УДК 519.711.3:519.68

Т.С. Супрун

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ СЕМЕЙСТВАМИ ПРЕДИКАТОВ

Изучены семейства предикатов, на основе которых можно компараторным методом идентифицировать как стационарные, так и нестационарные линейные системы. При изучении динамических линейных систем множество входных сигналов естественно интерпретируется как некоторое функциональное гильбертово пространство. Рассматриваются динамические линейные системы, описываемые дифференциальными операторами с переменными или постоянными коэффициентами. Широкий класс психофизических и технических систем, систем автоматического управления описывается именно динамическими линейными системами.

Ключевые слова: *компараторная идентификация, семейство предикатов, линейный функционал интегрального типа, интегральный оператор.*

Введение

Постановка проблемы. Для идентификации линейных динамических систем, наряду с традиционными методами идентификации может быть использован и компараторный метод. Суть этого метода состоит в следующем: обследуется одновременно два одинаковых объекта, на которые подаются входные сигналы, при этом выходные сигналы сравниваются между собой и формируется двоичный ответ 1 или 0 в зависимости от совпадения или не совпадения выходных сигналов. Здесь под выходом понимается бинарная реакция на соответствующие входы. Обладая такой информацией о входе и выходе, нужно определить вид оператора F.

Анализ последних исследований и публикаций. Специфика компараторной модели [1] позволяет использовать аппарат бинарных предикатов. Для этого, прежде всего, необходимо формально определить множество входных сигналов системы, а компаратор можно интерпретировать как бинарный предикат $E(x, y)$, заданный на декартовом квадрате множества входных сигналов. При изучении динамических линейных систем наиболее естественно интерпретировать множество входных сигналов как некоторое функциональное гильбертово пространство. Метод компараторной идентификации позволяет исследовать динамические системы, описывающиеся интегральными операторами типа Фредгольма

$$F[x] = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

или Вольтера 1-го рода

$$V[x] = \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

последнее выражение часто именуют интегралом свертки, а также дифференциальными операторами

$$D^m[x] = \frac{d^m}{dt^m}x(t).$$

Операторы такого типа наиболее часто используются в виде моделей, реализующих реальные системы автоматического управления [2].

Постановка задачи. Ранее рассматривались линейные предикаты, лежащие в основе компараторной идентификации так называемых статических линейных систем, не зависящих от каких-либо параметров (время, пространственные координаты и т.п.). Однако широкий класс психофизических и технических систем имеет динамику [2, 3]. Линейные детерминированные динамические системы принято описывать в нормальном виде или в пространстве состояний. С формальной точки зрения такое описание выражается дифференциальными операторами с переменными или постоянными коэффициентами.

Динамические линейные системы. Семейства предикатов

Рассмотрим линейную систему, заданную дифференциальным оператором

$$L[x] = x^{(n)}(t)a_0(t) + ... + x(t)a_n(t) = f(t),$$

где $f(t)$ – вход системы; $x(t)$ – выход; $a_i(t)$ - ее коэффициенты.

В интегральной форме эквивалентное описание системы будет иметь вид

$$L^{-1}[f] = x(t) = \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (1)$$

Соотношение (1) можно рассматривать как семейство интегральных операторов F_t, заданное на пространстве непрерывных функций $C[a,b]$. Естественно предположить, что в такой форме применим компараторный метод идентификации.

Для этого рассмотрим семейство предикатов $E_t(x,y)$:

$$E_t(x,y) = D(F_t[x], F_t[y]). \quad (2)$$

где F_t – линейный оператор, действующий из линейного функционального пространства $C[a,b]$ в R^1 при каждом фиксированном t.

