

УДК 519.86:347.464

В.Ю. Дубницький, Б.В. Самородов

Харківський інститут банківської справи  
університету банківської справи Національного банку України

## ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ ІЗ СТАЛОЮ ЕЛАСТИЧНІСТЮ ЗАМІНИ

Запропоновано двоетапний алгоритм визначення параметрів виробничої функції із сталою еластичністю заміни. На першому етапі початкове наближення визначають як розв'язок системи нелінійних рівнянь, який знаходять методом Ньютона, для подальшого пошуку застосовано модифікований метод деформованого многогранника.

**Ключові слова:** виробнича функція, виробнича функція із сталою еластичністю заміни, нелінійний метод найменших квадратів, метод пошуку оптимуму нульового порядку, метод деформованого многогранника.

### Вступ

Виробнича функція широко застосовується в макро- та мікроекономічних дослідженнях [1] для аналізу зв'язків між обсягом виробництва та факторами, що на нього впливають. В сучасному розумінні [2] виробнича функція – це функція дійсних аргументів  $X = x_1, \dots, x_m$ , яка відповідає певним умовам, зазначеним в [3]. Виробнича функція обов'язково повинна бути явною функцією  $F(A, X) = Y$ , де  $Y$  – обсяг випуску продукції,  $X$  –  $m$ -вимірний вектор витрат ресурсу,  $A$  – вектор параметрів, які оцінюють за даними спостережень.

Найпоширенішою у класі виробничих функцій є функція Кобба-Дугласа, яка має вид:

$$Y = A K^\alpha L^\beta, \quad (1)$$

де  $K$  – витрати капіталу;  $L$  – витрати праці;  $Y$  – обсяг продукції. Параметри виробничої функції  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  підлягають визначенню за даними спостережень. Методи їх визначення досить детально викладені в багатьох посібниках по економетрії, наприклад в

[3]. Не менш важливими є спеціальні виробничі функції – функції із сталою еластичністю заміни. Одну з них наведено в [3] і вона має такий вигляд:

$$Y = Y_0 \left[ \alpha \left( \frac{K}{K_0} \right)^{-\rho} + (1-\alpha) \left( \frac{L}{L_0} \right)^{-\rho} \right]^{-1/\rho}. \quad (2)$$

Економічний зміст такої функції розглянуто в роботі [3].

В умові (2) прийнято, що  $Y_0$ ,  $K_0$ ,  $L_0$  – деякі сталі величини. Далі приймемо, що вони дорівнюють середньому значенню відповідних змінних.

Способи визначення параметрів  $\alpha$  та  $\rho$  в літературі відсутні. Більше того, в роботі [6] зауважено, що застосування методу найменших квадратів (МНК) для визначення параметрів функції (2) не дає задовільних результатів внаслідок поганої збіжності обчислювальної процедури нелінійного МНК.

**Мета роботи** полягає в створенні наближеного методу визначення параметрів  $\alpha$  та  $\rho$  функції виду (2) за даними спостережень.

**Викладення результатів**

Розв'язування задачі складається з двох етапів. На першому етапі розв'язують систему з двох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів  $\alpha$  та  $\rho$ . Результатом цієї процедури будуть чисельні значення  $\tilde{\alpha}$  та  $\tilde{\rho}$ , які в подальшому будуть нами використані як початкові значення для другого етапу розв'язання задачі.

Розглянемо детальніше перший крок алгоритму. Прийmemo що

$$K/K_0 = \tilde{K}; \quad L/L_0 = \tilde{L}. \quad (3)$$

З усього можливого фактичного інтервалу значень змінної  $Y$  оберемо два значення, які є найближчими до величин:

$$Y_0^{(1)} = Y_0 \{1 - \varepsilon\}; \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (4)$$

та  $Y_0^{(2)} = Y_0 \{1 + \varepsilon\}; \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (5)$

У виразах (3) та (4)  $\varepsilon$  – параметр алгоритму. Виходячи з результатів чисельного моделювання прийmemo, що  $\varepsilon = 1/3$ .

Значення змінних  $\tilde{K}$  та  $\tilde{L}$ , які відповідають умовам (4) та (5) позначимо як  $\tilde{K}_0^{(1)}$ ,  $\tilde{K}_0^{(2)}$ ,  $\tilde{L}_0^{(1)}$ ,  $\tilde{L}_0^{(2)}$ .

