УДК 519.711.3:519.68

Т.С. Супрун

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Рассматриваются некоторые модели пространства входных сигналов компараторной идентификации и характеристические свойства линейных функционалов интегрального типа, действующих на этих функциональных пространствах.

Ключевые слова: *компараторная идентификация, предикат, линейный функционал интегрального типа, интегральный оператор.*

Введение

Постановка проблемы. Как правило, методы идентификации основаны на знании входного и выходного сигналов. Однако часто встречаются ситуации, при которых измерение выхода невозможно или чрезвычайно затруднено. Примером таких ситуаций могут служить сенсорные системы, где под выходом понимаются ощущения человека, системы распознавания образов, радиолокации и др. Использование традиционных методов идентификации для подобных систем не представляется возможным, поэтому в качестве основного инструмента исследования таких систем используется метод компаратора.

Анализ последних исследований и публикаций. Суть компараторного метода [1] состоит в следующем. Обследуется одновременно два одинаковых объекта, на которые подаются входные сигналы, при этом выходные сигналы сравниваются между собой и формируется двоичный ответ 1 или 0 в зависимости от совпадения или не совпадения выходных сигналов. Здесь под выходом понимается бинарная реакция на соответствующие входы. Обладая такой информацией о входе и выходе, нужно определить вид оператора F. Специфика данной модели позволяет использовать аппарат теории линейных предикатов [2]. Теория линейных предикатов позволяет решить задачу структурной идентификации для целого ряда интегральных операторов в пространствах типа L_2. Они могут быть самыми разнообразными, и не представляется возможным изучить все их типы.

Постановка задачи. В статье рассматриваются некоторые конкретные виды гильбертовых пространств типа L_2 и соответственно, некоторые конкретные типы интегральных операторов, перспективные в качестве моделей пространств входных сигналов объектов компараторной идентификации.

Компараторная идентификация линейных операторов интегрального типа

Как это характерно для линейных предикатов, идентифицируемый оператор F отображает гильбертово пространство L в эвклидово пространство R^n. В табл. 1 в первом столбце указаны типы пространств, которые будут нами рассмотрены, во втором - виды функционалов $\{f_i(x)\}$, участвующих в структуре $F[x]=(f_1(x),...,f_n(x))$.

Таблица 1

Общий вид рассмотренных функционалов

№	Тип входного пространства и вид входного сигнала	Вид функционала f_i
1.	$L=L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$, $x=x(\lambda,\tau),\lambda,\tau\in[0,1]$	$f_i(x)=\int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau)\alpha_i'(\lambda)\times$ $\times\alpha_i''(\tau)\alpha'\lambda d\tau$
2.	$L=L_2[0,1]\times L_2\{[0,1]\times$ $\times[0,1]\}$, $x=<x(\lambda),$ $y(\lambda,\tau)>,\lambda,\tau\in[0,1]$	$f_i(x)=\int_0^1 x(\lambda_i)\alpha'(\lambda)d\lambda+$ $+\int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau)\alpha_i'(\lambda)\alpha_i''(\tau)d\lambda d\tau$
3.	$K\subset L=L_2[0,1]\times$ $\times L_2\{[0,1]\times$ $\times[0,1]\},x=<x(\lambda),$ $y(\lambda,\tau)>,\lambda,\tau\in[0,1]$	$f_i(x)=$ $=\dfrac{\int_0^1 x(\lambda)\alpha_i'(\lambda)d\lambda}{\int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau)\alpha_i'(\lambda)\alpha_i''(\tau)d\lambda d\tau}$

Как видно из табл. 1 в первых двух случаях речь идет обо всем гильбертовом пространстве, а в третьей ситуации множество входных сигналов представляет собой положительный конус K гильбертового пространства. Заметим, что выбор подобного вида пространства и операторов обусловлен их распространением в психофизических и технических задачах [2, 3]. Например, этими операторами описываются такие зрительные процессы, как влияние фона на излучение в точке, эффект нормализации и др.

Начнем рассмотрение с такого пространства входных сигналов $L = L_2[0,1] \times L_2[0,1]$. Докажем вспомогательную теорему.

