УДК 621.317

З.Л. Варша[1], М.В. Галёвская[2]

[1]*Польское метрологическое сообщество, Варшава, Польша*
[2]*Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев*

ВЫБОР НАИЛУЧШЕЙ ОЦЕНКИ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА ПРИМЕРЕ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В статье рассмотрены нетрадиционные оценки измеряемой величины, полученных из эмпирических распределений, при ассоциировании с теоретическими моделями, отличающимися от нормального распределения. Рассмотрены однокомпонентные и многокомпонентные оценки для семейства трапециевидных распределений. В качестве наилучшей оценки центра для всего семейства трапеций может использоваться двухкомпонентная оценка, которая определяется линейной функцией выборочного среднего и середины размаха. Предложенные новые оценки успешно расширяют перечень оценок измеряемой величины и вариантов оценивания неопределенности по типу А.

Ключевые слова: *результат измерения, оценивание неопределенности типа А.*

Введение

Задача получения наилучшей оценки измеряемой величины базируется на проблемах математической статистики по получению оценок параметров, отвечающих требованиям: состоятельности, достаточности, эффективности и быть несмещенной. Некоторые случайные составляющие результатов наблюдений могут быть более точно смоделированы средствами отличных от нормального распределения, положенного в основу GUM [1].

Результаты наблюдений при многократных измерениях, как правило, поддаются предварительной обработке: исключение систематических эффектов, выбросов и т.д. Поэтому, наиболее важным для последующего анализа является требование эффективности. Очень важно при обработке данных использовать эффективную оценку, поскольку некорректное оценивание координаты центра функции плотности вероятности влечет занижение или завышение реальной точности измерения. В работах [2, 9] для ряда смоделированных распределений показано каким образом учитывается автокорреляция и какая из оценок результата измерения имеет наименьшее СКО.

Основной целью этой работы является расширение возможностей для выбора наилучшей оценки измеряемой величины на примере.

Оценкияизмеряемойявеличиныя

Подход к оцениванию неопределенности по типу А, предложенный в [1] базируется на классической оценке в виде среднего арифметического $\overline{X}$:

$$u_A = S[\overline{X}] = S_x / \sqrt{n}\,, \tag{1}$$

где S_x – выборочное СКО; n – объем выборки.

Альтернативами, хорошо известными в литературе, являются медиана и середина размаха. В общем случае, СКО для этих статистик зависит от модели самого распределения $p(X), F(X)$. Так, СКО медианы:

$$S[X_{med}] = \sqrt{1/(4n \cdot p^2(X_{med}))}\,, \tag{2}$$

где $p(X_{med})$ – значение функции плотности вероятности при $X = X_{med}$.

Для середины размаха, необходимо даже учитывать взаимное распределение соответствующих статистик:

$$p_{X\min X\max}(X_{\min}, X_{\max}) = n(n-1) \times$$
$$\times [F(X_{\max}) - F(X_{\min})]^{n-2} p(X_{\min}) p(X_{\max}).$$

Таким образом, можно выделить группы распределений, для которых можно использовать более эффективную оценку, чем среднее арифметическое. Для обобщенных распределений можно выделить область значений параметров формы.

Подходы к эффективному оцениванию систематизированы по группам:

1. С помощью симуляции конкретного эмпирического распределения методом Монте-Карло.
2. Бутстреп методы.
3. С использованием значений коэффициентов формы распределений.
4. С использованием конкретной модели теоретической, выбранной с использованием критериев согласия.

Далее рассмотрены последние два подхода. Некоторые сложные аналитические расчеты заменены на моделирование методом Монте-Карло.

Для получения выборок с трапециевидным распределением можно воспользоваться рекомендациями [3] и полученными обратными функциями из [4]. Сгенерированы выборки из генеральной совокупности с трапециевидной функцией плотности вероятности с отношением основ (верхней к нижней) β от 0 до 1. На рис. 1 показано как дисперсия среднего арифметического и середины размаха зависят от β и объема выборки n [10, 11]. Дисперсия медианы не рассматривается, поскольку она значительно больше. Пересечение поверхностей наблюдается в области β = 0,35, и не зависит от n. Можно сделать заключение, что для отношений β > 0,35 эффективной оценкой является середина размаха выборки, для β < 0,35 – выборочное среднее. Аналогичный результат можно получить из [5].

