УДК 681.325

О.М. Маковейчук[1], Г.В. Худов[2]

[1] *ТОВ «Бюро Інформаційних Технологій», Львів*
[2] *Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків*

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОРФОЛОГІЇ

В роботі аналізуються основні методи і принципи математичної морфології стосовно завдань обробки зображень.

Ключові слова: *обробка зображень, математична морфологія, метод, принцип, знімок.*

Постановка проблеми у загальному вигляді, аналіз останніх досягнень та публікацій

Математична морфологія була розроблена в 1970 роках Г. Матероном [1] і Дж. Серра [2]. Звичайне зображення визначають як функцію освітленості дискретних координат [3 – 6]. Альтернативний спосіб завдання зображення є представлення його у вигляді безлічі координат точок, відповідних кожному об'єкту (відмітимо, що при цьому потрібне завдання деякої системи координат). Слідуючи роботі [4], спершу обмежимо розгляд бінарними зображеннями, далі всі основні визначення природним чином будуть перенесені і на випадок тонових зображень. Докладний розгляд принципів математичної морфології можна знайти в роботі [7].

Мета статті – проаналізувати основні методи і принципи математичної морфології стосовно задач обробки видових зображень.

Постановка задачі та викладення матеріалів дослідження

1. Основні визначення. Кожен об'єкт A складається з безлічі точок α, що володіють деякою загальною властивістю (рис.1):

$$A = \{\alpha | \alpha \in A\}. \tag{1}$$

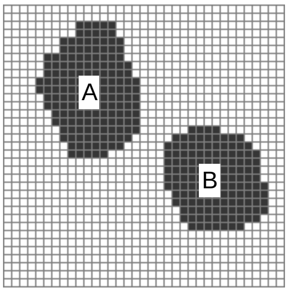

Рис. 1. Бінарне зображення, що містить об'єкти A і B

Для бінарних зображень загальною властивістю є k-зв'язність, де k – кількість сусідів для заданої точки. На прямокутному растрі k може приймати значення 4 або 8.

Фон A^c для об'єкту A (доповнення до A) визначається як безліч тих елементів, які не належать A (рис. 2):

$$A^c = \{\alpha | \alpha \notin A\}. \tag{2}$$

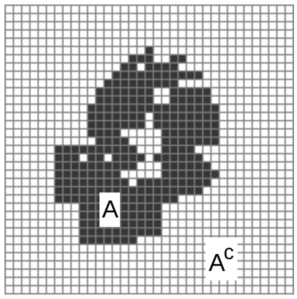

Рис. 2. Об'єкт A і його доповнення A^c

Якщо об'єкт є k-зв'язним, то доповнення до A буде $(12-k)$-зв'язним, тобто 4-зв'язний об'єкт має 8-зв'язне доповнення і навпаки.

Базові операції, пов'язані з об'єктами, – стандартні теоретико-множинні операції: об'єднання, перетин і доповнення (позначаються символами $\cup, \cap, ^c$), а також трансляція.

Для заданого вектора x і множини A трансляція $A + x$ визначається як:

$$A + x = \{\alpha + x | \alpha \in A\}. \tag{3}$$

Відмітимо, що оскільки розглядаються цифрові зображення, що складаються з пікселів з цілочисельними координатами ($\mathbf{Z}^2$), то ця обставина накладає обмеження на допустимі значення вектора трансляції x.

Визначимо тепер операції складання і віднімання Мінковського. Для заданих множин A і B складання Мінковського визначається як:

$$A \oplus B = \bigcup_{\beta \in B} (A + \beta), \tag{4}$$

аналогічно визначається віднімання Мінковського:

$$A \ominus B = \bigcap_{\beta \in B} (A + \beta). \tag{5}$$

2. Операції морфологічного розширення і морфологічного звуження. Використовуючи введені вище операції Мінковського, визначимо базові морфологічні операції. Операція морфологічного розширення (dilation) визначається як:

$$D(A,B) = A \oplus B = \bigcup_{\beta \in B} (A+\beta), \qquad (6)$$

аналогічно визначається операція морфологічного звуження (erosion):

$$E(A,B) = A \ominus \tilde{B} = \bigcap_{\beta \in B} (A-\beta), \qquad (7)$$

де $\tilde{B} = \{-\beta | \beta \in B\}$.