Теорема 1. Пусть в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ дан оператор

$$Ax(\lambda) = \int_0^1 x(\lambda)K(\lambda,\tau)d\lambda,$$

где $K(\lambda,\tau) \in L_2[0,1] \times L_2[0,1]$ обладает свойством: если для какого-либо $u \in L_2[0,1]$ выполняется равенство $(Au,1) = 0$, то $Au = 0$ почти всюду на отрезке $[0,1]$. Тогда почти всюду в квадрате $L_2[0,1] \times L_2[0,1]$ имеет место равенство:

$$K(\lambda,\tau) = f(\tau)g(\lambda).$$

Доказательство. Из свойства оператора A следует, что его образ одномерен. Действительно, пусть найдутся два линейно независимых вектора $u_1, u_2 \in \operatorname{Im} A$. Рассмотрим вектор $u = \frac{(u_2,1)}{(u_1,1)} u_1 + u_2$.

Это можно сделать, так как $(u_1,1) \neq 0$. В противном случае $u_1 = 0$, а мы взяли линейно независимые векторы. Подсчитаем:

$$(u,1) = \frac{(u_2,1)}{(u_1,1)}(u_1,1) - (u_2,1) = 0,$$

следовательно, $u = 0$, т.е. u_1 и u_2 - линейно зависимы. Противоречие.

Значит, существует $f \in L_2[0,1]$ такая, что $Au = \alpha(u)f$, где $\alpha(u)$ – линейный функционал на $L_2[0,1]$, по теореме Рисса имеет вид

$$\alpha(u) = \int_0^1 u(\lambda)g(\lambda)d\lambda.$$

В итоге имеем, что для любой $u \in L_2[0,1]$ выполняется равенство $\int_0^1 u(\lambda)[K(\lambda,\tau) - g(\lambda)f(\tau)]d\lambda = 0.$

Теперь, если умножить на любую функцию $v(\tau) \in L_2[0,1]$ и проинтегрировать по τ, то получим

$$\int_0^1\int_0^1 v(\tau)u(\lambda)[k(\lambda,\tau) - g(\lambda)f(\tau)]d\lambda d\tau = 0.$$

Таким образом, линейный функционал с ядром $K(\lambda,\tau) - g(\lambda)f(\tau)$ равен нулю на всех функциях вида $v(\tau)u(\lambda)$ и, соответственно, на всех линейных комбинациях, которые содержат многочлены от двух переменных λ, τ, являющихся всюду плотным множеством в $L_2[0,1] \times [0,1]$. Значит, функционал нулевой и почти всюду имеет место равенство $K(\lambda,\tau) = g(\lambda)f(\tau)$. Утверждение доказано.

Теорема 2. Предикат $E(x,y)$, заданный на декартовом квадрате $L = L_2[0,1] \times L_2[0,1]$, имеет вид:

$$E(x,y) = D(F[x],F[y]), \tag{1}$$

где $x, y \in L_2\{[0,1] \times L_2[0,1]\}$, $F[x] = \{f_1(x),...,f_n(x)\}$,

$$f_i(x) = \int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau)\alpha_i'(\lambda)\alpha_i''(\tau)d\lambda d\tau, \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда он удовлетворяет одному из наборов условий теоремы о существовании линейного предиката [4] и свойству: существует функция $f(\tau) \in L_2[0,1]$ такая, что для любых $u_1(\lambda), u_2(\lambda) \in L_2[0,1]$ и $v(\tau) \in L_2[0,1]$ из равенства $E(u_1 f, u_2 f) = 1$ вытекает $E(u_1 vf, u_2 vf) = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть предикат $E(x,y)$ имеет вид (1) с функционалами (2). Тогда он является линейным, и, поскольку в теореме о существовании линейного предиката указаны наборы характеристических свойств линейных предикатов, то этим наборам заданный предикат удовлетворяет.

