УДК 621.391

В.В. Палагін, О.В. Івченко

Черкаський державний технологічний університет, Черкаси

АДАПТАЦІЯ МЕТОДУ МАКСИМІЗАЦІЇ ПОЛІНОМА ДЛЯ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ЗА СТАТИСТИЧНО ЗАЛЕЖНОЮ ВИБІРКОЮ

В статті розглядається як один з можливих розв'язків задачі по оцінці параметрів негауссівських випадкових величин при їх моментно-кумулянтному описі за корельованою вибіркою. Одним із підходів щодо вирішення данної задачі є застосування методу максимізації полінома для оцінювання параметрів випадкових величин відмінних від гауссівських В статті наведений алгоритм адаптованого методу максимізації полінома для знаходження оцінок параметрів статистично залежних негауссівських випадкових величин на основі моментно-кумулянтного опису.

Ключові слова: *оцінка параметрів, вибірка, моментно-кумулянтний опис, негауссівська випадкова величина, кореляція, метод максимізації полінома, статистична залежність, об'єм тіла.*

Вступ

В теорії статистичного аналізу багатовимірних величин одну з головних позицій займають завдання кореляційного аналізу. В процесі вирішення цих завдань виявляється наявність і характер взаємозв'язку величин, взаємозалежності величин при усуненні впливу сукупності інших або залежності однієї випадкової величини від групи величин, обчислюються оцінки коефіцієнтів і матриць парної, часткової і множинної кореляції, перевіряються різні статистичні гіпотези щодо параметрів багатовимірного розподілу і коефіцієнтів кореляції. На підставі результатів кореляційного аналізу може робитися висновок про наявність і характер функціональної залежності випадкових величин або про перевагу для опису досліджуваного об'єкту регресійної моделі того або іншого вигляду.

Застосування класичного математичного апарату кореляційного аналізу широко використовується в припущенні про приналежність спостережуваної випадкової величини багатовимірному нормальному закону [1]. На практиці такі передумови кореляційного аналізу виконуються далеко не завжди [2]. Тому виникає необхідність розширення математичного апарату щодо опрацювання даних при негауссівських завадах. Одним із підходів щодо вирішення данної задачі є застосування методу максимізації полінома для оцінювання параметрів випадкових величин відмінних від гауссівських, та адаптація його на багатомірний випадок.

Метою роботи є адаптація методу максимізації полінома для знаходження оцінок параметрів статистично залежних негауссівських випадкових величин на основі моментно-кумулянтного опису та їх класифікації [3].

Моментно-кумулянтний опис багатомірних випадкових величин відмінних від гауссівських

Як зазначалось в [3, 4], крім кореляційного зв'язку випадкова величина може характеризуватися і статистичними зв'язками більш складного характеру. Про статистичний зв'язок між вибірковими значеннями можна судити за відмінністю від нуля сумісних моментів і кумулянтів досліджуваної випадкової величини. Наявність статистичного зв'язку 2-го і вищих порядків свідчить про негауссівський характер досліджуваної випадкової величини. Тому можна провести наступне узагальнення характеру проявлення негауссовості на базі моментного опису на багатомірний випадок. Згідно [4], випадкова величина має відмінний від гауссівського закон розподілу, якщо вона характеризується відмінними від нуля кумулянтами вище другого порядку. У випадку багатомірного розподілу випадкової величини про її негауссівський характер може свідчити як відмінність від нуля одномірних кумулянтів вище другого порядку, так і відмінність від нуля сумісних кумулянтів вище другого порядку. Це твердження розширює клас негауссівських випадкових величин на багатомірний випадок. Зокрема, як зазначалося в [3], випадкову величину, яка характеризується кумулянтними коефіцієнтами у вигляді дисперсії χ_2, коефіцієнта асиметрії γ_3 і сумісним кумулянтом $\chi_{11}^{(v,k)}$, будемо називати асиметричною корельованою випадковою величиною 1-го типу. А випадкову величину, яка характеризується кумулянтними коефіцієнтами χ_2, γ_3, коефіцієнтом ексцесу γ_4 і сумісним кумулянтом $\chi_{11}^{(v,k)}$, будемо називати асиметрично-ексцесною корельованою випадковою величиною 1-го типу. Якщо статистично залежна випадкова величина крім сумісного кумулянта $\chi_{11}^{(v,k)}$ характеризується ще сумісними кумулянтами вищих порядків, то вона вже є негауссівською і її назва формується на основі вище визначеного порядку статистичного зв'язку.