В термінах морфологічної обробки множину A зазвичай називають зображенням, а множину B – структурним елементом. Таким чином, структурний елемент в математичній морфології грає ту ж роль, що і ядро згортки в теорії лінійної фільтрації.

У загальному випадку операція морфологічного розширення дійсно збільшує розміри об'єкту, операція морфологічного звуження відповідно їх зменшує (рис. 3).

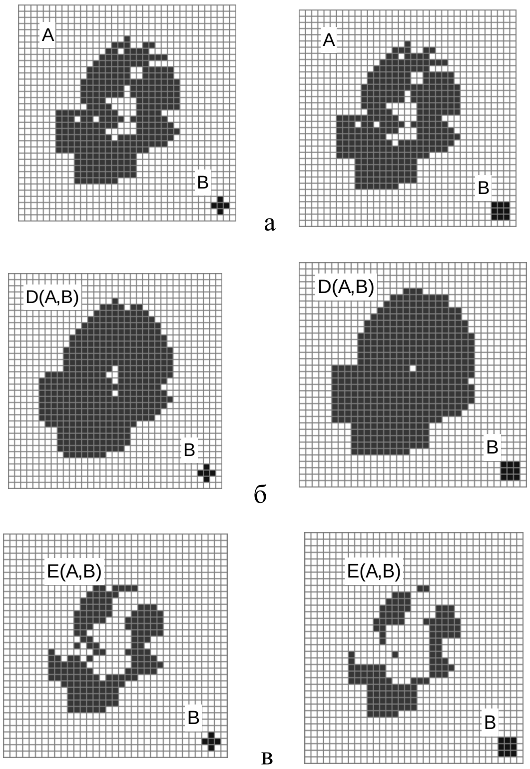

Рис. 3. Приклад дії бінарних морфологічних операторів для різних структурних елементів (N_4 – лівий стовпець, N_8 – правий):
а – об'єкт і відповідний структурний елемент;
б – морфологічне розширення;
в – морфологічне звуження

Проте характер цих змін істотним чином залежить від типу структурного елементу. Обидві ці операції взагалі не мають сенсу без завдання структурного елементу. Найчастіше (на прямокутному растрі) використовуються стандартні структурні елементи N_4 і N_8 (індекс характеризує зв'язність):

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Основні властивості операцій морфологічного розширення і морфологічного звуження:

1) комутативність розширення:

$$D(A,B) = A \oplus B = B \oplus A = D(B,A); \qquad (8)$$

2) некомутативність звуження:

$$E(A,B) \neq A(B,A); \qquad (9)$$

3) асоціативність:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C; \qquad (10)$$

4) інваріантність трансляції:

$$A \oplus (B+x) = (A \oplus B) + x; \qquad (11)$$

$$A \ominus (B+x) = (A+x) \ominus B = (A \ominus B) + x; \qquad (12)$$

5) подвійність:

$$D^c(A,B) = E(A^c, \tilde{B}); \qquad (13)$$

$$E^c(A,B) = D(A^c, \tilde{B}). \qquad (14)$$

6) безповоротність:

$$D(E(A,B),B) \neq A \neq E(D(A,B),B). \qquad (15)$$

Іншими словами, визначаючи A як об'єкт, A^c – фон, ми можемо сказати, що морфологічне розширення об'єкту є морфологічне звуження фону і навпаки.

Відзначимо також наступні важливі властивості. Для довільного структурного елементу B і об'єктів-зображень A_1 і A_2, таких що $A_1 \subset A_2$ (A_1 є підмножина A_2, тобто A_1 включено в A_2):

$$D(A_1,B) \subset D(A_2,B), \qquad (16)$$

$$E(A_1,B) \subset E(A_2,B). \qquad (17)$$

Для структурних елементів B_1 і B_2, таких що $B_1 \subset B_2$:

$$E(A,B_1) \supset E(A,B_2). \qquad (18)$$

Для ефективної реалізації морфологічних фільтрів використовуються теореми про декомпозицію:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) = (B \cup C) \oplus A; \qquad (19)$$

$$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C); \qquad (20)$$

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C). \qquad (21)$$

Інша важлива теорема про декомпозицію належить Вінсенту [8]. Проте для її формулювання потрібно ввести декілька нових понять.