Докажем выполнение дополнительного свойства, указанного в теореме. Возьмем функцию $f(\tau) = L_2[0,1]$, для которой

$$(f, \alpha''_i) \neq 0, \; i = 1,...,n. \tag{3}$$

Тогда в случае $E(u_1 f, u_2 f) = 1$ имеем

$$\int_0^1\int_0^1 u_1(\lambda)f(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 u_2(\lambda)f(\tau)\alpha'_i(\tau)d\lambda d\tau, \; i = \overline{1,n}.$$

Домножим обе части равенства на $\int_0^1 f(\tau)v(\tau)\alpha''_i(\tau)d\tau$ при любом $v(\tau) \in L_2[0,1]$, получим:

$$\int_0^1\int_0^1 u_1(\lambda)f(\tau)v(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 u_2(\lambda)f(\tau)v(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau, \; i = \overline{1,n},$$

т.е. $E(u_1, vf, u_2 vf) = 1$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть предикат $E(x,y)$ удовлетворяет одному из наборов условий теоремы о существовании линейного предиката. Тогда он является линейным и функционалы $f_i(x)$ в силу своей линейности по теореме Рисса имеют вид

$$f_i(x) = \int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau)\alpha_i(\lambda,\tau)d\lambda d\tau, \; i = \overline{1,n}.$$

Воспользуемся дополнительным свойством, сформулированным в теореме. Это означает, что из равенств

$$\begin{gathered}\int_0^1\int_0^1 u_1(\lambda)f(\tau)\alpha_i(\lambda)d\lambda d\tau = \\ = \int_0^1\int_0^1 u_2(\lambda)f(\tau)\alpha_i(\lambda)d\lambda d\tau, i = \overline{1,n}\end{gathered} \tag{4}$$

следует

$$\int_0^1\int_0^1 v(\tau)u_1(\lambda)f(\tau)\alpha_i(\lambda,\tau)d\lambda d\tau =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 v(\tau)u_2(\lambda)f(\tau)\alpha_i(\lambda,\tau)d\lambda d\tau, i = 1,...,n. \quad (5)$$

Обозначим

$$k_i(\lambda,\tau) = f(\tau)\alpha_i(\lambda,\tau),\ u = u_1(\lambda) - u_2(\lambda)$$

$$\text{и } A_i u = \int_0^1 u(\lambda)k_i(\lambda,\tau)d\lambda.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в виде $(A_i u, 1) = 0.$ Из него следует (5), которое имеет вид $(A_i u, v) = 0$ для любого $v(\tau) \in L_2[0,1]$, т.е. $A_i u = 0$ почти всюду. Другими словами, операторы A_i удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, $k_i(\lambda,\tau) = f'_i(\lambda)f''_i(\tau), i = \overline{1,n},$ но отсюда вытекает, что $\alpha_i(\lambda,\tau) = \alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau), i = \overline{1,n}.$ Теорема доказана.

Пусть теперь множество входных сигналов имеет следующую структуру

$$L = L_2[0,1] \times L_2\{[0,1]\times[0,1]\}.$$

Отметим следующее обстоятельство. Пусть дано линейное пространство $L = L_1 \times L_2$, являющееся прямым произведением двух гильбертовых пространств L_1 и L_2. Тогда известно [5], что его можно сделать гильбертовым, задав скалярное произведение формулой

$$(\langle x_1 y_1\rangle,\ \langle x_2 y_2\rangle) = (x_1, x_2)_1 + (y_1 y_2)_2,$$

где $\langle x_1 y_1\rangle, \langle x_2 y_2\rangle \in L,$ $(x_1, x_2)_1 -$ скалярное произведение в гильбертовом пространстве L_1, а $(y_1, y_2)_2$ – в L_2. Общий вид линейного функционала f в L будет иметь вид

$$f(< x, y >) = (x, f_1)_1 + (y, f_2)_2,\ \text{где } < f_1, f_2 > \in L.$$

Воспользуемся этим в дальнейшем, и будем рассматривать гильбертово пространство $L = L_2[0,1] \times L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$ со скалярным произведением

$$(\langle x_1(\lambda), y_1(\lambda,\tau)\rangle, \langle x_2(\lambda), y_2(\lambda,\tau)\rangle) =$$

$$= \int_0^1 x_1(\lambda)x_2(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_0^1 y_1(\lambda,\tau)y_2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau.$$