Адаптація методу максимізації полінома для оцінювання параметрів статистично залежних випадкових величин

Для оцінки параметрів випадкових величин з законом розподілу відмінним від гауссівського досить ефективно використовується метод максимізації полінома (метод Кунченка). Цей метод досконало розроблений для оцінювання параметрів за незалежною вибіркою, взятої з досліджуваної випадкової величини. Тому є доцільним розширити використання методу на випадок статистично залежних вибіркових значень з випадкової величини, який базується на використанні усереднених характеристик у вигляді моментного і кумулянтного опису випадкових величин.

На основі другої властивості стохастичних поліномів з коефіцієнтами, що залежать від оцінюваного параметра, для яких математичне сподівання як функція параметра має максимум в точці істинного значення параметра [5], проведемо адаптацію методу максимізації полінома на випадок статистично залежної випадкової величини.

Нехай спостерігається вибірка $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ об'ємом n залежних, однаково розподілених випадкових значень з випадкової величини $\xi(\vartheta)$ з багатомірною функцією розподілу $W_n(x_1...x_n, t_1, t_2, ..., t_n; \vartheta)$, де параметр ϑ є інформативним і приймає істине значення ϑ_0.

Згідно методу максимізації полінома для оцінки невідомого скалярного параметра ϑ використовується узагальнений стохастичний поліном 1-го типу порядку s і розміром n виду:

$$l_{sn}(\vec{x}/\vartheta) = nk_0(\vartheta) + \sum_{i=1}^{s} k_i(\vartheta) \sum_{v=1}^{n} \varphi_i(x_v), \qquad (1)$$

де $\varphi_i(x_v)$ – певні види функціонального перетворення над вибірковими значеннями.

Встановлено [6, 7], що якщо у вибірковому стохастичному поліномі вигляду (1) коефіцієнти $k_0(\vartheta)$ і $k_i(\vartheta)$ рівні відповідно :

$$k_0(\vartheta) = \int_a^b \sum_{i=1}^{s} \left[h_i(\vartheta)\psi_i(\vartheta)\right] d\vartheta; \quad k_i(\vartheta) = \int_a^b h_i(\vartheta) d\vartheta,$$

$$\forall \vartheta \in (a, b), \qquad (2)$$

де $\psi_i(\vartheta)$ – математичні сподівання функцій $\varphi_i(x_v)$, а функції $h_i(\vartheta)$ знаходяться з вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{s} h_j(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\psi_i(\vartheta), \; i = \overline{1,s}, \qquad (3)$$

то при будь-якому кінцевому s поліном (1) асимптотичний при $n \to \infty$, як функція параметра ϑ, має максимум в точці $\hat{\vartheta}_n$, околиці істинного значення ϑ_0. Причому при $n \to \infty$ величина $\hat{\vartheta}_n$ сходиться за вірогідністю до ϑ_0.

В вище наведених виразах:

$$\Psi_i(\vec{\vartheta}) = E\varphi_i(\xi); \; F_{i,j}(\vec{\vartheta}) = \Psi_{i,j}(\vec{\vartheta}) - \Psi_i(\vec{\vartheta})\Psi_j(\vec{\vartheta});$$

$$\Psi_{i,j}(\vec{\vartheta}) = E\varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi).$$

Оцінка невідомого параметра ϑ знаходиться з рішення рівняння:

$$\left.\frac{d}{d\vartheta} l_{sn}(\vec{x}/\vartheta)\right|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0,$$

яке в розгорнутому вигляді для (1) дорівнює:

$$\left.\sum_{i=1}^{s} h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^{n} \left[\varphi_i(\xi) - \psi_i(\vartheta)\right]\right|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0. \qquad (4)$$

У тому випадку, коли стохастичний поліном заданий в класі степеневих функцій (або описується за допомогою початкових моментів), то функції $F_{i,j}(\vec{\vartheta})$ називаються центрованими кореляntами розміром (i, j) і вони мають вигляд:

$$F_{i,j}(\vec{\vartheta}) = m_{i+j}(\vec{\vartheta}) - m_i(\vec{\vartheta}) \cdot m_j(\vec{\vartheta}).$$