Визначимо опуклу множину (на $\mathbf{R}^2$) як множину, для якої кожна пряма лінія, що сполучає довільні дві точки множини, містить точки, що також належать цій множині (очевидно, що, застосовуючи дане визначення для дискретного випадку, необхідно відповідним чином змінити поняття прямої лінії на множині $\mathbf{Z}^2$).

Множина є обмеженою, якщо кожен її елемент має кінцеве значення (у нашому випадку – це відстань від початку координат).

Множина B є симетричною, якщо $B = \tilde{B}$. Структурні елементи N_4 і N_8 можуть служити прикладами опуклих, обмежених і симетричних множин.

Теорема Вінсента стосовно до зображень, які складаються з дискретних пікселів, свідчить, що для обмежених і симетричних структурних елементів B без отворів і що містять власний центр $(0,0) \in B$:

$$D(A,B) = A \oplus B = A \cup (\partial A \oplus B), \qquad (22)$$

де ∂A – контур об'єкту A.

Іншими словами, ∂A є безліч пікселів, що мають у якості сусіда хоч би один піксел фону.

Важливість цієї теореми для використання в тому, що не має сенсу обробляти все зображення для обчислення операцій морфологічного розширення або (враховуючи рівняння (13) – (14)) морфологічного звуження. Досить обробляти тільки граничні пікселі. Це також справедливо для всіх морфологічних операцій, похідних від розширення і звуження. Обробка тільки пікселів контура, а не зображення в цілому, приводить (окрім деяких патологічних випадків, які, проте, не є типовими для обробки видових зображень) до зменшення обчислювальної складності алгоритмів обробки від $O(N^2)$ до $O(N)$ для зображення розміром $N \times N$ пікселів. Більшість «швидких» алгоритмів, представлених в літературі [9 – 10], ґрунтуються на цьому результаті.

Прості способи обчислення морфологічних операцій часто задаються в наступному вигляді:

1) розширення – беремо кожен піксел бінарного об'єкту (із значенням «1») і встановлюємо в «1» всі піксели фону (із значенням «0»), які k-зв'язані з пікселами об'єкту;

2) звуження – беремо кожен піксел бінарного об'єкту (із значенням «1»), який k-зв'язаний з пікселами фону, і встановлюємо його в «0».

Порівняння цих двох процедур з рівняннями (6-7), де $B = N_{k=4}$ або $N_{k=8}$ показує, що вони еквівалентні формальним визначенням операціям морфологічного розширення і морфологічного звуження.

3. Логічна згортка. Довільний бінарний об'єкт зображення (рівно, як і структурний елемент) A може бути представлений у вигляді:

$$A \leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a[i,j] \cdot \delta[m-i, n-j], \qquad (23)$$

де $\sum$ і $\bullet$ – булеві оператори OR і AND, $a[i,j]$ – характеристична функція, що приймає булеві значення:

$$a[i,j] = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}, \qquad (24)$$

$\delta[m,n]$ булевий аналог δ-функції Діраку, що приймає значення

$$\delta[i,j] = \begin{cases} 1, & i = j = 0 \\ 0, & \text{в противному випадку} \end{cases}. \qquad (25)$$

Таким чином, операція морфологічного розширення може бути представлена у вигляді:

$$D(A,B) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a[i,j] \cdot b[m-i, n-j] = a \otimes b. \qquad (26)$$

Оскільки булеві оператори OR і AND комутують між собою (результат операції не залежить від порядку їх застосування), дане рівняння може бути записане як

$$D(A,B) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a[m-i, n-j] \cdot b[i,j] = b \otimes a = D(B,A). \qquad (27)$$

Застосовуючи теорему де Моргана [8 – 9]:

$$\overline{(a+b)} = \bar{a} \cdot \bar{b} \text{ і } \overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b},$$

до рівняння (27) спільно з рівняннями (13) – (14), операцію морфологічного звуження можна представити у вигляді:

$$E(A,B) = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \left(a[m-i, n-j] + \bar{b}[-i,-j] \right). \qquad (28)$$

Таким чином, операції морфологічного розширення і звуження можуть бути представлені у формі згорток в алгебрі Буля.