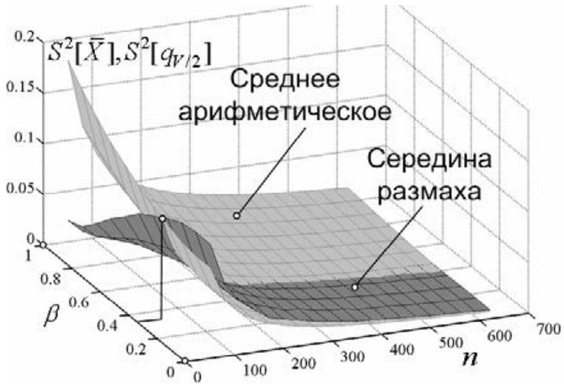

Рис. 1. Зависимость дисперсий оценок от n и β

Таким же образом получены зависимости для интересной теоретической модели – криволинейной трапеции (рис. 2), которая упоминается в [3].

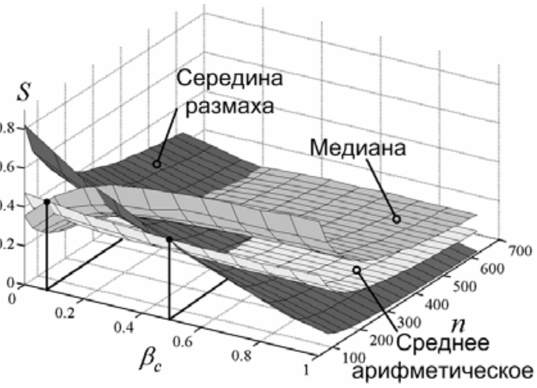

Рис. 2. Зависимость дисперсий оценок от n и β_c

Для исследования проблемы выбора наилучшей оценки для асимметричных распределений необходимо учитывать, что соответствующие значения среднего, середины размаха и медианы не будут совпадать.

Рассмотрим вопрос влияния асимметрии на эффективность этих оценок. Для этого смоделируем ряд несимметричных трапеций (рис. 3). Исследование показало, что асимметрия мало влияет на эффективность оценки. Только в граничных случаях (only for left-side and for right-side of the trapezoidal distribution sloping [4]) получено незначительное преимущество в сторону середины размаха.

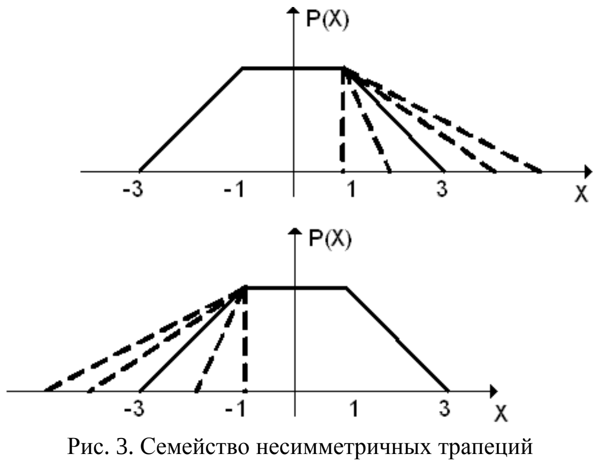

Рис. 3. Семейство несимметричных трапеций

Полученные результаты натолкнули на идею более сложных оценок, которые были бы эффективными для всего семейства распределений. Как правило, эти оценки – многокомпонентные, более сложные, например как в [5].

В [10, 11] предложено упрощенную двухкомпонентную оценку, основанную на двух составляющих с равными весовыми коэффициентами.

$$\tilde{X} = \frac{1}{2} \cdot q_{V/2} + \frac{1}{2} \bar{X} . \qquad (3)$$

Результаты моделирования и использования данной оценки показали, что она является наилучшей в широкой области симметричной трапеции ($0 < \beta < 0,75$) [10, 11]. Значение $\beta > 0,75$ соответствует случаю доминирующей составляющей с равномерным распределением.

Очевидно, что в этом случае наилучшей оценкой является средина размаха.