На випадок статистично залежної вибірки з досліджуваної величини, узагальнений стохастичний поліном 1-го типу порядку s і розміром n набуває вигляду:

$$l_{snz}(\vec{x}/\vartheta; Z) = k_0(\vartheta; Z) + \sum_{i=1}^{s} k_i(\vartheta; Z) \sum_{v=1}^{n} \varphi_i(x_v). \qquad (5)$$

Слід відзначити принципову відмінність полінома (5) від полінома (1), яка полягає в залежності коефіцієнтів полінома від параметрів кореляції, які представлені у вигляді матриці кореляції Z:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & R_{12} & ... & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & ... & R_{2n} \\ . & . & . & . \\ R_{n1} & R_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

де $R_{v,k}$ – коефіцієнти кореляції, які характеризують степінь зв'язку між вибірковими значеннями і можуть бути визначенні як стандартні функції кореляції, що часто використовуються на практиці [3].

При цьому коефіцієнти полінома (5) $k_0(\vartheta; Z)$ і $k_i(\vartheta; Z)$ рівні відповідно:

$$k_0(\vartheta;Z) = \int_a^b \sum_{i=1}^{s}\left[h_i(\vartheta;Z)\psi_i(\vartheta)\right] d\vartheta;$$

$$k_i(\vartheta;Z) = \int_a^b h_i(\vartheta;Z)\, d\vartheta. \qquad (7)$$

Показано, що для статистично залежних випадкових величин оцінка невідомого параметра ϑ буде знаходиться з рішення стохастичного рівняння наступного виду:

$$\sum_{i=1}^{s} h_i(\vartheta,Z)\sum_{v=1}^{n}\left[\varphi_i(\xi)-\psi_i(\vartheta)\right]\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0, \qquad (8)$$

яке визначається як похідна по шуканому параметру ϑ від стохастичного поліному виду (5).

Функції $h_i(\vartheta;Z)$ в цьому випадку знаходяться з вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} h_j(\vartheta,Z)\cdot K_{i,j}^{(v,k)}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\psi_i(\vartheta),$$

$$i=\overline{1,s},\ k=\overline{1,n}, \qquad (9)$$

де для випадкової величини з статистичним зв'язком першого порядку корелянти $\Psi_{i,j}^{(v,k)}(\vartheta)$ і центровані корелянти $K_{i,j}^{(v,k)}(\vartheta)$ виражаються через одномірні і сумісні моменти наступним чином:

$$\Psi_{i,j}^{(v,k)}(\vartheta) = m_{ij}^{(v,k)}(\vec{\vartheta});$$

$$K_{i,j}^{(v,k)}(\vartheta) = m_{ij}^{(v,k)}(\vec{\vartheta}) - \alpha_i(\vec{\vartheta})\alpha_j(\vec{\vartheta}), \qquad (10)$$

де $\alpha_i(\vec{\vartheta}) = E(\xi^i) = \int_{-\infty}^{\infty}\xi^i W_1(\xi)dx$ – прості одномірні моменти рядку i;

$$m_{ij}^{(v,k)}(\vec{\vartheta}) = E(\xi^i\xi^j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^i\xi^j W(\xi_1,\xi_2)dx\ -$$

сумісні моменти порядку $(i+j)$.

Коефіцієнти $h_i(\vartheta;Z)$, що знаходяться з рішення рівняння (9) для випадкових величин з статистичним зв'язком першого порядку також визначаються через кореляційні функції, як міри зв'язку між вибірковими значеннями.

Таким чином відбувається перехід від одномірних моментів, які характерні для одномірних розподілів, до багатомірних моментів, як характеристик багатомірного характеру досліджуваної величини.

В якості рішення рівняння (4) і рівняння (8) береться дійсний корінь, що залежить від вибіркових значень, для якого похідна від поліномів (1) і (5) приймає максимальне значення. Для знаходження оцінки необхідно перш за все знаходити коефіцієнти $h_i(\vartheta;Z)$, $i=\overline{1,s}$.Коефіцієнти функції $k_0(\vartheta;Z)$ і $k_i(\vartheta;Z)$ є необхідними у разі декількох коренів рівняння максимізації полінома, коли в якості оцінки необхідно узяти глобальний максимум.

Показано, що оцінки невідомого параметра знайдені з рішення рівняння (8) будуть ефективними і асимптотично незміщеними.