Нетрудно заметить, что семейство вида (2) – это семейство линейных предикатов, условия существования которых нами получены ранее. Более того, поскольку множество $C[a,b]$ всюду плотно в $L_2[a,b]$, то линейный, непрерывный в метрике L_2 функционал на $C[a,b]$ может быть продолжен по непрерывности на $L_2[a,b]$ и будет иметь вид

$$F_t[x] = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad (3)$$

совпадающий с видом выражения, стоящего в правой части равенства (1). Этот факт является иллюстрацией возможности применения метода компараторной идентификации для изучения динамических систем, описываемых операторами Фредгольма типа (3). Таким образом, приходим к необходимости изучения семейств линейных предикатов.

Рассмотрим некоторые типы семейств линейных предикатов, описываемых операторами Фредгольма и Вольтерра. Отметим, что эти операторы определены в пространствах непрерывных функций и в пространствах типа L_2. Ранее было показано, что переход к L_2 для структурной идентификации необходим, поэтому в дальнейшем будем считать областью определения соответствующие семейства предикатов пространства типа L_2 [4].

Сверточные семейства предикатов

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(-\infty,\infty)$, суммируемых с квадратом функций на всей числовой оси по мере с плотностью $e^{-|\tau|}$. Скалярное произведение в нем имеет вид:

$$(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}x(\tau)y(\tau)d\tau .$$

Допустим, на декартовом квадрате этого пространства задано семейство предикатов $\{E_t(x,y)\}_{t\in R}$ вида:

$$E_t(x,y) = D(F_t[x], F_t[y]), \quad (4)$$

где $F_t[x] = (f_{1t}(x),...,f_{nt}(x))$ и

$$f_{it}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}x(\tau)\alpha_{it}(\tau)d\tau.$$

Последнее выражение упростим, обозначив через $k_{it}(\tau) = e^{-|\tau|}\alpha_{it}(\tau)$. Тогда оно примет вид

$$f_{it}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)k_{it}(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что при фиксированном t элемент рассматриваемого семейства (4), (5) является линейным предикатом, и поэтому нам известен оптимальный набор характеристических свойств. Он сформулирован в теореме о существовании линейного предиката. На практике часто ядра операторов типа (5) разностные, поэтому в данном случае возникает вопрос: какое дополнительное свойство необходимо добавить к условиям теоремы о существовании линейного предиката, чтобы ядро $k_{it}(\tau)$ имело вид:

$$k_{it}(\tau) = k_{it}(t-\tau). \quad (6)$$

Определение 1. Семейство вида (4), (5) с ядрами операторов $k_{it}(\tau)$ вида (6) будем называть *сверточным семейством линейных предикатов* или просто *сверточным.*

Определение 2. Назовем семейство предикатов $\{E_t(x,y)\}_{t\in R}$ однородным, если для любого $t\in R$ имеет место равенство

$$E_0(x,y) = E_t(x_t, y_t),$$

где $x_t(\tau) = x(\tau - t)$.

Теорема 1. Семейство предикатов $\{E_t(x,y)\}_{t\in R}$, заданное на декартовом квадрате $L_2(-\infty,\infty)\times L_2(-\infty,\infty)$, является сверточным тогда и только тогда, когда оно однородно, а предикат E_0 обладает одним из наборов свойств теоремы о существовании линейного предиката, т.е. является линейным.

Доказательство. Необходимость. Допустим, семейство сверточное. Тогда очевидно, что E_0 линеен. Проверим свойство однородности семейства. Пусть $E_0(x,y) = 1$. Это означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)k_i(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)k_i(-\tau)d\tau, i = 1,...,n.$$

Для произвольного t сделаем замену переменной $\tau = u - t$ или $u = t + \tau$. Тогда последний набор равенств примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(u-t)k_i(t-u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(u-t)k_i(t-u)du, \quad i = 1,...,n.$$

Следовательно, $E_t(x_t, y_t) = 1$. Эту цепочку рассуждений можно провести в обратном порядке. Окончательно получим: $E_0(x, y) = E_t(x_t, y_t)$, т.е. семейство однородно.

Достаточность. Пусть E_0 линеен, а семейство однородно.

