УДК 519.86:347.464

В.Ю. Дубницкий, А.А. Савченко

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

НЕЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА

Проведено сравнение качества оценок параметров производственной функции Кобба-Дугласа, полученных методами линейного и нелинейного регрессионного анализа. Для получения оценок использованы методы Ньютона-Гаусса и Левенберга-Марквардта. Расчеты выполнены с использованием систем STATISTICA 6.1, STATGRAPHICS V.15 и специально составленных программ.

Ключевые слова: *производственная функция Кобба-Дугласа, оценивание параметров производственной функции Кобба-Дугласа, нелинейная регрессия, метод Ньютона-Гаусса, метод Левенберга-Марквардта.*

Введение

Определение производственной функции (ПФ) и ее содержательный смысл приведен авторами в работе [1]. Более подробные сведения о свойствах ПФ приведены в работах [2 – 4, 6]. В общем случае производственной называют функцию вида

$$F(X, Y, A) = 0, \quad (1)$$

где Y – вектор выпуска продукции; X – вектор (матрица) затрат ресурсов; A – матрица (вектор) параметров.

В рамках данной работы будем рассматривать разновидность ПФ, известную как функция Кобба-Дугласа (ФКД). В общем случае ФКД имеет вид [2 – 4, 6]:

$$Y = A\left(\prod_{j=1}^{m} X_j^{\alpha_j}\right)\exp(\gamma\tau) \quad (2)$$

с ограничениями на параметры

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_j, ...\alpha_m)\mathrm{R}o. \quad (3)$$

Символ R означает, что левая и правая часть условия (3) находятся в одном из возможных строгих (нестрогих) отношений упорядочения на множестве действительных чисел.

Пусть матрица

$$S = \begin{pmatrix} Y & X_1 & X_2 & ... & X_j & ... & X_m & \tau \end{pmatrix} \quad (4)$$

известна. В (4) принято, что $Y, X_1, X_2, ..., X_j, ...X_m, \tau$ вектор-столбцы размерности $1 \times m$.

Исходя из содержательного смысла задачи, считаем, что величины $Y, X_j (j = \overline{1, m})$ положительны, величина τ неотрицательна. Параметры $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$, γ – действительные.

Необходимо по результатам наблюдений, используя критерий минимума наименьших квадратов, найти величины $A, \alpha_j\ (j = 1, 2, \ldots m), \gamma$.

В наиболее известных пособиях по эконометрии, например в [7], эту задачу предлагают решать методом линейного регрессионного анализа (РА), предварительно прологарифмировав условие (2) примет вид:

$$Y = A\left(\prod_{j=1}^{m} X_{j_t}^{\alpha_s}\right)\exp(\gamma\tau_t)\,\mu_t, \quad t = 1, 2...n. \quad (5)$$

В условии (5) принято, что μ_t – ошибка t-го изменения кортежа величин

$$< Y_t, X_{1t}, X_{2t} ... X_{jt} ..., X_{mt}, \tau_t >,$$

полученных при условии $\tau = \tau_t$, t = 1, 2, … , n.

Таким образом, в условии (5) принято, что ошибка измерений мультипликативна по отношению к измеряемым величинам. Если ошибка аддитивна (более распространенный случай, согласно работе [5]), то условие (5) примет вид:

$$Y = A\left(\prod_{j=1}^{m} X_{j_t}^{\alpha_s}\right)\exp(\gamma\tau_t) + \xi_t, \quad t = 1, 2...n. \quad (6)$$

В этом случае логарифмирование (5) приводит к замене модели ошибки измерения, что, в свою очередь, приводит к неверным профессиональным выводам. Это обстоятельство отмечено в работе [8].

Для получения несмещённых оценок $\hat{A}, \hat{\alpha}_j, \hat{\gamma}$, параметров A, α_j, γ в работе[5] рекомендовано использовать нелинейный регрессионный анализ (РА).