В роботі [5] показано, що для полінома $l_{sn}(\bar{x}/\vartheta)$ з коефіцієнтами $h_i(\vartheta)$, що знайдені з рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3), справедлива наступна рівність:

$$J_{sn}(\vartheta) = E\left[\frac{d}{d\vartheta}l_{sn}(\vec{x};\vartheta)\right]^2_{\vartheta_0} = n\sum_{i=1}^{s}h_i(\vartheta_0)\frac{d}{d\vartheta}\psi_i(\vartheta_0) \ge 0, \qquad (11)$$

де функція $J_{sn}(\vartheta)$ – кількість добутої інформації про параметр ϑ з незалежної вибірки об'ємом n методом максимізації полінома.

Показано, що кількість добутої інформації прямо пропорційна об'єму вибірки n:

$$J_{sn}(\vartheta) = n j_{sn}(\vartheta),$$

де $j_{sn}(\vartheta)$ називається кількістю добутої інформації з одного вибіркового значення.

Слід відзначити, що кількість добутої інформації $J_{sn}(\vartheta)$ в загальному випадку менша кількості інформації Фішера $I(\vartheta)$, хоча в певних випадках спостерігається їх рівність.

Для статистично залежної випадкової величини кількість добутої інформації залежить від параметрів кореляції, які визначають коефіцієнти полінома. Тому математичний вираз для визначення кількості добутої інформації з корельованої випадкової величини методом максимізації полінома має вигляд:

$$J_{snz}(\vartheta;Z) = E\left[\frac{d}{d\vartheta}l_{snv}(\vec{x};\vartheta;Z)\right]^2\Big|_{\vartheta_0} = n\sum_{i=1}^{s}h_i(\vartheta_0;Z)\frac{d}{d\vartheta}\psi_i(\vartheta_0) \ge 0. \qquad (12)$$

З виразів (11) і (12) видно, що кількість добутої інформації залежить від вибору функцій $\varphi_i(\xi)$.

Для функцій $h_i(\vartheta)$ (4) дисперсія оцінки, що знайдена методом максимізації полінома, буде асимптотично рівна:

$$\sigma_{min}^2 \approx J_{sn}^{-1}(\vartheta).$$

Як показано [5, 6], якщо в рівнянні (1) з функціями $h_i(\vartheta)$, узяти (s+1) член, то для оцінки, знайденої методом максимізації полінома, асимптотично справедлива наступна нерівність:

$$\sigma^2_{(s+1)\min} \le \sigma^2_{(s)\min} \quad \text{або} \quad J^{-1}_{(s)sn}\left(\vartheta\right) \le J^{-1}_{(s+1)sn}\left(\vartheta\right),$$

де $\sigma^2_{(s)\min}$ – асимптотична дисперсія оцінки, коли кількість членів в поліномі (1) рівна s.

Закономірність збільшення кількості добутої інформації з ростом степеня стохастичного полінома зберігається і на випадок статистично залежної випадкової величини. Але слід відзначити, що в випадку кореляційного статистичного зв’язку дисперсія, як обернена функція до кількості добутої інформації, може змінюватись за рахунок кореляційних функцій, які визначають значення коефіцієнтів полінома (9). Тобто представляє інтерес дослідження поведінки дисперсії шуканої оцінки для різних видів функцій кореляції [8].

У випадку статистичного зв’язку першого порядку сумісні моменти і-го порядку є комбінація одномірних моментів і матриць кореляцій Z (6).

Зв’язок між сумісними моментами , сумісними кумулянтами і матрицею кореляції для v-го і k-го вибіркового значення має вид:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11}^{(v,k)} = \chi_2 \cdot Z^{(v,k)}, \quad v,k = \overrightarrow{1,n}\,.$$

Для вибіркових значень, що мають однакові одномірні закони розподілу, вирази сумісних моментів через сумісні кумулянти при нульовому математичному сподіванні до 6-го порядку мають наступний вигляд [9]:

$$\begin{aligned}
&m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11}^{(v,k)}, m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12}^{(v,k)};\\
&m_{13}^{(v,k)} = \chi_{13}^{(v,k)} + 3\chi_2\chi_{11}^{(v,k)};\\
&m_{14}^{(v,k)} = \chi_{14}^{(v,k)} + 4\chi_3\chi_{11}^{(v,k)} + 6\chi_{12}^{(v,k)}\chi_2;\\
&m_{15}^{(v,k)} = \chi_{15}^{(v,k)} + 5\chi_4\chi_{11}^{(v,k)} + 10\chi_{13}^{(v,k)}\chi_2 +\\
&+10\chi_{12}^{(v,k)}\chi_3 + 15\chi_{11}^{(v,k)}\chi_2^2;\\
&(13)\, m_{22}^{(v,k)} = \chi_{22}^{(v,k)} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^{(v,k)2};\\
&m_{23}^{(v,k)} = \chi_{23}^{(v,k)} + \chi_2\chi_3 + 6\chi_{11}^{(v,k)}\chi_{12} + 3\chi_2\chi_{12}^{(v,k)};\\
&m_{24}^{(v,k)} = \chi_{24}^{(v,k)} + \chi_4\chi_2 + 8\chi_{11}^{(v,k)}\chi_{13}^{(v,k)} + 4\chi_3\chi_{12}^{(v,k)} +\\
&+6\chi_{22}^{(v,k)}\chi_2 + 6\chi_{21}^{(v,k)2} + 3\chi_2^3 + 12\chi_2\chi_{11}^{(v,k)2};\\
&m_{33}^{(v,k)} = \chi_{33}^{(v,k)} + 3\chi_{31}^{(v,k)}\chi_2 + \chi_3^2 + 9\chi_{11}^{(v,k)}\chi_{22}^{(v,k)} +\\
&+9\chi_{12}^{(v,k)2} + 3\chi_{13}^{(v,k)}\chi_2 + 9\chi_2^2\chi_{11}^{(v,k)} + 6\chi_{11}^{(v,k)3}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Вирази сумісних кумулянтів через сумісні моменти до 6-го порядку мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&\chi_{13}^{(v,k)} = m_{13}^{(v,k)} - 3m_2 m_{11}^{(v,k)};\\
&\chi_{14}^{(v,k)} = m_{14}^{(v,k)} - 4m_3 m_{11}^{(v,k)} - 6m_{12}^{(v,k)} m_2;\\
&\chi_{22}^{(v,k)} = m_{22}^{(v,k)} - m_2^2 - 2m_{11}^{(v,k)2};\\
&\chi_{23}^{(v,k)} = m_{23}^{(v,k)} - m_3 m_2 - 6m_{12}^{(v,k)} m_{11}^{(v,k)} - 3m_2 m_{12}^{(v,k)};\\
&\chi_{33}^{(v,k)} = m_{33}^{(v,k)} - 3m_{13}^{(v,k)} m_2 - m_3 m_3 - 9m_{22}^{(v,k)} m_{11}^{(v,k)} -\\
&-9m_{12}^{(v,k)2} - 3m_2 m_{13}^{(v,k)} + 18m_2^2 m_{11}^{(v,k)} + 12^{m_{11}^{(v,k)}3}.
\end{aligned} \tag{14}$$

На практиці здебільшого використовують безрозмірні коефіцієнти, що характеризують статистичні зв’язки між вибірковими значеннями і називаються сумісними кумулянтними коефіцієнтами [4]. Для двохмірних випадкових величин кумулянтні коефіцієнти дорівнюють:

$$\gamma_{p,x}^{(v,k)} = \frac{\chi_{p,x}^{(v,k)}}{\chi_2^{\frac{p}{2}} \cdot \chi_2^{\frac{x}{2}}}. \tag{15}$$

Наприклад, коефіцієнт кореляції буде дорівнювати:

$$\gamma_{11}^{(v,k)} = \frac{\chi_{11}^{(v,k)}}{\chi_2}. \tag{16}$$

При відсутності кореляції сумісний кумулянт $\chi_{11}^{(v,k)}$ перетворюється в одномірний кумулянт χ_2 і тоді маємо: $\gamma_{11}^{(v,v)} = 1$.

Якщо вибірка є статистично незалежною, то сумісні кумулянтні коефіцієнти переходять в прості кумулянтні коефіцієнти.