Теорема 3. Предикат $E(z_1, z_2)$, заданный на декартовом квадрате $L = L_2[0,1] \times L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$, имеет вид:

$$E(z_1, z_2) = D(F[z_1], F[z_2]), \quad (6)$$

где

$$z_k =< x_k(\lambda), y_k(\lambda,\tau) > \in L;\ F[z_k] = \{f_1(z_k),...,f_n(z_k)\};$$

$$f_i(z_k) = \int_0^1 x_k(\lambda)\alpha'_i(\lambda)d\lambda +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 y_k(\lambda,\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau,\ k = 1,2,\ i = \overline{1,n}, \quad (7)$$

тогда и только тогда, когда он удовлетворяет одному из наборов условий теоремы о существовании линейного предиката и свойствам:

1) существует функция $f(\tau) \in L_2[0,1]$ такая, что для любых $x(\lambda), u_1(\lambda), u_2(\lambda) \in L_2[0,1]$ и $v(\tau) \in L_2[0,1]$ из равенства $E(z_1, z_2) = 1$ вытекает $E(z'_1, z'_2) = 1,$ где $z_1 = \langle x(\lambda), u_1(\lambda)f(\tau)\rangle,$ $z_2 = \langle x(\lambda), u_2(\lambda)f(\tau)\rangle,$ $z'_1 = \langle x(\lambda), u_1(\lambda)f(\tau)v(\tau)\rangle,$ $z'_2 = \langle x(\lambda), u_2(\lambda)f(\tau)v(\tau)\rangle;$ для любых $x_1(\lambda), x_2(\lambda),$ $u(\lambda) \in L_2[0,1]$ и $v(\tau) \in L_2[0,1]$ из равенства $E(z_1, z_2) = 1$ вытекает $E(z'_1, z'_2) = 1,$ где $z_1 =< x_1(\lambda), u(\lambda)v(\tau) >;$ $z_2 =< x_2(\lambda), u(\lambda)v(\tau) >;$ $z'_1 =< u(\lambda), x_1(\lambda)v(\tau) >;$ $z'_2 =< u(\lambda), x_2(\lambda)v(\tau) >.$

Доказательство. Условия теоремы о существовании линейного предиката обеспечивают линейность предиката, поэтому, как и в предыдущей теореме, в сторону необходимости их доказывать не надо. Требуется обосновать для линейного предиката (6) с функционалами (7) выполнение двух дополнительных условий, сформулированных в теореме. Заметим, что первое из них аналогично свойству теоремы 3 и относится ко второму слагаемому в равенствах (7). Его необходимость и достаточность доказывается так же, как и в предыдущем случае. Необходимость второго условия доказывается непосредственной проверкой.

Перейдем к доказательству достаточности. Из теорем о существовании линейного предиката и 3 сразу вытекает, что предикат $E(z_1, z_2)$ имеет вид (6) с функционалами $f_i(z)$ типа

$$f_i(z) = \int_0^1 x(\lambda)\beta_i(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau.$$

Выполнение в этом случае свойства 2) означает, что из равенства

$$\int_0^1 x_1(\lambda)\beta_i(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_0^1 u(\lambda)v(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau =$$

$$\int_0^1 x_2(\lambda)\beta_i(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_0^1 u(\lambda)v(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau$$

вытекает

$$\int_0^1 x_2(\lambda)\beta_i(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_0^1 x_1(\lambda)v(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau =$$

$$\int_0^1 x_2(\lambda)\beta_i(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_0^1 x_2(\lambda)v(\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau,$$

при любых $x_1(\lambda), x_2(\lambda), u(\lambda) \in L_2[0,1]$ и

$v(\tau) \in L_2[0,1]$. Другими словами, имеем, если

$$\int_0^1 x(\lambda)\beta_i(\lambda)d\lambda = 0, i = 1,...,n,$$

то $\int_0^1\int_0^1 x(\lambda)\alpha'_i(\lambda)d\lambda = 0,\ i = \overline{1,n}.$