Постановка задачи. В наиболее распространенных пакетах статистического анализа, таких как STATISTICA 6.1. и STATGRAPHICS V.15 представлены методы нелинейного РА. Однако, будучи жестко встроенными в программные системы, они не дают информации о способе реализации конкретного метода. Поэтому проверка качества этих методов невозможна. **Цель работы** состоит в разработке и программной реализации методов нелинейного РА и установлении области применения алгоритмов, реализованных в указанных выше системах для оценивания параметров ФКД путем сравнения их результатов с результатами полученными «подконтрольными» программами.

Анализ литературы. Рассмотрим задачу определения параметров ПФ $Y = F(X; P)$ вида (6) более подробно. Используя метод наименьших квадратов

© В.Ю. Дубницкий, А.А. Савченко

для поиска оценок $\hat{P}$ вектора параметров P и схему аддитивной ошибки, условие метода наименьших квадратов (НМК) представим в виде

$$Q(P)=\sum_{t=1}^{n}(y_t-F_t(X;P))^2 \to \min . \quad (7)$$

Для минимизации условия (7) будем использовать методы Гаусса-Ньютона и Марквардта (Marquardt).

Реализация метода Гаусса-Ньютона соответствует алгоритму, описанному в работе [9]. Обозначим оценки вектора параметров *P* на *к*-ой и (*к*+1) итерации как $P^{(\kappa)}$ и $P^{\kappa+1}$.

Тогда

$$P^{(k+1)}=P^{(k)}-\left[H^{(k)}(Q(P)\right]^{-1}\nabla Q^{(k)}(P),\ k=0,1,2.... \quad (8)$$

В (8) принято, что $H^{(k)}(Q(P))$ – гессиан функции Q(P) на k-ой итерации; $\nabla Q^{(k)}$ – градиент функции Q (P).

Для i-го параметра ПФ соответствующий компонент градиента будет:

$$\frac{\partial Q}{\partial P_i}=-2\sum_{t=1}^{n}(y_t-F_t(X,P))\frac{\partial F_t(X;P)}{\partial P_i};\ t=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m}\ . \quad (9)$$

Для g_{ij}-го элемента гессиана функции Q(P) получим:

$$g_{ij}=\frac{\partial^2 Q}{\partial P_i \partial P_j}=2\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial F_t(X;P)}{\partial P_i}\cdot\frac{\partial F_t(X;P)}{\partial P_j}- -2\sum_{t=1}^{n}(y_t-F_t(X,P))\frac{\partial^2 F_t(X;P)}{\partial P_i \partial P_j}, \quad (10)$$

$$i=1,2...n;\quad j=1,2...m.$$

Для улучшения сходимости метода в [10] была предложена модификация алгоритма в виде:

$$P^{(k+1)}=P^{(k)}-\lambda^{(k)}\frac{C^{(k)}}{\left\|C^{(k)}\right\|},\quad 0<\lambda^{(k)}\le 1, \quad (11)$$

где

$$C^{(k)}=\left[H^{(k)}(Q(P)\right]^{-1}\nabla Q^{(k)}(P),\quad k=0,1,2... \quad (12)$$

В связи с возможностью плохой обусловленности матрицы, обратной к гессиану функции Q(P) в [11] предложена модификация условия (12) в виде

$$P^{(k+1)}=P^{(k)}-(\mu E+H^{(k)}(Q(P))^{-1}\nabla Q^{(k)}(P),\quad k=0,1,2..., \quad (13)$$

где μ – малый параметр, методика его выбора ранее была нами исследована в работе [12]; E – единичная матрица.

Метод Левенберга-Марквардта, используемый в анализируемых системах статистических расчетов, реализует алгоритм, описанный в [5]:

$$P^{(k+1)}=P^{(k)}-\left[(j^{(k)})^T j^{(k)}+\lambda^{(k)}D^{(k)}\right]^{-1}\times \times(j^{(k)})^T(Y-F_k(X,P)). \quad (14)$$

В условии (14) принято, что $j^{(k)}$ – якобиан, вычисленный на k-ом шаге итерации функции $F_t(X,P)$ в каждой t-ой (t = 1, 2, … , n) точке (n+1)-мерного пространства наблюдений.

