УДК 519.681

О.В. Серая

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

АНАЛИЗ НЕМАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Рассмотрена задача анализа немарковской системы обслуживания с отказами. Предложенный в статье метод основан на марковской аппроксимации случайных процессов поступления заявок и их обслуживания, которая осуществляется с использованием представления реальных процессов потоками Эрланга надлежащего порядка. Получены соотношения, устанавливающие распределение вероятностей состояний системы.

Ключевые слова: *система обслуживания, случайный поток заявок, процесс обслуживания, марковская аппроксимация.*

Введение

Постановка проблемы и анализ литературы. Теория массового обслуживания – **эффективный** и хорошо разработанный математический аппарат исследования систем обслуживания [1 – 3]. При этом традиционно используемая в этой теории гипотеза о марковском характере случайных процессов поступления заявок в систему и их обслуживания позволила получить простые соотношения, исчерпывающим образом обеспечивающие возможность решения разнообразных задач анализа и синтеза систем обслуживания. Гораздо менее впечатляющими является результаты теории для немарковских систем. Метод вложенных цепей Маркова, разработанный Кендаллом [4], может быть использован для систем в случаях, когда немарковским является либо процесс, описывающий входящий поток заявок, либо процесс обслуживания. Наконец, если оба эти процесса – немарковские, получено интегральное уравнение Линдли, решение которого определяет закон распределения продолжительности ожидания начала обслуживания. Эти обстоятельства диктуют необходимость продолжения работы в направлении совершенствования методов исследования немарковских систем. Перспективным представляется подход, основанный на марковской аппроксимации случайных процессов, протекающих в системах обслуживания. Эффективные результаты на этом пути были получены в [5], где для аппроксимации входящего потока заявок было использовано распределение Эрланга. Смысл реализованной в [5] идеи состоит в том, что поток Эрланга представляет собой просеянный пуассоновский поток и поэтому он может быть воспроизведен марковской моделью.

Цель статьи. Разработка методики построения модели, в которой случайные процессы в системе обслуживания аппроксимируются потоками Эрланга надлежащего порядка.

Постановка задачи. Пусть случайный интервал между заявками входящего потока имеет распределение Эрланга l_1-го порядка, а случайная продолжительность обслуживания имеет распределение l_2-го порядка. Поставим задачу разработки математической модели соответствующей системы обслуживания, обеспечивающей получение аналитических соотношений для ее описания.

Основные результаты

Построим граф состояний и переходов соответствующей марковской цепи (рис. 1).

Здесь E_0 – основное состояние, соответствующее, когда все каналы свободны;

E_k – основное состояние, когда занято ровно k каналов, $k = 1, 2, ..., n$;

E_n – основное состояние, когда заняты все каналы;

$\overline{E}_k^s$ – s-е промежуточное состояние, соответствующее ситуации, когда система переходит из основного состояния E_k в основное состояние E_{k+1}, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, $s = 1, 2, ..., l_1 - 1$;

$\underline{E}_k^s$ – s-е промежуточное состояние, соответствующее ситуации, когда система переходит из основного состояния E_k в основное состояние E_{k-1}, $k = 1, 2, ..., n$, $s = 1, 2, ..., l_2 - 1$.

Таким образом, в этой модели к каждому основному состоянию, соответствующему занятости некоторого фиксированного числа каналов, добавляется $l_1 - 1$ фиксированных состояний, описывающих переход из этого состояние в новое состояние, когда число занятых каналов на единицу возрастает, и $l_2 - 1$ фиксированных состояний, описывающих переход в состояние, когда число занятых каналов на единицу уменьшается.

Введем систему линейных алгебраических уравнений А.Н. Колмогорова относительно вероятностей состояний марковской цепи.

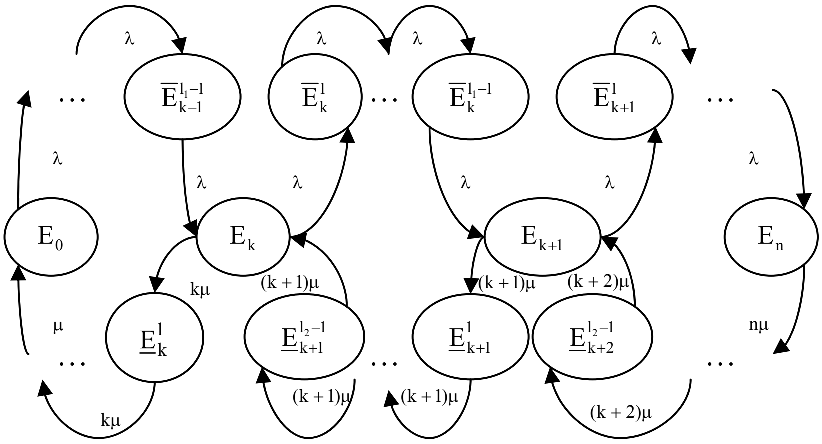

Рис. 1. Граф состояний и переходов соответствующей марковской цепи

$$\mu P\left(\underline{E}_1^{l_2-1}\right)-\lambda P\left(E_0\right)=0, \qquad \left(E_0\right)$$

