УДК 621.391

С.И. Приходько, Н.А. Штомпель, А.В. Бушримас

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков

МЕТОД БЛОКОВОГО ЧАСТОТНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Показана возможность декодирования сверточного кода в частотной области путем разделения кодового слова сверточного кода на блоки и последовательного декодирования каждого из них. Ожидается, что применение данного метода позволит уменьшить сложность декодирования сверточного кода за счет использования быстрого преобразования Фурье на соответствующих этапах декодирования.

Ключевые слова: *сверточный код, декодирование, частотная область.*

Введение

Среди классических методов декодирования сверточных кодов наибольшее распространение получил метод декодирования по максимуму правдоподобия (алгоритм Витерби). Недостатком данного метода является экспоненциальное увеличение сложности декодирования с ростом длины кода, поэтому актуальной задачей является разработка метода декодирования с меньшей сложностью реализации [1 – 4]. Одним из путей решения данной задачи является декодирование сверточного кода в частотной области.

Постановка проблемы и анализ литературы. Рассмотрим процесс кодирования информации сверточным кодом во временной области [5].

Пусть задан сверточный (n, k) код со скоростью R=1/m над полем GF(p) с порождающими многочленами:

$$p_1(x) = p_{1,\,r-1}x^{r-1} + p_{1,\,r-2}x^{r-2} + \ldots + p_{1,\,1}x + p_{1,\,0};$$
$$p_2(x) = p_{2,\,r-1}x^{r-1} + p_{2,\,r-2}x^{r-2} + \ldots + p_{2,\,1}x + p_{2,\,0};$$
$$\ldots$$
$$p_m(x) = p_{m,\,r-1}x^{r-1} + p_{m,\,r-2}x^{r-2} + \ldots + p_{m,\,1}x + p_{m,\,0},$$

где коэффициенты при x являются элементами поля GF(p).

Информационный многочлен, поступающий на вход данного сверточного кода, представим в виде:

$$i(x) = i_0 + i_1x + \ldots + i_{k-1}x^{k-1},$$

где коэффициенты при x также элементы поля GF(p).

Тогда при кодировании в результате произведения информационного многочлена на порождающие многочлены образуются многочлены вида:

$$f_1(x) = i(x)\,p_1(x) = f_{1,\,k+r-2}x^{k+r-2} + \ldots + f_{1,\,1}x + f_{1,\,0};$$
$$f_2(x) = i(x)\,p_2(x) = f_{2,\,k+r-2}x^{k+r-2} + \ldots + f_{2,\,1}x + f_{2,\,0};$$
$$\ldots$$
$$f_m(x) = i(x)\,p_m(x) = f_{m,\,k+r-2}x^{k+r-2} + \ldots + f_{m,\,1}x + f_{m,\,0},$$

где коэффициенты при x принадлежат полю GF(p).

Отметим, что во временной области произведение многочленов дает свертку их коэффициентов:

$$f_{1,i} = \sum_{k=0}^{n-1} i_k\, p_{1,\,((i-k))}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$f_{2,i} = \sum_{k=0}^{n-1} i_k\, p_{2,\,((i-k))}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$\ldots$$
$$f_{m,i} = \sum_{k=0}^{n-1} i_k\, p_{m,\,((i-k))}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Кодовый многочлен сверточного кода образуется в результате считывания коэффициентов при одинаковых степенях многочленов:

$$c(x) = (f_{1,\,k+r-2}\, f_{2,\,k+r-2}\, f_{m,\,k+r-2})x^{k+r-2} + \ldots$$
$$+ (f_{1,\,1}\, f_{2,\,1}\, f_{m,\,1})x + (f_{1,\,0}\, f_{2,\,0}\, f_{m,\,0}),$$

где коэффициенты при x являются набором элементов поля GF(p).

Тогда кодовый многочлен можно представить в виде:

$$c(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1x + c_0,$$

где коэффициенты при x являются элементами поля GF(p^m).

Таким образом, мы осуществили представление сверточного кода во временной области.

Цель статьи. Разработка метода блокового частотного декодирования сверточных кодов.

Основная часть

Для представления сверточного кода в частотной области воспользуемся преобразованием Фурье.

Для этого применим данное преобразование к информационному многочлену и порождающим многочленам сверточного кода, дополнив исходные последовательности нулями до значения (n-1):

$$I_j = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{ij} i_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$P_{1,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{ij} p_{1,i}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$P_{2,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{ij} p_{2,i}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1;$$

…

$$P_{m,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{ij} p_{m,i}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где α – элемент порядка n в поле $GF(p^m)$;

I_j, $P_{1,j}$, $P_{2,j}$, $P_{m,j}$ – векторы над полем $GF(p^m)$.

Тогда, согласно теореме о свертке, в частотной области получим следующие последовательности [5]:

$$F_{1,j} = I_j P_{1,j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$F_{2,j} = I_j P_{2,j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1;$$

…

$$F_{m,j} = I_j P_{m,j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $F_{1,j}$,$F_{2,j}$, $F_{m,j}$ – векторы над полем $GF(p^m)$.