Но для линейных функционалов это означает, что почти всюду $\beta_i(\lambda) = c_i\alpha'_i(\lambda), i = \overline{1,n}$, где c_1 – постоянные, которые можно загнать в ядра $\alpha''_i(\tau)$. В итоге получим, что

$$f_i(z) = \int_0^1 x(\lambda)\alpha'_i(\lambda)d\lambda +$$
$$+\int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(\tau)d\lambda d\tau,\ i = \overline{1,n}.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что свойства теорем 2 и 3 не вытекают из условий, необходимых и достаточных для существования линейного предиката, так как они касаются частных видов функционалов в гильбертовом пространстве. Поэтому, если возьмем независимый набор свойств, обеспечивающий существование линейного предиката (свойства теоремы о существовании линейного предиката) и приплюсуем к нему свойства теоремы 2 или теоремы 3, то получим несократимый набор условий, необходимый и достаточный для того, чтобы произвольный предикат $E(x, y)$ был линейным с функционалами специального вида. Следует подчеркнуть, что ядра факториального типа, которые встречаются в последних двух теоремах, возникают не только при изучении фона на излучение в данной точке, но и в случае, когда преобразование системы представляет собой суперпозицию двух линейных операторов.

Предикаты линейного отношения

Рассмотрим третий случай из табл. 1.

Определение 1. Назовем предикат $E(x, y)$, заданный на декартовом квадрате положительного конуса K гильбертова пространства $L = L_2[0,1]\times L_2\{[0,1]\times L_2[0,1]\}$, предикатом *линейного отношения,* если он имеет вид

$$E(x,y) = D(F[x],F[y]), \tag{8}$$

где

$$x, y \in K;\ F[x] = \{f_1(x),...,f_n(x)\};\ x = \langle x_1(\lambda), x_2(\lambda)\rangle;$$

$$f_i(x) = \frac{\alpha_i(x_1)}{\beta_i(x_2)}, i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

а $\{\alpha_i(x_1)\}_{i=1}^n, \{\beta_i(x_2)\}_{i=1}^n$ – системы линейных линейно независимых функционалов, заданные на $L_2[0,1]$ и $L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$, соответственно, с ядрами, принадлежащими положительным конусам соответствующих пространств и имеющими вид:

$$\alpha_i(x_1) = \int_0^1 x_1(\lambda)\alpha_i(\lambda)d\lambda\ ;$$

$$\beta_i(x_2) = \int_0^1\int_0^1 x_2(\lambda,\tau)\beta_i(\lambda,\tau)d\lambda d\tau, i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Заметим, что задание предиката на положительном конусе при помощи функционалов с положительными ядрами существенно, так как в этом случае имеет смысл выражение (9).

Используя результаты п. 1, получим теорему об условиях существования предикатов линейного отношения. Рассмотрим некоторые свойства, которыми они обладают.

Зафиксируем $u(\lambda) \in L_2[0,1]$ и $v(\lambda,\tau) \in L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$.

Обозначим подмножество L через множества M и N, задаваемые формулами:

$$M = \{x \in L : x = \langle x_1(\lambda), v(\lambda,\tau)\rangle\};$$
$$N = \{x \in L : x = \langle u(\lambda), x_2(\lambda,\tau)\rangle\}.$$

Ясно, что множество M − это положительный конус в $L_2[0,1]$, а N − положительный конус в $L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$.

Рассмотрим сужение предиката $E(x, y)$ на $M\times M$. Это будет предикат, фактически зависящий от x_1 и y_1. Обозначим его через $G(x_1, y_1)$. Аналогичный предикат, получаемый сужением $E(x, y)$ на $N\times N$, обозначим через $T(x_2, y_2)$.

Допустим теперь, что $E(x, y)$ предикат линейного отношения. Тогда

$$\begin{aligned}F(x_1,y_1) &= E(\langle x_1(\lambda), v(\lambda,\tau)\rangle, \langle y_1(\lambda), v(\lambda,\tau)\rangle) = \\ &= D(F[x],F[y]) = D\left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta(v)}, \frac{\alpha(y_1)}{\beta(v)}\right) = D(\alpha(x_1),\alpha(y_1)),\end{aligned} \tag{11}$$

где $\frac{\alpha(x_1)}{\beta(v)} = \left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta_1(v)},...,\frac{\alpha_n(y_1)}{\beta_n(v)}\right) = F[x].$

Из (11) и определения предиката линейного отношения вытекает, что $G(x_1, y_1)$ является линейным предикатом, заданном на декартовом квадрате $K_1\times K_1$, где K_1 - положительный конус в $L_2[0,1]$.