Центровані корелянти на випадок статистично залежної випадкової величини згідно формули (10) з врахуванням виразів для початкових моментів через кумулянти, що наведені в [3], виражаються через кумулянти для v-го і k-го відліку наступним чином:

$$\begin{aligned}
&K_{1,1}^{(v,k)} = \chi_{11}^{(v,k)} - \chi_1^2;\; K_{1,2}^{(v,k)} = \chi_{12}^{(v,k)} - \chi_1(\chi_2 + \chi_1^2);\\
&K_{1,3}^{(v,k)} = \chi_{13}^{(v,k)} + 3\chi_2\chi_{11}^{(v,k)} - \chi_1(\chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^3);\\
&K_{1,4}^{(v,k)} = \chi_{14}^{(v,k)} + 4\chi_3\chi_{11}^{(v,k)} + 6\chi_{12}^{(v,k)}\chi_2 -\\
&-\chi_1(\chi_4 + 3\chi_2^2 + 4\chi_1\chi_3 + 6\chi_1^2\chi_2 + \chi_1^4);\\
&K_{2,2}^{(v,k)} = \chi_{22}^{(v,k)} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^{(v,k)2} - (\chi_2 + \chi_1^2)^2;\\
&K_{2,3}^{(v,k)} = \chi_{23}^{(v,k)} + \chi_2\chi_3 + 6\chi_{11}^{(v,k)}\chi_{12}^{(v,k)} + 3\chi_2\chi_{12}^{(v,k)} -\\
&-(\chi_2 + \chi_1^2)(\chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^3);\\
&K_{3,3}^{(v,k)} = \chi_{33}^{(v,k)} + 3\chi_{31}^{(v,k)}\chi_2 + \chi_3^2 + 9\chi_{11}^{(v,k)}\chi_{22}^{(v,k)} +\\
&+9\chi_{12}^{(v,k)2} + 3\chi_{13}^{(v,k)}\chi_2 + 9\chi_2^2\chi_{11}^{(v,k)} + 6\chi_{11}^{(v,k)3} -\\
&-(\chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^3)^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Як зазначалося в [5, 6], основною умовою правильного вибору функціонального перетворення $\varphi_i\left(\xi\right)$ досліджуваної величини ξ є додатність об’єму тіла стохастичного полінома $\Delta_s(\vec{\vartheta})$, що є визначником матриці $F_s\left(\vec{\vartheta}\right)$, яка складається з центрованих корелянтів $F_{i,j}\left(\vec{\vartheta}\right)$:

$$F_s(\vec{\vartheta}) = \left\| F_{i,j}(\vec{\vartheta}) \right\|, \quad i,j = \overline{1,s}.$$

Визначник матриці $F_s(\vec{\vartheta})$ має вигляд: $\Delta_s(\vec{\vartheta}) = \left| F_s(\vec{\vartheta}) \right|$.

Елементами матриці, визначник якої і є об’єм тіла для статистично залежної випадкової величини, є центровані корелянти $K_{i,j}^{(v,k)}$. Тоді об’єм тіла стохастичного полінома буде визначатися:

$$\Delta_{s,z}(\vartheta) = \begin{vmatrix} K_{1,1}^{(v,k)} & K_{1,2}^{(v,k)} & \dots & K_{1,s}^{(v,k)} \\ K_{2,1}^{(v,k)} & K_{2,2}^{(v,k)} & \dots & K_{2,s}^{(v,k)} \\ . & . & . & . \\ K_{s,1}^{(v,k)} & K_{s,2}^{(v,k)} & \dots & K_{s,s}^{(v,k)} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

У випадку статистично залежних випадкових величин першого типу (корельована випадкова величина) центровані корелянти є комбінація одномірних кумулянтів і матриць кореляцій (6). Тому елементами матриці визначника $\Delta_{s,z}(\vartheta)$ є теж матриці. Для знаходження об’єму тіла слід використовувати правила теорії матриць, зокрема правила теореми Шура і поняття блочної матриці [10].

Елементи матриці (18) позначено через $K_{i,j}^{(v,k)}$, що є теж матриці розмірністю $n \times n$ порядку $i + j$.

Слід відзначити, що основні операції з блоковими матрицями здійснюються по тих же правилах, по яких вони здійснюються із звичайними числовими матрицями, тільки в ролі елементів виступають блоки.

Також слід відзначити, що, як і одномірні кумулянтні коефіцієнти, багатомірні кумулянти не можуть приймати будь-які значення, що визначається додатньою визначеністю характеристичної функції [4, 8]. Існують області допустимих значень (ОДЗ) цих усереднених характеристик, що теж повинно враховуватися при обчисленні оцінок невідомих параметрів методом максимізації полінома.

В методі максимізації полінома області допустимих значень кумулянтних коефіцієнтів можуть визначатися з умови додатності об’єму тіла стохастичного полінома.