Тогда кодовый многочлен сверточного кода в частотной области представим в виде:

$$C(x) = (F_{1,n-1} F_{2,n-1} F_{m,n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (F_{1,0} F_{2,0} F_{m,0}),$$

где коэффициенты при x являются набором элементов поля $GF(p^m)$.

Данный кодовый многочлен также можно записать следующим образом:

$$C(x) = C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \ldots + C_0,$$

где коэффициенты при x принадлежат полю $GF(p^m)$.

С другой стороны известно, что согласно алгебраическому методу построения сверточных кодов порождающие многочлены $p_1(x) \ldots p_m(x)$ можно представить в виде обобщенного порождающего многочлена:

$$p(x) = p_{r-1} x^{r-1} + p_{r-2} x^{r-2} + \ldots + p_1 x + p_0,$$

где коэффициенты при x являются элементами поля $GF(p^m)$.

Тогда, дополнив исходную последовательность нулями до значения (n-1), представим порождающую последовательность в частотной области с помощью преобразования Фурье в виде:

$$P_j = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{ij} p_i, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где P_j – вектор над полем $GF(p^m)$.

Следовательно, кодовое слово сверточного кода в частотной области можно переписать следующим образом:

$$C_j = I_j P_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где C_j – вектор над полем $GF(p^m)$, который затем отображается в наборы элементов поля $GF(p)$.

Рассмотрим процесс формирования кодового слова сверточного кода. Для этого представим информационную последовательность сверточного кода блоками по K символов:

$$I_j = (I_0, I_1, \ldots, I_{K-1}) \cup \ldots \cup (I_{iK}, I_{iK+1}, \ldots, I_{n-1}) =$$

$$= I_0` \cup I_1` \cup \ldots \cup I_{n-1}`.$$

Тогда кодовое слово сверточного кода в частотной области можно записать в виде произведений блоков информационной последовательности на обобщенную порождающую последовательность:

$$C_j = I_j P_j = I_0` P_j \cup I_1` P_j \cup \ldots \cup I_{n-1}` P_j =$$

$$= C_0` \cup C_1` \cup \ldots \cup C_{n-1}` = \sum_{i=0}^{n-1} \|C_i`\|_N \cdot \|0, I\|_{N, i\cdot K+N},$$

где $\|0, I\|_{N, i\cdot K+N}$ – единичная матрица с добавленными слева нулевыми столбцами.

Следовательно, кодовое слово сверточного кода в частотной области формируется путем наложения совокупности кодовых блоков $C_j`$ и суммированием соответствующих символов данных блоков.

Предположим теперь, что при передаче по каналу связи кодовое слово сверточного кода исказилось под воздействием помех и принятая последовательность равна:

$$V_j = C_j + E_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где E_j – вектор ошибок над полем $GF(p^m)$.

Представим вектор ошибок сверточного кода блоками по K символов:

$$E_j = (E_0, E_1, \ldots, E_{K-1}) \cup \ldots \cup (E_{iK}, E_{iK+1}, \ldots, E_{n-1}) =$$

$$= E_0` \cup E_1` \cup \ldots \cup E_{n-1}`.$$

Тогда принятую последовательность в частотной области можно представить в виде суммы блоков кодовой последовательности и вектора ошибок:

$$V_j = C_0` + E`_0 \cup C_1` + E`_1 \cup \ldots \cup C_{n-1}` + E`_{n-1} =$$

$$= V_0` \cup V_1` \cup \ldots \cup V_{n-1}` =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|V_i`\|_N \cdot \|0, I\|_{N, i\cdot K+N}.$$

Таким образом, принятая последовательность сверточного кода в частотной области формируется наложением принятых блоков $V_j`$ и суммированием соответствующих элементов данных блоков.

Известно, что декодирование сверточного кода во временной области можно производить частями путем вычисления синдромов принятых кодовых блоков и нахождением на их основании векторов ошибок [5]. Данное утверждение позволяет предположить, что в частотной области также можно осуществлять декодирование сверточного кода блоками.

Рассмотрим нулевой принятый блок сверточного кода:

$$V_0` = (V_0, V_1, \ldots, V_{N-K-1}, \ldots, V_{N-1}),$$

где $V_0 = \ldots = V_{N-K-1} = 0$ – проверочные частоты принятого вектора.

Данные проверочные частоты представляют собой синдром принятого вектора в частотной области:

$$S_0` = (S_0, S_1, \ldots, S_{-N-K-1}).$$

Если компоненты вектора S равны нулю, то в принятом векторе ошибок нет, иначе данный вектор искажен и необходимо найти вектор ошибок.

Предположим, что произошло $v \le t$ ошибок и этим ошибкам соответствуют неизвестные позиции $i_1, i_2, \ldots, i_v$, тогда вектор ошибок E` запишем в виде:

$$E_0` = (E_{i1}, E_{i2} \ldots E_{iv}),$$

где E_{il} – величина l-й ошибки.