Рассмотрим вариант многокомпонентных оценок с использованием параметра формы распределения- коэффициента эксцесса. Двух и трех компонентные оценки основанные на значении коэффициента эксцесса. Авторы [6, 7] предложили трехкомпонентную оценку результат измерения

$$\hat{X} = k_1 \bar{X} + k_2 q_{V/2} + k_3 X_{med} \qquad (4)$$

Коэффициенты k_1, k_2, k_3 являются линейными функциями эксцесса распределения E.

Зависимости значений коэффициента эксцесса от параметра трапеций приведены на рис. 4.

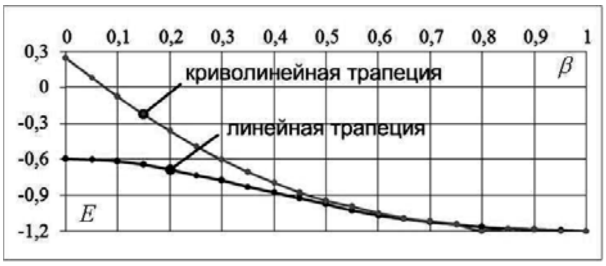

Рис. 4. Значения коэффициента эксцесса для трапециевидных распределений

Данные оценки проанализированы в более ранних публикациях [10, 11], но необходимо уделить внимание точности оценивания самого эксцесса. Моделирование показало, что рассеяние оценки эксцесса может быть очень значительным даже при достаточном объеме выборки. Более того, оценка эксцесса может быть значительно смещенной (рис. 5). Распределение значений оценок эксцесса, полученных по выборкам из некоторой генеральной совокупности – несимметричное, причем асимметрия уменьшается при увеличении объема выборки (рис. 6).

Поэтому, возвращаясь к подходу с выбором теоретической модели по значению статистики критерия согласия, для линейной трапеции можно представить выражение для эффективной оценки с учетом весового коэффициента k'

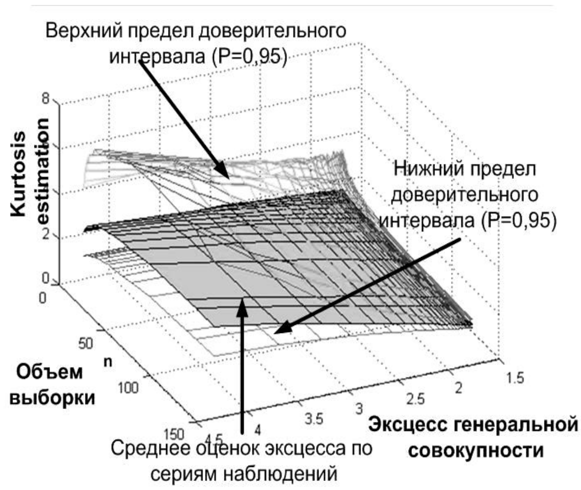

Рис. 5. Параметры оценивания эксцесса

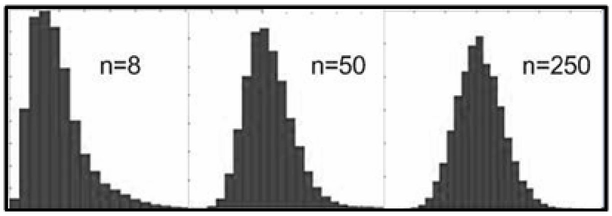

Рис. 6. Распределение значений оценок эксцесса

$$X_{eff} = (1 - k')\bar{X} + k' q_{V/2} . \qquad (5)$$

С использованием моделирования, получено:

$$k' = \begin{cases} 0,12\beta + 0,44, \text{ if } 0 < \beta < 0,5; \\ \beta, \text{ if } 0,5 < \beta < 1. \end{cases}$$

Результаты оказались стабильными для объема выборки от 20 до 10000.

Оценивание неопределенности результата измерения

Согласно VIM-3 [8], оценивание неопределенности типа А – оценивание составляющих неопределенности средствами статистического анализа значений измеряемой величины, полученных при определенных условиях измерения. Таким образом, последующие изложения не противоречат определению.

Для предложенной двухкомпонентной оценки (5), её СКО, и соответственно неопределенность типа А, выражается как

$$u_A^2 = \left((1 - k')S[\bar{X}]\right)^2 + \left(k' S[q]\right)^2 + 2\rho k'(1 - k')S[\bar{X}]S[q] ,$$

где $S[\bar{X}]$, $S[q]$ – соответствующие СКО среднего и середины размаха; ρ – коэффициент корреляции между ними.