Як відомо з теорії обробки сигналів, при використанні згортки істотне значення має вибір відповідних краєвих умов. Морфологічні операції в цьому сенсі також не є виключенням. При цьому можливі два загальні випадки: розширення бінарного зображення значенням «0» або значенням «1».

4. Операції морфологічного розкриття і закриття. Комбінуючи операції морфологічного розширення і морфологічного звуження можна побудувати дві інші операції вищого порядку:

1) операція морфологічного розкриття (opening):

$$O(A,B) = A \circ B = D(E(A,B),B); \qquad (29)$$

2) операція морфологічного закриття (closing):

$$C(A,B) = A \bullet B = E(D(A,-B),-B). \qquad (30)$$

Дані операції мають наступні властивості:

1) подвійність:

$$C^c(A,B) = O(A^c,B); \qquad (31)$$

$$O^c(A,B) = C(A^c,B); \qquad (32)$$

2) інваріантність трансляції:

$$O(A+x,B) = O(A,B) + x; \qquad (33)$$

$$C(A+x,B) = C(A,B) + x. \qquad (34)$$

Для операції морфологічного розкриття із структурним елементом B і зображеннями, A, A_1 і A_2, де A_1 є підмножиною A_2, ($A_1 \subset A_2$):

1) антиекстенсивність:

$$O(A,B) \subseteq A; \qquad (35)$$

2) висхідна монотонність:

$$O(A_1,B) \subseteq O(A_2,B); \qquad (36)$$

3) ідемпотентність:

$$O(O(A,B),B)=O(A,B)\,. \qquad (37)$$

Для операції морфологічного закриття із структурним елементом B і зображеннями A, A_1 і A_2, де A_1 є підмножиною A_2, ($A_1 \subset A_2$):

1) екстенсивність:

$$A \subseteq C(A,B)\,; \qquad (38)$$

2) висхідна монотонність:

$$C(A_1,B) \subseteq C(A_2,B)\,; \qquad (39)$$

3) ідемпотентність:

$$C(C(A,B),B)=C(A,B)\,. \qquad (40)$$

Дані властивості важливі в математичній морфології, оскільки вони прояснюють сенс визначення морфологічного звуження з використанням структурного елементу $\tilde{B}$ замість B.

Операція морфологічного розкриття прибирає виступи на межах об'єктів і дозволяє розділяти зв'язані об'єкти на бінарних зображеннях. Операція морфологічного закриття заповнює отвори усередині і на межах об'єкту. Обидві операції згладжують контур об'єкту, операція розкриття – усередині контуру, закриття – зовні (рис. 4).

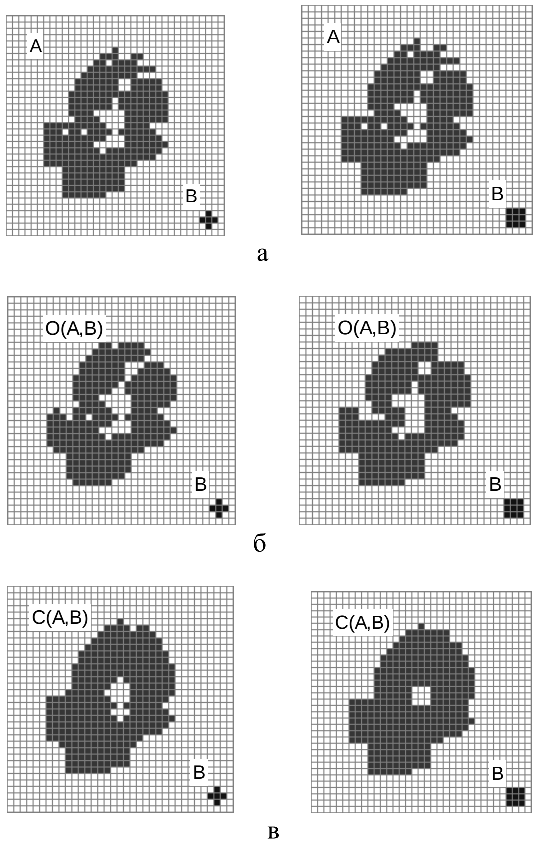

Рис. 4. Приклад дії бінарних морфологічних операторів для різних структурних елементів (N_4 – лівий стовпець, N_8 – правий):

а – об'єкт і відповідний структурний елемент;
б – морфологічне розкриття;
в – морфологічне закриття.