Розглянемо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \rho) \equiv Y_0 \left[ \alpha \left( \tilde{K}_0^{(1)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}_0^{(1)} \right)^{-\rho} \right]^{-1/\rho} - Y_0^{(1)} = 0; \quad (6.1) \\ G(\alpha, \rho) \equiv Y_0 \left[ \alpha \left( \tilde{K}_0^{(2)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}_0^{(2)} \right)^{-\rho} \right]^{-1/\rho} - Y_0^{(2)} = 0. \quad (6.2) \end{aligned} \right.$$

Розв'язок цієї системи будемо шукати методом Ньютона у формі, яка наведена в роботі [7]. Для застосування цього методу визначимо часткові похідні:

$$F'_\alpha(\alpha, \rho); F'_\rho(\alpha, \rho); G'_\alpha(\alpha, \rho); G'_\rho(\alpha, \rho).$$

Обчислимо частинну похідну  $F'_\alpha(\alpha, \rho)$ :

$$F'_\alpha(\alpha, \rho) = -Y_0 B C, \quad (7)$$

де  $B = \frac{\left[ \alpha \left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho} \right]^{-1/\rho}}{\rho}; \quad (8)$

$$C = \frac{\left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} - \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho}}{\alpha \left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho}}. \quad (9)$$

Обчислимо частинну похідну  $F'_\rho(\alpha, \rho)$ .

$$D' = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} - x_1^{(c)} & x_1^{(0)} - x_1^{(c)} + d_1 & x_1^{(0)} - x_1^{(c)} + d_2 & \dots & x_1^{(0)} - x_1^{(c)} + d_2 \\ x_2^{(0)} - x_2^{(c)} & x_2^{(0)} - x_2^{(c)} + d_2 & x_2^{(0)} - x_2^{(c)} + d_1 & \dots & x_2^{(0)} - x_2^{(c)} + d_2 \\ x_3^{(0)} - x_3^{(c)} & x_3^{(0)} - x_3^{(c)} + d_2 & x_3^{(0)} - x_3^{(c)} + d_2 & \dots & x_3^{(0)} - x_3^{(c)} + d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(0)} - x_n^{(c)} & x_n^{(0)} - x_n^{(c)} + d_2 & x_n^{(0)} - x_n^{(c)} + d_2 & \dots & x_n^{(0)} - x_n^{(c)} + d_1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$F'_\rho(\alpha, \rho) = Y_0 E G^\rho - H, \quad (10)$$

де  $E = \left[ \alpha \left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho} \right]^{-1/\rho}; \quad (11)$

$$G = \frac{1}{\rho^2} \ln \left[ \alpha \left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho} \right]; \quad (12)$$

$$H = -\frac{1}{\rho} \frac{-\alpha \left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} \ln \left( \tilde{K}^{(1)} \right) - (1 - \alpha) \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho} \ln \left( \tilde{L}^{(1)} \right)}{\alpha \left( \tilde{K}^{(1)} \right)^{-\rho} + (1 - \alpha) \left( \tilde{L}^{(1)} \right)^{-\rho}}. \quad (13)$$

Вирази для  $G'_\alpha(\alpha, \rho)$  та  $G'_\rho(\alpha, \rho)$  відрізняються від виразів (7) – (13) тільки заміною верхнього індексу (1) на верхній індекс (2) при відповідних змінних. Ітеративна чисельна процедура пошуку коренів системи (6) буде такою:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \frac{\Delta_\alpha^{(n)}}{J(\alpha_n, \rho_n)}; \quad (14.1) \\ \rho_{n+1} &= \rho_n - \frac{\Delta_\rho^{(n)}}{J(\alpha_n, \rho_n)}, \quad (14.2) \end{aligned} \right.$$

де:  $\Delta_\alpha^n = \begin{vmatrix} F(\alpha_n, \rho_n) & F'_\rho(\alpha_n, \rho_n) \\ G(\alpha_n, \rho_n) & G'_\rho(\alpha_n, \rho_n) \end{vmatrix}; \quad (15)$

$$\Delta_\rho^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_\alpha(\alpha_n, \rho_n) & F(\alpha_n, \rho_n) \\ G(\alpha_n, \rho_n) & G(\alpha_n, \rho_n) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Якобіан системи (6.1), (6.2) має вигляд:

$$J(\alpha_n, \rho_n) = \begin{vmatrix} F'_\alpha(\alpha, \rho) & F'_\rho(\alpha, \rho) \\ G'_\alpha(\alpha, \rho) & G'_\rho(\alpha, \rho) \end{vmatrix}. \quad (17)$$