Тогда

$$E_t(x, y) = E_0(x(\tau+t), y(\tau+t)) = \\ = D(F_0[x(\tau+t)], F_0 y(\tau+t)]),$$

т.е. $E_t(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$f_{i0}(x(\tau+t)) = f_{i0}(y(\tau+t)), i = \overline{1,n}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)k_{i0}(\tau)du = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau+t)k_{i0}(\tau)du, i = \overline{1,n}\ .$$

Проведем замену τ на $\tau - t$ и обозначим $k_i(\tau) = k_{i0}(-\tau)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)k_i(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)k_i(t-\tau)d\tau, i = \overline{1,n}\ .$$

Последний набор равенств означает, что семейство сверточно. Теорема доказана.

Отметим, что свойство однородности семейства не зависит от характеристических наборов условий линейных предикатов, поэтому набор условий теоремы 5 является несократимым. Далее, если параметр t не временной, а например, пространственный или, в общем случае, $t \in R_n$, то в силу того, что в предыдущих рассуждениях нигде существенным образом не использовалась размерность пространства аргументов и параметров, теорема 1 справедлива и в этом случае.

Семейства, не зависящие от будущего

Определение 3. Назовем семейство предикатов $\{E_t(x, y)\}_{t\in R}$ *необратимым*, если из равенства $x(\tau) = y(\tau)$, выполняющегося почти всюду при $\tau < 0$, вытекает $E_0(x, y) = 1$.

Добавим к условиям теоремы 1 свойство необратимости семейства. Посмотрим, как изменится вид функционалов $f_{it}(x)$.

При выполнении условий теоремы 1, как было показано ранее, $f_{i0}(x)$ имеет вид:

$$f_{i0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)k_{i0}(\tau)d\tau,\ \ i = \overline{1,n}\ .$$

С другой стороны, если добавить необратимость и рассмотреть функцию

$$x^*(\tau) = \begin{cases} x(\tau),\ \tau < 0; \\ 0,\ \tau \ge 0, \end{cases}$$

то $E_0(x, y) = 1$. Отсюда $f_{i0}(x) = f_{i0}(x^*), i = \overline{1,n}$ и

$$f_{i0}(x) = \int_{-\infty}^{0} x(\tau)k_{i0}(\tau)d\tau\ .$$

Теперь, если учесть однородность и провести такие же рассуждения и в предыдущем пункте, то

$$f_{it}(x) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)k_i(t-\tau)d\tau,\ \ i = \overline{1,n}\ . \tag{7}$$

Семейства с функционалами вида (7) будем называть семействами, не зависящими от будущего. Фактически теорема доказана.

Теорема 2. Семейство предикатов $\{E_t(x, y)\}_{t\in R}$, заданное на декартовом квадрате $L_2(-\infty, \infty) \times L_2(-\infty, \infty)$, является сверточным семейством линейных предикатов, не зависящим от будущего тогда и только тогда, когда оно однородно и необратимо, а предикат E_0 обладает одним из наборов свойств теоремы о существовании линейного предиката.

Отметим два важных обстоятельства. Первое: операторы типа (25) – это операторы свертки. Решения дифференциальных уравнений описываются именно ими, поэтому они встречаются при математическом моделировании многих реальных систем. Второе: если рассмотреть функции n переменных и семейство предикатов $\{E_r\}_{r\in R^n}$, то можно сделать выводы, аналогичные предыдущим. Предварительно уточним однородность с учетом R^n, а необратимость изменим следующим образом:

при любых $x(\tau_1, ..., \tau_{n-1}, \tau_n)$ и $y(\tau_1, ..., \tau_{n-1}, \tau_n)$, совпадающих почти всюду в области $D = \{r \in R^n : -\infty < r_i < \infty, i = \overline{1, n-1}, r_n < 0\}$, имеет место равенство $E_0(x, y) = 1$. В этом случае функционалы $f_{ir}(x)$ будут иметь вид:

$$f_{ir}(x) = \int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{r_n} x(\tau_1, ..., \tau_{n-1}, \tau_n) \times \\ \times k_i(r_1 - \tau_1, ..., r_{n-1} - \tau_{n-1}, r_n - \tau_n)dr,\ \ i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

При $n = 3$ операторы типа (8) часто встречаются в психофизике, в частности при математическом моделировании процессов, описывающих работу органа зрения человека. Далее будут рассмотрены операторы, обладающие этим же свойством, т.е. характерные для психофизических задач.