Аналогично

$$T(x_2, y_2) = D(\beta(x_2), \beta(y_2)), \tag{12}$$

где $x_2, y_2 \in K_2$ - положительный конус в $L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$, т.е. $T(x_2, y_2)$ - тоже линейный предикат, заданный на $K_2\times K_2$. Таким образом, мы установили следующее свойство:

Если $E(x, y)$ является предикатом линейного отношения, то предикаты $G(x_1, y_1)$ и $T(x_2, y_2)$ являются линейными предикатами для любых $u(\lambda)$

и $v(\lambda,\tau)$, причем, как видно из (11) и (12), эти предикаты не зависят от выбора $u(\lambda)$ и $v(\lambda,\tau)$. Это свойство будем называть *частичной линейностью.*

Предположим, что

$$G(x_1,y_1)=1,\ T(x_2,y_2)=1, \tag{13}$$

тогда $\alpha(x_1)=\alpha(x_2)$ и $\beta(x_2)=\beta(y_2)$. В этом случае следующие равенства эквивалентны:

$$\frac{\alpha(x_1)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(z)}{\beta(y)} \text{ и } \frac{\alpha(y_1)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(z)}{\beta(y)};$$

$$\frac{\alpha(u)}{\beta(v)}=\frac{\alpha(\omega)}{\beta(x_2)} \text{ и } \frac{\alpha(u)}{\beta(v)}=\frac{\alpha(\omega)}{\beta(x_2)}.$$

Другими словами, из равенства (13) вытекает:

$$E(\langle x_1(\lambda),x(\lambda,\tau)\rangle,\langle z(\lambda),y(\lambda,\tau)\rangle)=$$
$$=E(\langle y_1(\lambda),x(\lambda,\tau)\rangle,\langle z(\lambda),y(\lambda,\tau)\rangle);$$
$$E(\langle u(\lambda),v(\lambda,\tau)\rangle,\langle \omega(\lambda),x_2(\lambda,\tau)\rangle)=$$
$$=E(\langle u(\lambda),v(\lambda,\tau)\rangle,\langle \omega(\lambda),y_2(\lambda,\tau)\rangle),$$

при любом выборе функций $z,u,\omega\in K_1$ и $x,y,v\in K_2$. Назовем это свойством *инвариантности.*

Отметим, что линейные предикаты характеризуются тем, что разбиение на классы эквивалентности они осуществляют при помощи набора n линейно независимых функционалов. Причем, как уже говорилось, этот набор можно изменить, взяв линейно независимые комбинации данных функционалов. Это изменение соответствует изменению базиса в аксиоме n-мерности. И, вообще, то, к какому набору линейных функционалов придем, зависит от выбора этого базиса. Когда рассматриваем линейный предикат, он, в общем случае, может быть произвольным, лишь бы он принадлежал той области, на которой задан предикат.

Когда же мы имеем дело с предикатами линейного отношения, то это свойство не наблюдается. Чтобы прийти к виду (8) с функционалами (9) недостаточно выбрать произвольный базис. Однако необходимым условием существования подобных предикатов является свойство, которое мы называем *квазиоднородностью*, и заключается оно в следующем.

Существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $e_i=\langle e_j'(\lambda),e_j''(\lambda,\tau)\rangle$ такой, что для любого номера $k\in\{1...n\}$ и $\lambda\in R$ из равенства $E(x,y)=1$, где $x=\langle x_1(\lambda),x_2(\lambda,\tau)\rangle$ и условия, что $x^*=\langle x_1{}^*(\lambda),x_2{}^*(\lambda,\tau)\rangle$ обладает свойством $a_k(x_1{}^*)=\lambda a_k(x_1),\beta_k(x_2{}^*)=\lambda\beta_k(x_2)$, следует $E(x^*,y)=1$. Справедливость этого свойства вытекает из предиката линейного отношения.

Теперь можем сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 4. Предикат $E(x,y)$, заданный на декартовом квадрате положительного конуса K гильбертового пространства $L=L_2[0,1]\times L_2\{[0,1]\times\times[0,1]\}$, является предикатом линейного отношения тогда и только тогда, когда он обладает свойствами частичной линейности, инвариантности, квазиоднородности, симметричности и транзитивности.