$$\lambda P\left(E_0\right)-\lambda P\left(\bar{E}_0^1\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_0^1\right)$$

$$\lambda P\left(\bar{E}_1^{l_1-2}\right)-\lambda P\left(\bar{E}_0^{l_1-1}\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_0^{l_1-1}\right)$$

$$\lambda P\left(\bar{E}_0^{l_1-1}\right)+2\mu P\left(\underline{E}_2^{l_2-1}\right)-P\left(E_1\right)\left(\lambda+\mu\right)=0, \qquad \left(E_1\right)$$

$$\lambda P\left(E_1\right)-\lambda P\left(\bar{E}_1^1\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_1^1\right)$$

....

$$\lambda P\left(\bar{E}_1^{l_1-2}\right)-\lambda P\left(\bar{E}_1^{l_1-1}\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_1^{l_1-1}\right)$$

$$\lambda P\left(\bar{E}_1^{l_1-1}\right)+3\mu P\left(\underline{E}_3^{l_2-1}\right)-P\left(E_2\right)\left(\lambda+2\mu\right)=0 \qquad \left(E_2\right)$$

....

$$\lambda P\left(\bar{E}_{k-1}^{l_1-1}\right)+\left(k+1\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+1}^{l_2-1}\right)-P\left(E_k\right)\left(\lambda+k\mu\right)=0 \qquad \left(E_k\right)$$

$$\lambda P\left(E_k\right)-\lambda P\left(\bar{E}_k^1\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_k^1\right)$$

....

$$\lambda P\left(\bar{E}_k^{l_1-2}\right)-\lambda P\left(\bar{E}_k^{l_1-1}\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_k^{l_1-1}\right)$$

$$\lambda P\left(\bar{E}_k^{l_1-1}\right)+\left(k+2\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+2}^{l_2-1}\right)- \\ -P\left(E_{k+1}\right)\left(\lambda+\left(k+1\right)\mu\right)=0 \qquad \left(E_{k+1}\right)$$

$$\lambda P\left(E_{k+1}\right)-\lambda P\left(\bar{E}_{k+1}^1\right)=0, \qquad \left(\bar{E}_{k+1}^1\right)$$

....

$$\lambda P\left(\bar{E}_{n-1}^{l_1-1}\right)-n\mu P\left(E_n\right)=0, \qquad \left(E_n\right)$$

....

$$\left(k+2\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+2}^{l_2-2}\right)-\left(k+2\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+2}^{l_2-1}\right)=0, \qquad \left(\underline{E}_{k+2}^{l_2-1}\right)$$

$$\left(k+1\right)\mu P\left(E_{k+1}\right)-\left(k+1\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+1}^1\right)=0, \qquad \left(\underline{E}_{k+1}^1\right)$$

....

$$\left(k+1\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+1}^{l_2-2}\right)-\left(k+1\right)\mu P\left(\underline{E}_{k+1}^{l_2-1}\right)=0, \qquad \left(\underline{E}_{k+1}^{l_2-1}\right)$$

....

$$\mu P\left(E_1\right)-\mu P\left(\underline{E}_1^1\right)=0, \qquad \left(\underline{E}_1^1\right)$$

....

$$\mu P\left(\underline{E}_1^{l_2-2}\right)-\mu P\left(\underline{E}_1^{l_2-1}\right)=0. \qquad \left(\underline{E}_1^{l_2-1}\right)$$

Для удобства каждому уравнению этой системы присвоен номер, соответствующий номеру состояния, вероятность которого входит в последнее слагаемое уравнения.