Семейства, порожденные интегральными суммами

Рассмотрим семейство предикатов $\{E_t(x, y)\}_{t\in[0,1]}$, заданных на декартовом квадрате пространства $L = L_2[0,1] \times L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$. Нас будет интересовать вопрос: при каких необходимых и достаточных условиях данное семейство предикатов является семейством линейных предикатов, порожденных операторами вида

$$f_{it}(x) = a(t)\int_0^1 x(\lambda,t)\alpha'_i(\lambda)d\alpha + b(t)\int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha_i''(t-\tau)d\lambda d\alpha,\ i=\overline{1,n}, \quad (9)$$

где $x(\lambda,t) \in L_2[0,1]$, при любом фиксированном $t \in [0,1]$, $x(\lambda,t) \in L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$.

Заметим, что в п. 2 уже были изучены линейные предикаты в подобном пространстве и с операторами типа (9). Поэтому воспользуемся полученными результатами.

Теорема 3. Семейство предикатов $\{E_t(x,y)\}_{t\in[0,1]}$, заданное на декартовом квадрате пространства $L = L_2[0,1]\times L_2\{[0,1]\times[0,1]\}$, является семейством линейных предикатов с операторами вида (9) тогда и только тогда, когда оно при любом фиксированном $t\in[0,1]$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и следующему свойству (аналог однородности в предыдущих пунктах): $E_0(x,y) = E_t(x_t,y_t)$,

где

$$x = \langle x(\lambda,0), x(\lambda,\tau)\rangle;\ y = \langle x(\lambda,0), y(\lambda,\tau)\rangle;$$

$$x_t = \langle x(\lambda,0), x(\lambda,\tau-t)\rangle;\ y_t = \langle x(\lambda,0), y(\lambda,\tau-t)\rangle$$

при любом $t\in[0,1]$.

Доказательство. Необходимость сформулированных условий можно проверить непосредственно. Остановимся на достаточности. Поскольку при каждом $t\in[0,1]$ предикат $E(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то, как там показано, он имеет вид:

$$E_t(x,y) = D(F_t[x], F_t[y]),$$

где $F_t[x] = (f_{1t}(x),...,f_{nt}(x))$, а

$$f_{it}(x) = a(t)\int_0^1 x(\lambda,t)\alpha'_{it}(\lambda)d\alpha + b(t)\int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau)\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(\tau)d\lambda d\tau,\quad i=\overline{1,n}. \quad (10)$$

Теперь воспользуемся сформулированным в теореме свойством. Оно означает, что равенства

$$\int_0^1\int_0^1 x(\lambda,t)\alpha'_{i0}(\lambda)\alpha''_{i0}(\tau)d\lambda d\tau = \int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau)\alpha'_{i0}(\lambda)\alpha''_{i0}(\tau)d\lambda d\tau,\quad i=\overline{1,n}; \quad (11)$$

$$\int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau-t)\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(\tau)d\lambda d\tau = \int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau-t)\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(\tau)d\lambda d\tau,\ i=\overline{1,n} \quad (12)$$