Доказательство. Необходимость этого утверждения доказана выше. Остановимся на достаточности.

Предварительно заметим, что условие частичной линейности содержит предикаты G и T. При его выполнении они должны быть линейными, т.е. удовлетворять условиям теоремы о существовании линейного предиката, которые накладывают определенный набор свойств на предикат $E(x,y)$, и, соответственно, данная теорема может быть сформулирована при помощи этих свойств.

Теперь перейдем к доказательству достаточности. Напомним, что через K_1 обозначаем положительный конус в $L_2[0,1]$, а через K_2 - положительный конус в $L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$. Произведем разбиение множества K_1 на классы эквивалентности.

Два элемента x_1 и $x_1'\in K_1$ эквивалентны, если для любых $x,x'\in L$ вида $x=\langle x_1,x_2\rangle$ и $x'=\langle x_1',x_2'\rangle$ выполняется условие $E(x,z)=E(x',z)$ при произвольных $x_2,x_2'\in K_2$ и $z\in L$.

Разобьем аналогичным образом множество K_2. Два элемента x_2 и $x_2'\in K_2$ эквивалентны, если для любых $x,x'\in H$ вида $x=\langle x_1,x_2\rangle$ и $x'=\langle x_1',x_2'\rangle$ выполняется $E(x,z)=E(x',z)$ при произвольных $\lambda=1/\beta_2(x_2)$ и $z\in L$.

Допустим, $x_1,x_1'\in K_1$ и $x_1\Leftrightarrow x_1'$ (эквивалентны). Тогда $E(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,x_2\rangle)=E(\langle x'_1,x_2\rangle,\langle y_1,x_2\rangle)$

$$\text{или}\qquad G(x_1,y_1)=G(x'_1,y_1) \tag{14}$$

для любого $y_1\in K_1$. Но G - линейный предикат, следовательно, из (14) следует, что

$$\alpha(x_1)=\alpha(x'_1). \tag{15}$$

(Напомним, что под $\alpha(x)$ понимаем набор из n функционалов и равенство (15) означает, что $\alpha_i(x_1)=\alpha_i(x'_1)$ для любого $i=\overline{1,n}$).

Предположим, что справедливо равенство (15). Это означает $G(x_1,x'_1)=1$ и по свойству инвариантности получаем эквивалентность x_1 и x'_1. Таким образом, мы установили, что два элемента x_1 и $x'_1\in K_1$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\alpha(x_1)=\alpha(x'_1)$. Аналогично можно показать, что эквивалентности x_2 и $x'_2\in K_2$ имеют место в том и только в том случае, когда $E(x_1{}^*,y)=1$.

Нужно сказать, что если в определении эквивалентности изменить предыдущее равенство на $E(z,x)=E(z,x')$, то получим те же разбиения в силу симметричности нашего предиката.

В итоге получим, что классы эквивалентности определяются наборами положительных чисел $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. А это означает, что наш предикат представим в виде:

$$T(x,y) = R(\alpha(x_1),\alpha(y_1),\beta(x_2),\beta(y_2)), \qquad (16)$$

где $x, y \in L$, а R - предикат, заданный на $R_n^+ \times \times R_n^+ \times R_n^+ \times R_n^+, R_n^+ -$ положительный конус в R_n.

Допустим, мы выбрали функционалы $\alpha(x_1)$ и $\beta(x_2)$, при которых выполняется свойство квазиоднородности (такие по условию существуют). Тогда из него и (16) вытекает следующее свойство предиката R:

$$R(\alpha(x_1),\alpha(y_1),\beta(x_2),\beta(y_2)) = 1, \qquad (17)$$

тогда и только тогда, когда

$$R\left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta(x_2)},\frac{\alpha(y_1)}{\beta(y_2)},e,e\right)=1,$$

где $\dfrac{\alpha(x_1)}{\beta(x_2)}=\left(\dfrac{\alpha(x_1)}{\beta_1(x_2)},...,\dfrac{\alpha_n(x_1)}{\beta_n(x_2)}\right)$, а $e=\underbrace{(1,...,1)}_{n}$.