Из уравнений $\left(\bar{E}_0^1\right)$ – $\left(\bar{E}_0^{l_1-1}\right)$ следует, что

$$P\left(E_0\right)=P\left(\bar{E}_0^1\right)=\cdots=\left(\bar{E}_0^{l_1-1}\right). \qquad (1)$$

Точно так же, из $\left(\bar{E}_1^1\right)$ – $\left(\bar{E}_1^{l_1-1}\right)$ следует, что

$$P\left(E_1\right)=P\left(\bar{E}_1^1\right)=\cdots=\left(\bar{E}_1^{l_1-1}\right). \qquad (2)$$

Продолжая аналогично, получим:

из $\left(\bar{E}_k^1\right)$ – $\left(\bar{E}_k^{l_1-1}\right)$ следует

$$P\left(E_k\right)=P\left(\bar{E}_k^1\right)=\cdots=\left(\bar{E}_k^{l_1-1}\right),\ k=2,...,n-1; \qquad (3)$$

из $\left(\underline{E}_n^1\right)$ – $\left(\underline{E}_n^{l_2-1}\right)$ следует

$$P\left(E_n\right)=P\left(\underline{E}_n^1\right)=\cdots=\left(\underline{E}_n^{l_2-1}\right); \qquad (4)$$

из $\left(\underline{E}_{k+1}^1\right)$ – $\left(\underline{E}_{k+1}^{l_2-1}\right)$ следует

$$P\left(E_{k+1}\right)=P\left(\underline{E}_{k+1}^1\right)=\cdots=\left(\underline{E}_{k+1}^{l_2-1}\right),\ k=2,...,n-1; \qquad (5)$$

из $\left(\underline{E}_1^1\right)$ – $\left(\underline{E}_1^{l_2-1}\right)$ следует

$$P\left(E_1\right)=P\left(\underline{E}_1^1\right)=\cdots=\left(\underline{E}_1^{l_2-1}\right). \qquad (6)$$

Теперь, с учетом равенств (1) – (6) запишем уравнения относительно вероятностей:

$$P\left(E_0\right),\ P\left(E_1\right),\ P\left(E_2\right),\ \ldots,$$
$$P\left(E_k\right),\ P\left(E_{k+1}\right),\ \ldots,\ P\left(E_n\right).$$

При этом получим следующую систему уравнений:

$$\mu P(E_1)-\lambda P(E_0)=0,$$

$$\lambda P(E_0)+2\mu P(E_2)-P(E_1)(\lambda+\mu)=0,$$

$$\lambda P(E_1)+3\mu P(E_3)-P(E_2)(\lambda+2\mu)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$

$$\lambda P(E_{k-1})+(k+1)\mu P(E_{k+1})-$$

$$-P(E_k)(\lambda+k\mu)=0;$$

$$\lambda P(E_k)+(k+2)\mu P(E_{k+2})-$$

$$-P(E_{k+1})(\lambda+(k+1)\mu)=0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda P(E_{n-1})-n\mu P(E_n)=0.$$

Система уравнений (7) легко решается, позволяя получить формулы для расчета вероятностей состояний системы через вероятность состояния $P(E_0)$.

С этой целью введем вспомогательные неизвестные

$$z_k=\lambda P(E_{k-1})-k\mu P(E_k),$$
$$k=1,2,\ldots,n.$$

Теперь, как легко видеть, уравнения системы (7) преобразуются следующим образом:

$$z_1=0,$$
$$z_1-z_2=0,$$
$$z_2-z_3=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$z_k-z_{k+1}=0,$$
$$z_{k+1}-z_{k+2}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$z_n=0.$$

Тогда

$$z_1=z_2=\ldots=z_n=0,$$

то есть

$$\lambda P(E_{k-1})-k\mu P(E_k)=0,\ k=1,2,\ldots,n,$$

откуда получим рекуррентное соотношение

$$P(E_k)=\frac{\lambda}{k\mu}P(E_{k-1}),$$
$$k=1,2,\ldots,n,$$

из которого следует

$$P(E_k)=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}P_0,\ k=0,1,2,\ldots,n. \qquad (8)$$

Для отыскания $P(E_0)$ используем условие нормировки, в соответствии с которым

$$P(E_0)+\sum_{s=1}^{l_1-1}P(\bar{E}_0^s)+\sum_{l=1}^{n-1}\left[P(E_l)+\sum_{s=1}^{l_1-1}P(\bar{E}_l^s)+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{l_2-1}P(\underline{E}_l^s)\right]+P(E_n)+\sum_{s=1}^{l_2-1}P(\underline{E}_n^s)=1. \qquad (9)$$

Теперь, с учетом (1) – (6), соотношение (9) примет вид:

$$l_1P(E_0)+\sum_{l=1}^{n-1}P(E_l)(l_1+l_2-1)+l_2P(E_n)=1. \qquad (10)$$

Подставляя (8) в (10), получим

$$l_1P(E_0)+(l_1+l_2-1)P(E_0)\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2P_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}=$$

$$=P(E_0)\left[l_1+(l_1+l_2-1)\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\right]=1,$$