эквивалентны. В (12) можно произвести замену $\tau - t$ на τ и обозначить в обоих наборах равенств $\alpha''_{it}(\tau) = \alpha''_{it}(-\tau)$. Тогда получим эквивалентность следующих равенств:

$$\int_0^1\int_0^1 [x(\lambda,\tau)-y(\lambda,\tau)]\alpha'_{i0}(\lambda)\alpha''_{i0}(-\tau)d\lambda d\tau = 0,\ i=\overline{1,n};$$

$$\int_0^1\int_0^1 y(\lambda,\tau-t)\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(\tau)d\lambda d\tau = 0,\ i=\overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что для функций $\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(t-\tau)$ и $\alpha'_{i0}(\lambda)\alpha''_{i0}(-\tau)$ имеет место почти всюду

$$\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(t-\tau) = b(t)\alpha'_{i0}(\lambda)\alpha''_{i0}(-\tau), i=\overline{1,n},$$

где $b(t)$ – константа, зависящая от параметра. Введем обозначения $\alpha'_{i0}(\lambda) = \alpha'_i(\lambda)$, $\alpha''_{i0}(-\tau) = \alpha''_i(\tau)$, тогда после замены t на τ имеем:

$$\alpha'_{it}(\lambda)\alpha''_{it}(\tau) = b(t)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(t-\tau), i=\overline{1,n}.$$

С учетом (9) получим:

$$f_{it}(x) = a(t)\int_0^1 x(\lambda,t)\alpha'_i(\lambda)d\alpha + b(t)\int_0^1\int_0^1 x(\lambda,\tau)\alpha'_i(\lambda)\alpha''_i(t-\tau)d\lambda d\tau,\ i=\overline{1,n}.$$

Теорема доказана.

Выводы

Из полученных результатов видно, что компараторная идентификация применима к широкому классу семейств интегральных операторов. Мы остановились на некоторых их конкретных видах, наиболее часто встречаемых в психофизических системах. При этом добавлением определенных свойств к набору условий существования линейных предикатов, мы смогли учесть различную специфику ядер (разностные, факториальные и т. д.). Подобный подход может быть применен и к другим операторам интегрального типа.

Изучены семейства предикатов, на основе которых можно компараторным методом идентифицировать как стационарные, так и нестационарные линейные системы. Получены характеристические свойства семейств предикатов интегрального типа с ядрами Фредгольма и Вольтерра.

Список литературы

1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта.*

Проблемы и перспективы / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Вища школа, 1987. – 159 с.

2. Брикман М.С. Аналитическая идентификация управляемых систем / М.С. Брикман, Д.С. Кристинков. – Рига: Зинатне, 1974. – 206 с.

3. Бондаренко М.Ф. Теория цветового зрения / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Фактор-Друк, 2002. – 206 с.

4. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1950. – 483 с.

Поступила в редколлегию 16.12.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

КОМПАРАТОРНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ СІМЕЙСТВАМИ ПРЕДИКАТІВ

Т.С. Супрун

Вивчено сімейства предикатів, на основі яких можна компараторним методом ідентифікувати як стаціонарні, так і нестаціонарні лінійні системи. При вивченні динамічних лінійних систем множина вхідних сигналів природно інтерпретується як деякий функціональний гильбертовий простір. Розглядаються динамічні лінійні системи, що описуються диференціальними операторами зі змінними або постійними коефіцієнтами. Широкий клас психофізичних і технічних систем та систем автоматичного керування описується саме динамічними лінійними системами.

Ключові слова: *компараторна ідентифікація, сімейство предикатів, лінійний функціонал інтегрального типу, інтегральний оператор.*

THE COMPARATOR IDENTIFICATION OF THE DYNAMIC LINEAR SYSTEMS DESCRIBED BY FAMILIES OF PREDICATES

T.S. Suprun

Families of predicates on which basis it is possible comparator method to identify both stationary, and non-stationary linear systems are studied. At studying of dynamic linear systems the set of entrance signals is naturally interpreted as some functional Hilbert space. The dynamic linear systems described by differential operators with variables or constant factors are considered. The wide class of psychophysical and technical systems, automatic control systems is described by dynamic linear systems.

Keywords: *comparator identification, family of predicates, linear functional integrated type, the integrated operator.*