$D^{(k)}$ – диагональная матрица, образованная произведением матриц $\left[(j^{(k)})^T\cdot j^{(k)}\right]$. Множитель $\lambda^{(k)}$ обеспечивает требуемую скорость сходимости в зависимости от удаления от точки оптимума. Рекомендации по его выбору даны в работе [5].

Изложение результатов

Пусть в условии (6) $m=2;\gamma=0$. Примем, что $x_1=k;\alpha_1=\alpha;x_2=L,\alpha_2=\beta$. Тогда (6) примет вид

$$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}. \quad (15)$$

В выражении (15) переменные имеют следующий смысл: Y – объем выпуска продукции, K – величина капитальных затрат, L – величина трудозатрат. Добавим к (15) ограничение

$$\alpha+\beta=1. \quad (16)$$

Равенства (15) и (16) определяют функцию Кобба-Дугласа первого вида (ФКД1), равенство (15) определяет функцию Кобба-Дугласа II вида (ФКД2).

Заменой переменных

$$Y/L=U;\ K/L=W \quad (17)$$

получим ФКД1 в виде:

$$U=AW^{\alpha}. \quad (18)$$

Для уравнения (18) условие (7) примет вид

$$Q=\sum_{t=1}^{n}(U_t-AW_t^{\alpha})^2\to\min; \quad (19)$$

для ФКД2 условие (7) примет вид

$$G=\sum_{t=1}^{n}(U_t-AK_t^{\alpha}L_t^{\beta})^2\to\min . \quad (20)$$

Из уравнений (7) – (14) следует, что основные элементы описанных алгоритмов следующие: градиент функции (7), матрица Гессе для функции (7) и матрица Якоби для этой же функции. Общий вид этих элементов соответствует условиям (9), (10). Ниже приведены частные выражения, соответствующие градиенту, матрице Гессе и матрице Якоби для функций ФКД1 и ФКД2.

Вычислим указанные элементы для алгоритмов, определяющих параметры функции ФКД1. Пусть

$$q_t=(U_t-AW_t^{\alpha}). \quad (21)$$

Тогда (20) примет вид:

$$Q=\sum_{t=1}^{n}q_t^2. \quad (22)$$

Градиент функции, соответствующей условию (22), примет вид:

$$\nabla Q=\left(\frac{\partial Q}{\partial A};\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right)^T. \quad (23)$$

Выражение, определяющее $\frac{\partial Q}{\partial A}$, примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = -2\sum_{t=1}^{n} q_t W_t^{\alpha}; \qquad (24)$$

выражение, определяющее $\frac{\partial Q}{\partial \alpha}$, примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} == -2\sum_{t=1}^{n} q_t A W_t^{\alpha} \ln W. \qquad (25)$$

В общем виде матрица Гессе для функции (22) примет вид:

$$H(Q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial \alpha} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix}. \qquad (26)$$

Элементы этой матрицы примут вид:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} = 2\sum_{t=1}^{n} W_t^{2\alpha}; \qquad (27)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial \alpha} = 2\left(A^2 \sum_{t=1}^{n} W_t^{2\alpha} \ln W_t - \sum_{t=1}^{n} q_t W_t^{\alpha} \ln W_t \right); \qquad (28)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} = 2A\left(A\sum_{t=1}^{n} (\ln W_t)^2 W_t^{2\alpha} - \sum_{t=1}^{n} q_t (\ln W_t)^2 W_t \right). \qquad (29)$$

Элементы матрицы Якоби размерности $(n \times 2)$ для функции

$$F_t(A, \alpha) = A W_t^{\alpha} \qquad (30)$$

примут вид:

$$\frac{\partial F_t}{\partial A} = W_t^{\alpha}; \quad \frac{\partial F_t}{\partial \alpha} = A W_t^{\alpha} \ln W_t. \qquad (31)$$

Вычислим указанные элементы для алгоритмов, определяющих параметры функции ФКД2. Рассмотрим функцию (15) и соответствующее ей условие наименьших квадратов (20).