5. Морфологічна обробка тонових зображень. Техніка морфологічної фільтрації може застосовуватися і для тонових зображень. Для простоти викладу обмежимося розглядом тільки опуклих і обмежених структурних елементів (які, в основному, і застосовуються в обробці зображень).

Таким чином, структурний елемент B (так само як і зображення A) буде не бінарним, а складатися із значень в тонових градаціях, що асоціюються з кожною координатною парою.

Визначимо тепер операцію тонового морфологічного розширення:

$$D_G(A,B)=\max_{[i,j]\in B}\left\{a[m-i,n-j]+b[i,j]\right\}. \qquad (41)$$

Для заданих вихідних координат $[m,n]$ зображення структурний елемент підсумовується із зрушеним зображенням і розраховується максимальне значення при всіх зрушеннях по області розміром $J\times K$, яка містить структурний елемент. Отриманий максимум і буде результатом операції. Операції зрушення використовуватимуть піксели за межами області розміром $M\times N$, яка містить зображення, тому необхідно певним чином розширювати початкове зображення для компенсації краєвих ефектів.

Визначення операції тонового морфологічного звуження:

$$E_G(A,B)=\min_{[i,j]\in B}\left\{a[m+i,n+j]-b[i,j]\right\} \qquad (42)$$

Властивість подвійності:

$$E_G(A,B)=-D_G(-A,\tilde{B})\,; \qquad (43)$$

$$D_G(A,B)=-E_G(-A,\tilde{B})\,; \qquad (44)$$

де $\tilde{A}$ має на увазі, що $a[i,j]\to a[-i,-j]$, а A, що $a[i,j]=-a[i,j]$.

6. Визначення тонових морфологічних операцій вищого порядку. Тонове морфологічне розкриття:

$$O_G(A,B)=D_G(E_G(A,B),B)\,. \qquad (45)$$

Тонове морфологічне закриття:

$$C_G(A,B)=E_G(D_G(A,B),B)\,. \qquad (46)$$

Властивість подвійності:

$$O_G(A,B)=-C_G(-A,B)\,, \qquad (47)$$

$$C_G(A,B)=-O_G(-A,B)\,. \qquad (48)$$

Інші важливі властивості, що наводилися вище, такі як ідемпотентність, інваріантність трансляції і тому подібне також властиві для операцій тонової морфологічної обробки. Детальніше ці питання обговорювалися в роботі [11].

В більшості випадків порівняльна обчислювальна складність тонових морфологічних операцій істотним чином може бути зменшена при виборі симетричних структурних елементів (для яких $b[i,j]=b[-i,-j]$), причому найчастіше приймається, що $B=\text{const}=0$. При цьому (використовуючи область завдання структурного елементу $[i,j]\in B$), приведені вище визначення значно спрощуються і зводяться до наступного:

$$D_G(A,B) = \max_{[i,j]\in B} \{a[m-i, n-j]\} = \max_B A \; ; \quad (49)$$

$$E_G(A,B) = \min_{[i,j]\in B} \{a[m+i, n+j]\} = \min_B A \; ; \quad (50)$$

$$O_G(A,B) = \max_B \min_B A \; ; \quad (51)$$

$$C_G(A,B) = \min_B \max_B A \; . \quad (52)$$

Таким чином, відомі в літературі [3, 5, 6] max-фільтр і min-фільтр можуть бути інтерпретовані як морфологічні фільтри тонового розширення і тонового звуження для структурного елементу спеціального типу, форма якого співпадає з формою вікна фільтру, а значення усередині вікна рівне 0.