Докажем это. Пусть имеет место равенство (17). Отсюда $E(x,y)=1$.

Возьмем $x_1{*} = \langle x_{11}{*}(\lambda), x_{12}{*}(\lambda,\tau)\rangle$ такое, что $\alpha_1(x_{11}{*}) = \dfrac{\alpha_1(x_1)}{\beta_1(x_2)}$, $\beta_1(x_{12}{*}) = 1$, , т. е. $\lambda = 1/\beta_1(x_2)$.

Тогда из квазиоднородности следует $E(x_1{*}, y) = 1$.

Затем x_2^*, для которого $\alpha_1(x_{11}{*}) = \alpha_1(x_{21}{*})$, $\beta_1(x_{22}{*}) = 1$, $\alpha_2(x_{21}{*}) = \dfrac{\alpha_2(x_1)}{\beta_2(x_2)}$ и $\beta_2(x_{22}{*}) = 1$, т. е. $\lambda = 1/\beta_2(x_2)$. Отсюда $E(x_2{*}, y) = 1$ и так далее. Эту процедуру проделаем n раз. В итоге получим: $E(x_n{*}, y) = 1$ или, учитывая (16),

$$R\left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta(x_2)},\alpha(y_1),e,\beta(y_2)\right)=1.$$

В силу симметричности квазиоднородность можно применить и к y. Окончательно имеем

$$R\left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta(x_2)},\frac{\alpha(y_1)}{\beta(y_2)},e,e\right)=1.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично, только на каждом этапе нужно брать $\lambda = \beta_1(x_2), \beta_2(x_2), ..., \beta_n(x_2)$.

Обозначим через $R(a,b,e,e) = P(a,b)$, где $a,b,e \in R_n^+$ и $e=\underbrace{(1,...,1)}_{n}$. Предикат $P(a,b)$ задан на $R_n^+ \times R_n^+$ и фактически мы доказали, что

$$E(x,y)=P\left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta(x_2)},\frac{\alpha(y_1)}{\beta(y_2)}\right).$$

Покажем, что предикат $P(a,b)$ есть предикат равенства. То, что это предикат эквивалентности, легко следует из условий теоремы. Остается доказать, что каждый класс эквивалентности состоит из одного элемента.

Пусть для каких-либо $a, b \in R_n^+$ имеет место равенство $P(a,b)=1$. Возьмем $x, y \in L$, для которых $\alpha(x_1) = a, \alpha(y_1) = b, \beta(x_2) = e$ и $x_2 = y_2$. Тогда

$$1=P(a,b)=P\left(\frac{\alpha(x_1)}{\beta(x_2)},\frac{\alpha(y_1)}{\beta(y_2)}\right)=E\left(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle\right).$$

Но отсюда следует, что $G(x_1, y_1) = 1$, а G - линейный предикат, значит $\alpha(x_1) = \alpha(y_1)$ или $a = b$, следовательно, P - предикат равенства. Теорема доказана.

Выводы

Выделены наиболее типичные модели пространства входных сигналов и получены характеристические свойства линейных функционалов интегрального типа, действующих на этих функциональных пространствах. Рассмотрен случай ограничения множества входных сигналов на случай положительного конуса.

Список литературы

1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. – Х.: Вища школа, 1987. – 159 с.*
2. *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. Теория цветового зрения. – Х.: Фактор-Друк, 2002. – 206 с.*
3. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов. – М.: Наука, 1950. – 483 с.*

Поступила в редколлегию 21.08.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

КОМПАРАТОРНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ЯДРАМИ

Т.С. Супрун

Розглядаються деякі моделі компараторной ідентифікації у вигляді лінійних операторів інтегрального типу.

Ключові слова: *компараторна ідентифікація, предикат, лінійний функціонал інтегрального типу, інтегральний оператор.*

THE COMPARATOR IDENTIFICATION OF LINEAR SYSTEMS WITH INTEGRATED KERNELS

T.S. Suprun

Are considered some comparator identifications models in the form of integrated type linear operators.

Keywords: *comparator authentication, predicate, linear functional of integral type, integral operator.*