Для определения значений и положения ошибок воспользуемся многочленом локаторов ошибок $\Lambda(x)$:

$$\Lambda(x) = \prod_{k=1}^{v} (1 - x\alpha^{i\,k}) = \Lambda_v x^v + \Lambda_{v-1} x^{v-1} + \ldots + \Lambda_0.$$

Обратное преобразование Фурье вектора Λ вычисляется как значения $\Lambda(\alpha^{-i})$ многочлена $\Lambda(x)$ в точках α^{-i}, тогда во временной области $\lambda_i=0$ при $e_i\neq0$. Следовательно, $\lambda_i e_i=0$ и согласно теореме о свертке свертка в частотной области равна

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Lambda_j E_{((k-j))}=0, \qquad k=0, \ldots, N-1.$$

Т.к. $\Lambda_k=0$ при $k>v$ и $\Lambda_0=1$, то данное выражение можно записать в виде:

$$E_k = - \sum_{j=1}^{t} \Lambda_j E_{((k-j))}, \qquad k=0, \ldots, N-1.$$

Подставляя в данное выражение известные компоненты синдрома получим:

$$S_k = - \sum_{j=1}^{t} \Lambda_j S_{((k-j))}, \qquad k=t+1, \ldots, 2t.$$

Для решения данной системы уравнений относительно Λ_j воспользуемся алгоритмом Берлекэмпа-Мэсси [6-8]. После того, как значения Λ_j вычислены, остальные компоненты частотного вектора ошибок E_0` можно получить рекуррентным продолжением.

После получения вектора ошибок необходимо осуществить коррекцию принятого вектора:

$$C_0` = V_0` + E_0`.$$

Завершается декодирование обратным преобразованием Фурье кодового слова и извлечением части информационной последовательности сверточного кода. Далее данный процесс повторяется для следующих частей принятой последовательности сверточного кода.

На соответствующих этапах декодирования сверточного кода предполагается использовать метод быстрого преобразования Фурье с целью уменьшения сложности реализации декодера [9 – 11].

Выводы

Показана возможность декодирования сверочного кода в частотной области путем разделения кодового слова сверточного кода на блоки и последовательного декодирования каждого из них. Ожидается, что применение данного метода позволит уменьшить сложность декодирования сверточного кода за счет использования быстрого преобразования Фурье на определенных этапах декодирования.

Список литературы

1. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / Р. Морелос-Сарагоса. – М.: Техносфера, 2005. – 320 с.

2. Вернер М. Основы кодирования: Учебник для ВУЗов / М. Вернер. – М.: Техносфера, 2004. – 288 с.

3. Никитин Г.И. Сверточные коды: Учеб. пособие / Г.И. Никитин. – СПб.: СПбГУАП, 2001. – 80 с.

4. Витерби А.Д. Принципы цифровой связи и кодирования: Пер. с англ.; под ред. К.Ш. Зигангирова / А.Д. Витерби, Дж.К. Омура. – М.: Радио и связь, 1982. – 535 с.

5. Данько Н.И. Алгебраические сверточные коды: Учебное пособие / Н.И. Данько, С.П. Евсеев, А.А. Кузнецов, П.Ф. Поляков, С.И. Приходько. – Х.: УкрГАЖТ, 2007. – 238 с.

6. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: Пер. с англ. / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

7. Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации / В.М. Муттер. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с.

8. Кларк Дж.-мл. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ.; под ред. Б.С. Цыбакова / Дж.-мл. Кларк, Дж. Кейн. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.

9. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1989. – 448 с.

10. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ. / Г. Нуссбаумер. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.

11. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов / В.А. Власенко, Ю.М. Лапа, Л.П. Ярославский. – М.: Наука, 1990. – 180 с.

Поступила в редколлегию 1.12.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.С. Сорока, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.

МЕТОД БЛОКОВОГО ЧАСТОТНОГО ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ

С.І. Приходько, М.А. Штомпель, А.В. Бушримас

Показано можливість декодування згорткового коду в частотній області шляхом поділу кодового слова згорткового коду на блоки та послідовного декодування кожного з них. Очікується, що застосування даного методу дозволить зменшити складність декодування згорткового коду за рахунок використання швидкого перетворення Фур`є на відповідних етапах декодування.

Ключові слова: *згортковий код, декодування, частотна область.*

METHOD OF THE BLOCK FREQUENCY DECODING OF CONVOLUTIONAL CODES

S.I. Prihodko, N.A. Shtompel, A.V. Bushrimas

Decoding possibility convolutional code in frequency area by division of a code word convolutional code on blocks and consecutive decoding of each of them is shown. It is expected that application of the given method will allow to reduce complexity of decoding convolutional code at the expense of use of fast transformation of Fourier at corresponding stages of decoding.

Keywords: *convolutional code, decoding, frequency area.*