На другому етапі алгоритму розв'язуємо задачу визначення параметрів  $\alpha$  та  $\rho$  методом найменших квадратів. Для цього необхідно знайти такі чисельні значення параметрів  $\alpha$  та  $\rho$ , які мінімізують функцію

$$\Phi = \sum_{g=1}^h \{ Y_g - [Y_0 (\alpha \tilde{K}_g^{-\rho} + (1 - \alpha) \tilde{L}_g^{-\rho})^{-1/\rho}] \}^2. \quad (18)$$

Пошук мінімуму умови (18) проводили модифікованим методом Спендлі-Хекста-Хімсворта [8, 9], сутність якого полягає в наступному.

У загальному  $n$ -вимірному випадку для зміщеного (щодо регулярного гіпермногогранника, перша вершина якого співпадає з початком координат і центром тяжіння  $x^{(c)}$ ) в просторі гіпермногогранника з центром в початковій точці  $x^{(0)}$  матриця  $D'$  має вигляд

де 
$$d_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1); \quad (20)$$

$$d_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1). \quad (21)$$

Тут  $t$  – відстань між двома вершинами.

У нашому випадку координати початкової точки  $x^{(0)}$  співпадають з коренями системи рівнянь (6.1), (6.2).

Координати центру тяжіння регулярного (правильного) гіпермногогранника, перша вершина якого співпадає з початком координат, мають вигляд:

$$x^{(c)} = \left( \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}; \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1}; \dots; \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1} \right) = \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1} (1; 1; \dots; 1).$$

З урахуванням співвідношень для  $d_1$  (20) і  $d_2$  (21) координати центру тяжіння  $x^{(c)}$  можна виразити через величину  $t$  ребра гіпермногогранника

$$x_1^{(c)} = x_2^{(c)} = \dots = x_n^{(c)} = \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1} = \frac{t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1}} = \Delta. \quad (22)$$

Тоді матриця (19) приймає вигляд

$$D' = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} - \Delta & x_1^{(0)} - \Delta + d_1 & x_1^{(0)} - \Delta + d_2 & \dots & x_1^{(0)} - \Delta + d_2 \\ x_2^{(0)} - \Delta & x_2^{(0)} - \Delta + d_2 & x_2^{(0)} - \Delta + d_1 & \dots & x_2^{(0)} - \Delta + d_2 \\ x_3^{(0)} - \Delta & x_3^{(0)} - \Delta + d_2 & x_3^{(0)} - \Delta + d_2 & \dots & x_3^{(0)} - \Delta + d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(0)} - \Delta & x_n^{(0)} - \Delta + d_2 & x_n^{(0)} - \Delta + d_2 & \dots & x_n^{(0)} - \Delta + d_1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

При такій гомотетії точка нульового наближення  $x^{(0)}$  – центр гіперсфери співпадає з центром тяжіння  $x^{(c*)}$  регулярного гіпермногогранника.

Радіус  $a^*$  гіперсфери, що описана навколо регулярного гіпермногогранника, з урахуванням (22)

$$a^* = |x^{(c)} - x^{(0)}| = \frac{d_1 + d_2(n-1)}{n+1} \sqrt{n} = \frac{t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1}} \sqrt{n} = \Delta \sqrt{n}. \quad (24)$$

Розмір  $t$  “ребра” гіпермногогранника пов’язаний з радіусом  $a^*$  гіперсфери і дорівнює

$$t = (a^* / \sqrt{n}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1}.$$

Всі  $(n+1)$  вершини гіпермногогранника лежать на поверхні гіперсфери з радіусом  $a^*$  та мають координати згідно матриці (23).

Таким чином, маємо  $n+1$  напрямок пошуку  $x^{(i)} - x^{(0)}$  ( $i = 1, n+1$ ) мінімуму функції  $f(x)$ , що визначаються вершинами з координатами  $x^{(i)}$  і центром гіперсфери  $x^{(0)}$  – точкою нульового наближення.