Пусть $\quad y_t - A K_t^{\alpha} L_t^{\beta} = g_t. \qquad (32)$

Тогда условие (20) представим в виде

$$G = \sum_{t=1}^{n} g_t^2 \to \min. \qquad (33)$$

Градиент условия (33) будет естественным обобщением (22). Следовательно,

$$\nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial A}; \frac{\partial G}{\partial \alpha}; \frac{\partial G}{\partial \beta} \right)^T. \qquad (34)$$

Соответственно, его компоненты примут вид:

$$\frac{\partial G}{\partial A} = -2\sum_{t=1}^{n} g_t \lambda_t, \qquad (35)$$

где $\quad \Omega_t = K_t^{\alpha} L_t^{\beta}; \qquad (36)$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = -2\sum_{t=1}^{n} g_t A \Omega_t \ln K_t; \qquad (37)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = -2\sum_{t=1}^{n} g_t A \Omega_t \ln L_t. \qquad (38)$$

В общем виде матрица Гессе для условия (20) примет вид:

$$H(G) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \alpha} & \frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial A} & \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \beta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}. \qquad (39)$$

Элементы матрицы Гессе можно записать так:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} = 2\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2; \qquad (40)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \alpha} = 2\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \ln K_t - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t \ln K_t \right); \qquad (41)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \beta} = 2\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \ln L_t - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t \ln L_t \right); \qquad (42)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} = 2A\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 (\ln K_t)^2 - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t^2 (\ln K_t)^2 \right); \qquad (43)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta} = 2A\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \ln L_t \ln K_t - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t \ln K_t \ln L_t \right); \qquad (44)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2} = 2A\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 (\ln L_t)^2 - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t^2 (\ln L_t)^2 \right). \qquad (45)$$

Примем, что $Y_t(A, \alpha, \beta)$ есть значение ФКД2 в точке t, где ФКД2 определено условием (15). Тогда элементы матрицы Якоби будут следующие:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial A} = \Omega_t; \qquad (46)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \alpha} = A \Omega_t \ln K_t; \qquad (47)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta} = A \Omega_t \ln L_t. \qquad (48)$$

В выражениях (46) – (48) принято, что $t = 1,...n$.

Результаты численного эксперимента

Для проверки изложенных методов был проведен численный эксперимент, суть которого в том, что описанные методы получения оценок были использованы для анализа данных, полученных в классическом исследовании Кобба и Дугласа и приведенных в [7]. Для получения оценок параметров производственных функций использовали следующие методы: метод логарифмической линеаризации (М1), получение производственной функции в результате потенцирования (М2), методом Гаусса-Ньютона, реализованном в системе STATISTICA 6.1, (М3), методом Гаусса-Ньютона, реализованном в системе STATGRAPHICS V.15 (М4), методом Левенберга-Марквардта (М5), реализованном в системе STATISTICA 6.1, методом Гаусса-Ньютона, реализованном в системе STATGRAPHICS V.15 (М 6), методом Гаусса-Ньютона, реализованном условием (8); этому методу присвоен индекс (М7) и методом Левенберга-Марквардта (М8), соответствующему условиям (10)-(13). При использовании методов нелинейного РА в качестве начального приближения (точек $P^{(0)}$) использовали оценки, полученные методом М1. Качество использованных методов определяли по величине среднего абсолютного отклонения

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t) \qquad (49)$$

и по величине среднего относительного отклонения

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{y_t - \hat{y}_t}{\hat{y}_t}, \qquad (50)$$

где y_t – фактическое значение переменной y в t-ой точке; $\hat{y}_t$ – её оценка, полученная по регрессионному уравнению. Результаты проведенного анализа приведены в таблице. При анализе таблицы следует учесть, что в строке для метода М1 приведены данные, относящиеся к логарифмам величины Y. Из приведенных данных следует, что применение нелинейного РА повышает точность полученных результатов.