Для прямокутного вікна розміром $J \times K$, двовимірні max- і min-фільтри є роздільними, тобто можуть бути представлені у вигляді двократного використання (по рядках і по стовпцях) відповідних одновимірних фільтрів. З іншого боку в одновимірному випадку максимум і мінімум по вікну можуть бути знайдені за один прохід. Звідси витікає, що обчислювальна складність (з розрахунку на 1 піксел) операцій тонового морфологічного розширення і тонового морфологічного звуження є $O(\text{const})$ і не залежить від розмірів вікна J і K.

7. Морфологічне згладжування. Даний алгоритм заснований на спостереженні, що операція тонового морфологічного розкриття згладжує початкове тонове зображення у бік збільшення яскравості, операція тонового морфологічного закриття – навпаки, у бік зменшення. При використанні структурного елементу B морфологічне згладжування може бути визначене як [4]:

$$S(A,B) = C_G(O_G(A,B),B) = \min_B \max_B \max_B \min_B A . \quad (53)$$

Інші автори [12] визначають морфологічне згладжування в симетричній формі:

$$S(A,B) = \frac{O_G(C_G(A,B),B) + C_G(O_G(A,B),B)}{2}, \quad (54)$$

тобто

$$S(A,B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \max\limits_B \min\limits_B \min\limits_B \max\limits_B A + \\ + \min\limits_B \max\limits_B \max\limits_B \min\limits_B A \end{pmatrix} \quad (55)$$

Висновки

Таким чином, в роботі проаналізовані основні методи і принципи математичної морфології стосовно завдань обробки зображень. Математична морфологія є аналізом сигналів (як одновимірних, так і двовимірних) в термінах їх форми. Іншими словами, результатом дії морфологічних операторів є зміна форми об'єктів, які містяться в сигналах

Список літератури

1. *Matheron G. Random sets and integral geometry / G. Matheron. – Wiley, New York, 1975. +261 p.*
2. *Serra J. Image analysis and mathematical morphology / J. Serra. – London, Academic Press, Inc., 1982. – 621 p.*
3. *Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику / Л.П. Ярославский. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.: ил.*
4. *Young I.T., Gerbrands J.J., Vliet L.J. "Image Processing Fundamentals," in The Digital Signal Processing Handbook, V.K. Madisetti and D.B. Williams, Eds. Boca Raton, Florida: CRC Press in cooperation with IEEE Press, 1998. – P. 51.1-51.81.*
5. *Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2003. – 784 с.*
6. *Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.*
7. *Mathematical morphology and its application to image and signal processing / ed. by J. Goutsias, L. Vincent, D.S. Bloomberg. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 446 p.*
8. *Vincent L. Grayscale area openings and closings, their efficient implementation and applications / L. Vincent // Proc. EURASIPWorkshop on Mathematical Morphology and its Application to Signal Proc. (Barcelona, Spain, 1993). – P. 22-27.*
9. *Vincent L. Morphological area openings and closings for grey-scale images. In Shape in Picture: Mathematical Description of Shape in Grey-level Images, Y.-L.O.A. Toet, D. Foster, H.J.A.M. Heijmans, P. Meer, Eds. NATO, 1993. –P. 197-208.*
10. *Vincent L. Morphological grayscale reconstruction in image analysis: application and efficient algorithm / L. Vincent // IEEE Trans. Image Proc. 2 (1993). – P. 176-201.*
11. *Giardina C.R. Morphological Methods in Image and Signal Processing / C.R. Giardina, E.R. Dougherty. – Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1988. – 321 p.*
12. *Peters, R.A. II. A new algorithm for image noise reduction using mathematical morphology // Image Processing, IEEE Transactions on Volume 4, Issue 5, May 1995. – P. 554-568.*

Надійшла до редколегії 8.12.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Д.В.Голкін, Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОРФОЛОГИИ

А.Н. Маковейчук, Г.В. Худов

В работе анализируются основные методы и принципы математической морфологии относительно задач обработки изображений.

Ключевые слова: *обработка изображений, математическая морфология, метод, принцип, снимок.*

METHODS OF MATHEMATICAL MORPHOLOGY

A.N. Makoveychuk, G.V. Khudov

Basic methods and principles of mathematical morphology are in-process analysed in relation to the tasks of processing of images.

Keywords: *processing of images, mathematical morphology, method, principle, picture.*