З метою збільшення кількості напрямків пошуку мінімуму функції до числа  $2(n+1)$  пропонується додатково використовувати  $n+1$  напрямки, протилежні напрямкам  $x^{(i)} - x^{(0)}$ , які очевидно проходять через центри тяжіння граней, “протилежних” відповідним вершинам гіпермногогранника. Перетин прямих в  $E^n$ , що проходять від точки  $x^{(i)}$  через  $x^{(0)}$  з гіперсферою

саме і дають  $n+1$  додаткових точок для пробних обчислень функції  $f(x)$  і виявлення найбільш вдалого напрямку пошуку мінімуму тепер уже на множині  $2(n+1)$  рівноправних (рівнозначних) напрямків.

Для  $n$ -мірного випадку додаткові  $n+1$  точки, що лежать на поверхні гіперсфери у напрямках від вершин гіпермногогранника через  $x^{(0)}$  (початкову точку – центр тяжіння гіпермногогранника) для  $k = n+2, 2 \cdot (n+1)$ , ідентифікуються так

$$x^{(k)} = x^{(k-(n+1))} + 2 \cdot (x^{(0)} - x^{(k-(n+1))}) = x^{(k-(n+1))} + 2x^{(0)} - 2x^{(k-(n+1))} = 2x^{(0)} - x^{(k-(n+1))}. \quad (25)$$

У результаті для оцінки функції маємо  $(n+1)$  вершин з координатами згідно матриці  $D'$  (14) плюс  $(n+1)$  точки  $x^{(k)}$ , що лежать на поверхні гіперсфери і визначаються координатами згідно з (16). Іншими словами, побудовано гіпермногогранник з  $2(n+1)$  вершинами, який вписано в гіперсферу заданого радіусу  $a^*$  (25), в якому усі напрямки від центру тяжіння до усіх вершин рівноправні в  $E^n$ . Далі, по алгоритму, визначаються значення функції в усіх  $2(n+1)$  точках, що лежать на гіперсфері і ідентифікується точка  $x^{(min)}$ , в якій значення функції мінімально. Визначається пріоритетний напрямок ( $x^{(min)} - x^{(c*)}$ ), уздовж якого для  $x = x^{(c*)} + \lambda(x^{(min)} - x^{(c*)})$  здійснюється одномірний пошук, доки  $f(x)$  зменшується. На цьому напрямку у деякій точці  $x^{(\lambda)}$  функція  $f(x^{(\lambda)}) > f_{min}$  при  $f(x^{(\lambda-1)}) = f_{min}$ , тоді в точці  $x^{(\lambda-1)}$  як у центрі з координатами  $x^{(c*)}$  знову будується гіперсфера з вписаним до неї гіпермногогранником з  $2(n+1)$  вершинами і алгоритм повторюється аналогічно до описаного вище. Радіус  $a^*$  гіперсфери пропонується зменшувати, якщо мінімальне значення функції знаходиться всередині гіперсфери у випадку, коли  $f(x^{(i)}) \geq f(x^{(c*)})$  для усіх  $i = 1, 2 \cdot (n+1)$ . Вихід із алгоритму по точності має наступний вигляд:

$$\sqrt{\frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{2(n+1)} [f(x^{(i)}) - f(x^{(c*)})]^2} \leq \varepsilon. \quad (26)$$

Іншими словами ідею запропонованої модифікації можна описати так: навколо точки  $x^{(0)}$  нульового наближення як у центрі тяжіння в  $E^n$  будується правильний гіпермногогранник, що вписаний в гіперсферу завдяки гомотетії регулярного симплексу з  $(n+1)$  вершинами і для пошуку найбільш вдалого напрямку руху до мінімуму використовуються  $2(n+1)$  рівноправних напрямків, що визначаються  $(n+1)$  вершинами гіпермногогранника,  $(n+1)$  геометричними центрами його граней і його центром тяжіння  $x^{(0)}$ . У вдалому напрямку проводиться одномірний пошук мінімуму, точка  $x^{(c*)}$  якого приймається як центр тяжіння нового гіпермногогранника, що вписаний в гіперсферу зменшеного радіусу. Процедура повторюється, поки гіпермногогранник, що зменшується, не “накриє” мінімум функції з точки зору заданої точності  $\varepsilon$  (26).

Наведемо приклад застосування запропонованої методики. Побудуємо виробничу функцію виду (2) за даними роботи [10] та наведеними в табл. 1.

