквиста, на основе сплайнов позволяет получить новые классы сигналов, обладающий меньшим уровнем энергии в боковых лепестках импульсной характеристики, по сравнению с широко применяемым сигналом со спектром в виде «приподнятого косинуса».

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

1. В работе синтезированы сигналы с компактным спектром, удовлетворяющие критерию Найквиста, на основе сплайнов второго, третьего и четвертого порядков.
2. Получены аналитические выражения сигналов в виде сплайнов, исследованы их характеристики.
3. Синтезированы сигналы, имеющие меньший уровень боковых лепестков, чем у сигнала со спектром типа «приподнятый косинус».

Практическая значимость полученных результатов состоит в возможности повышении качества систем передачи информации, которая достигается за счет уменьшения влияния боковых лепестков.

Направлением дальнейших исследований является анализ характеристик полученных сигналов и разработка методов их аппаратной реализации.

Список литературы

1.Сукачев Э.А. Синтез селективных сигналов на основе сплайн-функций // Зв'язок. – 1999. – № 2 (16). – С. 35-38.

2.Прокис Д. Цифровая связь. Пер. с англ. // Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

3.Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра. – М.: Радио и связь, 1986. – 514 с.

4.Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972 – 320 с.

5.Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984 – 382 с.

Поступила в редколлегию 21.08.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Безрук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

СИНТЕЗ СИГНАЛІВ З КОМПАКТНИМ СПЕКТРОМ НА ОСНОВІ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

А.В. Омельченко, А.А. Астраханцев, А.В. Шкловець

Розроблений метод синтезу сигналів з компактним спектром, що задовольняють критерію Найквіста. За критерієм мінімуму енергії у бокових пелюстках виконаний синтез сигналів у вигляді сплайн-функцій другого, третього і четвертого порядку. Для отриманих результатів оцінений виграш у порівнянні з сигналами, що мають спектр типа «піднесений косинус». Виконано порівняння отриманих сигналів з сигналами, які використовуються у цифрових системах зв'язку.

***Ключові слова:** синтез, сигнали с компактним спектром, критерій Найквіста, представлення сигналів, сплайн, міжсимвольна інтерференція*

SYNTHESIS OF SIGNALS WITH A COMPACT SPECTRUM ON THE BASIS OF SPLINES-FUNCTIONS

A.V. Omelchenko, A.A. Astrakhantsev, A.V. Shklovets

The questions of synthesis of signals with a compact spectrum fitting to criterion Nyquist on the basis of splines-functions are considered. By criterion of a minimum of power in side lobes the synthesis of signals as splines-functions second, third and fourth order is fulfilled. The obtained signals have a prize by the pointed criterion, in comparison with a signal having spectrum of a type «raised cosine».

***Keywords:** synthesis of signals with a compact spectrum, criterion Nyquist, representation of signals as splines, intersymbol interference.*