Наприклад при степені полінома s = 2, об’єм тіла згідно формули (8) дорівнює:

$$\Delta_{2,z} = \begin{vmatrix} K_{1,1}^{(v,k)} & K_{1,2}^{(v,k)} \\ K_{2,1}^{(v,k)} & K_{2,2}^{(v,k)} \end{vmatrix}.$$

Підставляючи вирази (17), за умови нульового математичного сподівання χ_1 і векторного представлення сумісних кумулянтів, отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta_{2,z} &= \chi_{11}^{(v,k)}(\chi_{22}^{(v,k)} + 2\chi_{11}^{(v,k)2}) - \chi_{12}^{(v,k)2} = \\ &= \chi_2^3(\gamma_{11}^{(v,k)}\gamma_{22}^{(v,k)} + 2\gamma_{11}^{(v,k)3} - \gamma_{12}^{(v,k)2}) > 0. \end{aligned} \qquad (19)$$

Враховуючи додатність дисперсії $\chi_2 > 0$, з (19) область допустимих значень строго негауссівських корельованих випадкових величин при s=2 визначаються з виразу:

$$\gamma_{11}^{(v,k)}\gamma_{22}^{(v,k)} + 2\gamma_{11}^{(v,k)3} - \gamma_{12}^{(v,k)2} > 0. \qquad (20)$$

На рис. 1 наведений графік, який згідно формули (20). ілюструє область допустимих значень кумулянтних коефіцієнтів $\gamma_{12}^{(v,k)}$ і $\gamma_{22}^{(v,k)}$ при фіксованих значеннях коефіцієнта кореляції $\gamma_{11}^{(v,k)}$, який має обмеження вигляду (20).

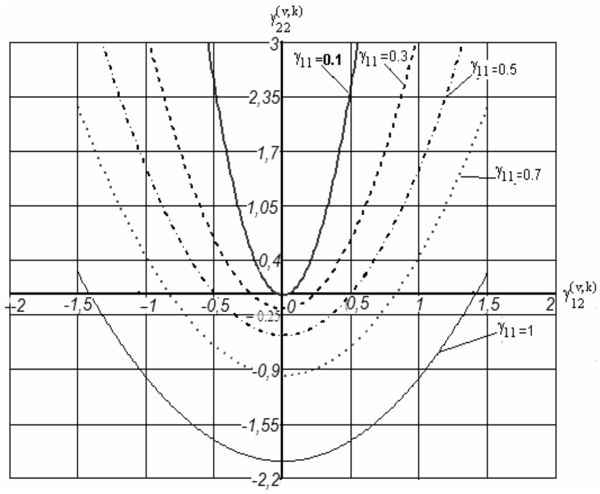

Рис. 1. Область допустимих значень кумулянтних коефіцієнтів $\gamma_{12}^{(v,k)}$ і $\gamma_{22}^{(v,k)}$ при фіксованих значеннях коефіцієнта кореляції $\gamma_{11}^{(v,k)}$ для другого степеня полінома

Слід відмітити закономірність, що при відсутності кореляції вираз (20) набуває вигляду:

$$\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2 > 0, \qquad (21)$$

що повністю співпадає з відомим виразом для негауссівських незалежних випадкових величин, який визначає області допустимих значень коефіцієнту асиметрії і коефіцієнту ексцесу [5, 6].

Також слід відзначити, що при статистичному зв’язку, при якому $\gamma_{11}^{(v,k)} = 1$, вираз (20) приймає вигляд

$$\gamma_{22}^{(v,k)} + 2 - \gamma_{12}^{(v,k)2} > 0. \qquad (22)$$

Якщо порівняти нерівності (21) і (22), то видно, що області допустимих значень $\gamma_{12}^{(v,k)}$ і $\gamma_{22}^{(v,k)}$ співпадають з областями допустимих значень γ_3 і γ_4.

Аналогічним чином проводяться дослідження ОДЗ і для інших розмірностей стохастичного полінома.

Висновки

Опрацювання випадкових величин відмінних від гауссівських потребує розробки нових методів обробки, які базуються на використанні тих апріорних даних про випадкову величину, які практично найлегше отримати. Відомо, що усереднені характеристики у вигляді моментів можуть бути легко отримані, як певні усереднення випадкової величини в певні моменти часу. В той же час щільність розподілу досліджуваної функції може бути взагалі невідомою. Задача пошуку щільності розподілу ще ускладнюється, коли ведеться опрацювання статистично-залежної випадкової величини.