Таблица

Показатели качества полученных регрессионных уравнений

Метод получения оценок	Тип оценки			
	MAE		δ	
	Вид производственной функции		Вид производственной функции	
	ФКБ1	ФКБ2	ФКБ1	ФКБ2
М1	0,04563	0,04894	0,00393	0,00406
М2	8,4227	8,5337	0,0584	0,0670
М3	7,1550	7,6992	0,0471	0,0547
М4	7,1016	7,2824	0,0493	0,0468
М5	7,4563	8,4106	0,0505	0,0411
М6	8,1933	7,8539	0,0471	0,0552
М7	7,6091	7,9775	0,0496	0,0580
М8	7,5048	7,3025	0,0503	0,0603

Выводы

1. На примере оценивания параметров производственной функции показано, что линеаризация нелинейных регрессионных уравнений приводит к потере точности предсказываемых результатов.

2. Методы получения оценок параметров нелинейных уравнений, встроенные в системы STATISTICA 6.1. и STATGRAPHICS V.15, примерно равноценны по точности получаемых оценок.

Список литературы

1. Дубницький В.Ю. Визначення параметрів виробничої функції із сталого еластичністю / В.Ю. Дубницкий, Б.В. Самородов // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУ ПС, 2008. – Вип. 7 (74). – С. 169-173.

2. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

3. Лотов В.А. Математические методы в экономике / В.А. Лотов, Е.П. Иванилов. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

4. Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник / Под ред. акад. Н.П. Федоренко. – М.: Экономика, 1975. – 699 с.

5. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

6. Лукашин Ю. Производственные функции в анализе мировой экономики / Ю. Лукашин, Л. Рахлина // Мировая экономика и международные отношения. – 2004. – № 1. – С. 17-27.

7. Доугерти К. Введение в економетрику / К. Доугерти. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 402 с.

8. Долгих В.Н. Оценка параметров производственной функции Кобба-Дугласа нелинейным методом наименьших квадратов / В.Н. Долгих, В.Я. Долгих // Зб. тез доповідей XI Всеукраїнської НПК [«Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України»]. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – Т. 1. – С. 40-42.

9. Толбатов Ю.Ю. Математичне програмування / Ю.Ю. Толбатов, Є.Ю. Тол батов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 429 с.

10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

11. Marquardt D.W. An algorithm for Least Square Estimation of Nonlinear Parameters / D.W. Marquardt // J.SIAM. – 1963. – V11. – № 2. – P. 431-437

12. Дубницкий В.Ю. Регуляризация расчета уравнений регрессии при моделировании свойств бетонов / В.Ю. Дубницкий, В.Л. Чернявский // Сб. трудов Всесоюзного симпозиума по обобщению задачи идентификации сложных систем. – Х., 1979. – С. 148-150.

Поступила в редколлегию 12.01.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Кононенко, Национальный технический университет «ХПІ», Харьков.

НЕЛІНІЙНЕ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА

В.Ю. Дубницький, Г.О. Савченко

Проведено порівняння якості оцінок параметрів виробничої функції Кобба-Дугласа отриманих методами лінійного і нелінійного регресійного аналізу. Для отримання оцінок використані методи Ньютона-Гауса і Льовенберга-Марквардта. Розрахунки виконані з використанням систем STATISTICA 6.1., STATGRAPHICS V.15. і спеціально складених програм.

Ключові слова : *виробнича функція Кобба-Дугласа,оценивание параметрів виробничої функції Кобба-Дугласа, нелінійна регресія, метод Ньютона-Гауса, метод Льовенберга-Марквардта.*

NON-LINEAR EVALUATION OF COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION PARAMETERS

V.Yu. Dubnitsky, A.A. Savchenko

The quality of Cobb-Douglas production function parameters as obtained by linear and non-linear regression analysis methods subjected to comparison. Newton-Gauss and Loewenberg-Marquardt methods were used for evaluation. The calculation was performed using STATISTICA 6.1. , STATGRAPHICS V.15. systems and specially developed programs.

Keywords: *Cobb-Douglas production function, evaluation of Cobb-Douglas production function parameters, non-linear regression, Newton-Gauss method, Loewenberg-Marquardt method.*