откуда

$$P(E_0)=\frac{1}{l_1+(l_1+l_2-1)\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}. \qquad (11)$$

Тогда

$$P(E_k)=\frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}}{l_1+(l_1+l_2-1)\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}, \qquad (12)$$
$$k=0,1,2,\ldots,n.$$

Наконец, объединяя основное состояние E_0 с промежуточными $\bar{E}_0^s$, $s=1,2,\ldots,l_1-1$, основные состояния E_k с промежуточными $\bar{E}_k^s$, $s=1,2,\ldots,l_1-1$, и $\underline{E}_k^s$, $s=1,2,\ldots,l_2-1$, $k=1,2,\ldots,n-1$, основное состояние E_n с промежуточными $\underline{E}_n^s$, $s=1,2,\ldots,l_2-1$, получим совокупность вероятностей истинных состояний системы $Q_0,Q_1,\ldots,Q_k,\ldots,Q_n$. Вероятности этих состояний определяются соотношениями (12) с учетом (1) – (6). При этом окончательно получим

$$P(Q_0)=l_1P(E_0)=$$

$$=\frac{l_1}{l_1+(l_1+l_2-1)\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}, \qquad (13)$$

$$P\left(Q_k\right)=\left(l_1+l_2-1\right)P\left(E_k\right)=$$

$$=\frac{\left(l_1+l_2-1\right)\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}}{l_1+\left(l_1+l_2-1\right)\sum\limits_{l=1}^{n-1}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}, \quad (14)$$

$$k=1,2,...,n-1,$$

$$P\left(Q_n\right)=$$

$$=\frac{l_2\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}{l_1+\left(l_1+l_2-1\right)\sum\limits_{l=1}^{n-1}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}+l_2\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}. \quad (15)$$

Понятно, что в простейшем частном случае, когда случайные процессы в системе описываются потоками Эрланга первого порядка (т.е. пуассоновскими потоками), то соотношения (13) – (15) редуцируются к стандартным формулам Эрланга:

$$P_k=\frac{\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}}{\sum\limits_{l=0}^{n}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^l}{l!}},\ k=0,1,2,...,n.$$

Анализ системы завершен.

Направление дальнейших исследований может быть связано с распространением изложенной методики на более общий случай, когда рассматривается система обслуживания с очередями в предположении, что случайная продолжительность ожидания в очереди также описывается потоком Эрланга соответствующего порядка.

Выводы

Таким образом, предложенная технология марковской аппроксимации случайных процессов поступления заявок и обслуживания с использованием распределений Эрланга надлежащего порядка позволяет осуществить анализ реальных немарковских систем обслуживания.

Эта методика для n-канальной системы обслуживания доведена до конечных соотношений.

Список литературы

1. *Хинчин А.Я. Работы по теории массового обслуживания / А.Я. Хинчин. – М.: Физматгиз, 1963. – 314 с.*
2. *Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: пер. с англ. / Т. Саати. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.*
3. *Кокс Д. Теория операций: пер. с англ. / Д. Кокс, У. Смит. – М.: Мир, 1966. – 218 с.*
4. *Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей и их анализ методом вложенных цепей Маркова: пер. с англ. / Д. Кендалл // М.: Математикаю – 1957. – 3:6. – С. 97-111.*
5. *Раскин Л.Г. Марковские модели СМО с немарковским входящим потоком / Л.Г. Раскин, О.В. Серая // Вестник НТУ «ХПИ». – Х., 2005. – № 56. – С. 38-41.*

Поступила в редколлегию 3.02.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

АНАЛІЗ НЕМАРКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДМОВАМИ

О.В. Сіра

Розглянуто завдання аналізу немарківської системи обслуговування з відмовами. Запропонований в статті метод заснований на марківській апроксимації випадкових процесів надходження заявок і їх обслуговування, яка здійснюється з використанням представлення реальних процесів потоками Ерланга належного порядку. Отримані співвідношення, що встановлюють розподіл вірогідності станів системи.

Ключові слова: *система обслуговування, випадковий потік заявок, процес обслуговування, марківська апроксимація.*

ANALYSIS OF NON-MARKOV SYSTEM OF SERVICE WITH REFUSALS

O.V. Sira

The task of analysis of the non-Markov system of service is considered with refusals. The method offered in the article is based on Markov approximation of casual processes of receipt of requests and their service, which is carried out with the use of presentation of the real processes the streams of Erlang of the proper order. Correlations, settings distribution of probabilities of the states of the system, are got.

Keywords: *system of service, casual stream of requests, process of service, Markov approximation.*