Використання сумісних кумулянтів як мір опису статистично залежних випадкових величин дозволяє провести адаптацію метода максимізації полінома на випадок багатомірних величин. Вид стохастичного полінома, за яким розкладається випадкова корельована величина, згідно методу максимізації полінома, утворюється з врахуванням кореляційних зв'язків, тому можна стверджувати про його відмінність від стохастичного поліному статистично незалежної випадкової величини.

Встановлена відмінність оцінювання параметрів випадкових величин за корельованою вибіркою методом максимізації полінома, де використовуються саме сумісні моменті, які визначають центровані корелянти і відповідно коефіцієнти полінома.

Визначено, що в випадку кореляційного статистичного зв'язку дисперсія, як обернена функція до кількості добутої інформації, буде залежати не тільки від параметра негауссівської завади, але і від кореляційних функцій.

Встановлені області допустимих значень багатомірних усереднених характеристик, що повинні враховуватися при обчисленні оцінок невідомих параметрів методом максимізації полінома.

Адаптація методу максимізації полінома на багатомірний випадок розширює можливості сфери обробки статистично залежних негауссівських випадкових величин.

Список літератури

1. *Лифшиц М.А. Гауссовские случайные функции / М.А. Лифшиц. – К.: ТвіМС, 1995. – 246 с.*
2. *Соленов В.И. Нелинейная обработка и адаптация в негауссовских помехах / В.И. Соленов, О.И. Шелухин. – К.: КМУГА, 1997. – 180 с.*
3. *Палагін В.В. Особливості оцінювання параметрів статистично залежних випадкових величин / В.В. Палагін, О.В. Івченко // Вісник ЧДТУ. – Черкаси, 2009. – С. 37-41.*
4. *Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразование / А.Н. Малахов. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.*
5. *Кунченко Ю.П. Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома / Ю.П. Кунченко, Ю.Г. Лега. – К.: Наукова думка, 1992. – 180 с.*
6. *Кунченко Ю.П. Поліноміальні оцінки параметрів близьких до гауссівських випадкових величин. Частина I. Стохастичні поліноми, їх властивості і застосування для знаходження оцінок параметрів / Ю.П. Кунченко. – Черкаси: ЧІТІ, 2001. – 133 с.*
7. *Кунченко Ю.П. Стохастические полиномы / Ю.П. Кунченко.– К.: Наук. думка, 2006. – 275 с.*
8. *Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Сов. радио, 1966. – 683 с.*
9. *Андерсон Т. Введение в многомерный статистический аналіз / Т. Андерсон. – М. Гос. изд-во фізико-математической литературы, 1963. – 505 с.*
10. *Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Мир, 1969. – 500 с.*

Надійшла до редколегії 22.01.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Рудницький, Черкаський державний технологічний університет, Черкаси.

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ЗА СТАТИСТИЧЕСКИ ЗАВИСИМОЙ ВЫБОРКОЙ

В.В. Палагин, А.В. Ивченко

В статье рассматривается как одно из возможных решений задачи по оценке параметров негауссовських случайных величин при их моментно-кумулянтном описании за коррелируемой выборкой. Одним из подходов относительно решения данной задачи есть применение метода максимизации полинома для оценивания параметров случайных величин отличающихся от гауссовських. В статье приведен алгоритм адаптированного метода максимизации полинома для нахождения оценок параметров статистически зависимых негауссовських случайных величин на основе моментно-кумулянтного описания.

Ключевые слова: *оценка параметров, выборка, моментно-кумулянтное описание, негауссовская случайная величина, корреляция, метод максимизации полинома, статистическая зависимость, объем тела.*

ADAPTATION OF METHOD OF MAXIMIZATION OF POLYNOMIAL FOR THE ESTIMATION OF PARAMETERS OF ALÉA NUMÉRIQUES A ACCÈS OF STATISTIQUE OF DÉPENDANTE

V.V. Palagin, A.V. Ivchenko

In the article examined a résolution problème for the estimation of parameters of correlated quantity are no Gaussian assumed that variate description of cumulant and moment . In the article presentation the algorithm of the adapted method of maximization of polynomial is resulted for finding of estimations of parameters statistically dependent no Gaussian assumed that variate description of cumulant and moment.

Keywords: *estimator of parameter,a sample, accumulant and moment formulation, non-Gaussian process, a correlation, method of maximization of polynomial, a statistic dependence.*