Таблиця 1  
Вихідні дані для чисельного прикладу

Y	K	L
76,59	8,94	17,25
71,32	8,11	18,31
63,65	6,8	15,37
88,82	8,26	20,18
85,64	9,78	14,95
84,53	7,35	21,18
70,37	7,98	18,87
74,22	8,87	18,18
85,53	10,3	20,04
79,39	8,51	16,27
91,72	11,1	20,52
94,64	9,96	22,44
90,27	8,76	22,07
80,69	6,59	19,37
89,27	9,26	19,64

Початкове наближення дало можливість записати функцію у вигляді

$$Y = 81,776(0,368 * \tilde{K}^{-7,811} + 0,632\tilde{L}^{-7,811})^{-0,12}$$

Фактичні значення обсягу виробництва та значення, обчислені згідно з початковим наближенням наведено на рис. 1, а.

На другому етапі були визначені остаточні параметри виробничої функції

$$Y = 81,776(0,377 * \tilde{K}^{-7,944} + 0,629\tilde{L}^{-7,944})^{-0,126}$$

Фактичні значення обсягу виробництва та значення, визначені згідно з остаточним наближенням наведені на рис. 1, б.

Наведені графіки наочно підтверджують добре співпадіння фактичних даних та даних, обчислених з використанням викладеного способу.

## Висновки

1. Запропоновано двоетапний метод визначення параметрів виробничої функції із сталою еластичністю заміни.

2. Для пошуку параметрів виробничої функції, які мінімізують суму квадратів відхилень показана доцільність використання методів мінімізації нульового порядку.

3. Проведена чисельна перевірка запропонованого методу.

## Список літератури

1. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

2. Математика и кибернетика в экономике: словарь-справочник / Под изд. акад. Н.П. Федоренко. – М.: Экономика, 1975. – 699 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕНЫ

В.Ю. Дубницкий, Б.В. Самородов

Предложен двухэтапный алгоритм определения параметров производственной функции с постоянной эластичностью замены. На первом этапе начальное приближение определяют как решение системы нелинейных уравнений, которое находят методом Ньютона, для последующего поиска применен модифицированный метод деформированного многогранника.

**Ключевые слова:** производственная функция, производственная функция с постоянной эластичностью замены, нелинейный метод наименьших квадратов, метод поиска оптимума нулевого порядка, метод деформированного многогранника.



Рис. 2. Фактичні значення обсягу виробництва та значення, визначені згідно з наближенням а – початковим; б – остаточним; —●— — Y<sub>факт</sub>; —■— — Y<sub>поч</sub>

3. Иванов Ю.П. Математические методы в экономике / Ю.П. Иванов, А.В. Лотов. – М., 1979. – 304 с.

4. Доугерти К. Введение в эконометрику: пер. с англ. / К. Доугерти. – М.: ИНФРА-М., 1999. – XIV. – 402 с.

5. Егоршин А.А. Практикум по эконометрии в Excel: учебное пособие для экономических вузов / А.А. Егоршин, Л.М. Маляреца. – Х.: ИД "ИНЖЭК", 2005. – 100 с.

6. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

7. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 663 с.

8. Химмельблау Д. Прикладное математическое программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 533 с.

9. Самородов Б.В. Развитие метода оптимизации Спендли-Хекста-Химсворта путем вписания регулярных симплексов в гипертетраэдр и удвоения направлений прямого поиска / Б.В. Самородов // Східно-європейський журнал передових технологій. – Х., 2007. – № 1. – С. 106-112.

10. Корольов О.А. Практикум з економітриї. 41. Регресійний аналіз: навчальний посібник / О.А. Корольов, В.В. Рязанцева. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 250 с.

Надійшла до редколегії 20.11.2008

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. І.В. Кононенко, Національний технічний університет «ХП», Харків.

**DETERMINATION OF PARAMETERS OF PRODUCTION FUNCTION WITH PERMANENT ELASTICITY OF REPLACEMENT**

V.Yu. Dubnitskiy, B.V. Samorodov

*A two-stage algorithm of determination of parameters of production function is offered with permanent elasticity of replacement. On the first stage the initial approaching is determined as a decision of the system of nonlinear equalizations, which is found the method of Newton, for a subsequent search the modified method of the deformed polyhedron is applied.*

**Keywords:** *production function, production function with permanent elasticity of replacement, nonlinear least-squares method, method of search of optimum of a zero order, method of the deformed polyhedron.*