Для получения выражения для СКО середины размаха предполагалось, что корреляция между минимальным x_{min} и максимальным x_{max} значениями – незначительна (это подтверждалось результатами моделирования)

$$S[q_{V/2}] = \frac{1}{2}\sqrt{S^2[x_{min}] + S^2[x_{max}]}\,.$$

С учетом линеаризации:

$$S^2[x_{min}] \approx S^2[x_{max}] = \left(\frac{\partial F^{-1}(r)}{\partial r}\right)^2 \cdot S^2(r_{max})\,,$$

где $S^2(r_{max})$ – дисперсия соответствующей порядковой статистики равномерного распределения:

$$S^2(r_{max}) = \frac{n}{(n+1)^2 \cdot (n+2)};$$

$F^{-1}(r)$ – обратная функция к интегральному распределению.

Рассмотрен пример применения предложенного подхода для трапецеидальной модели распределения. Так, предварительная проверка по критерию Пирсона показала, что рассматриваемая выборка не согласуется с нормальным и равномерным законами распределения, а гипотеза о трапециевидном распределении принимается с уровнем значимости 0,05 ($\chi^2_{\text{íàáë}} = 17,3 < \chi^2_{\text{êð}} = 19,7$). Полученный результат измерения с расширенной неопределенности при использовании оценки (2):

$$X = (22,94 \pm 0,13); \quad P = 0,95.$$

Для сравнения, в случае использования в качестве результата измерения среднего арифметического:

$$X = (22,87 \pm 0,18); \quad P = 0,95\,.$$

Списокялитературыя

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 c.*

2 *Dorozhovetz M. Methods of upgrading the uncertainty of type A evaluation (2). Elimination of the influence of autocorrelation of observations and choosing the adequate distribution / M. Dorozhovetz, Z. Warsza // Proceedings of 15th IMEKO TC4 Symposium, Iasi Romania. – 2007. – P. 199-204.*

3. *Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Guide OIML G 1-101 Edition 2007 (E) – 60 c.*

4. *Kacker R.N. Trapezoidal and triangular distributions for Type B evaluation of standard uncertainty / R.N. Kacker, J.F. Lawrence // Metrologia. – 2007. – 44. – P. 117-127.*

5. *Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1985. – 248 с.*

6. *Zakharov I.P Minimization of uncertainties inmeasurements with repeated observations / I.P. Zakharov, N.V. Shtefan // Proceedings of10th IMEKO TC7 International Symposium, Saint-Petersburg, June 2004, Tomsk Technical University. – P. 189-192.*

7. *Zakharov I.P. Algorithms for reliable and effective estimation of type a uncertainty [Электронный ресурс] / I.P. Zakharov, N.V. Shtefan // Measurement Techniques. – 2005. – Vol. 48, 5. – P.427-437. – Режим доступа к док.: www. Springer.com (transl. from Russian Izmieritelnaja Tekhnika 2, 2005, P. 9 -15).*

8. *JCGM 200:2008 International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM). – BIPM, S`evres, France, 2008. – 90 c.*

9. Dorozhovets M. Type A uncertainty evaluation of autocorrelated observations and choosing the best estimators of data distribution / M. Dorozhovets, Z.L. Warsza // Proceedings of 18th Symposium Metrology and Metrology Assurance 2008, Sozopol Bulgaria. – P. 70-78.

10. *Warsza Z.L. About the best measurand estimators of trapezoidal probability distributions / Z.L. Warsza, M. Galovska // Przegląd Elektrotechniki (Electrical Review). – 2009. – No 5. – P. 86-91*

11. *Warsza Z.L. Choice the best measurand estimator for measurements of trapezoidal functions / Z.L. Warsza, M. Galovska // Proceedings of Symposium PPM 09 Podstawowe Problemy Metrologii (Basic Metrology Problems) in Sucha Beskidzka, Poland, May 2009, Polish Academy of Science, Works of Katowice branch, seria Konferencje. – 2009. – Nr 14. – P. 108-115*

Поступила в редколлегию 15.06.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ВИБІРяНАЙКРАЩОЇяОЦІНКИяВИМІРЮВАНОЇяВЕЛИЧИНИяНАяПРИКЛАДІяТРАПЕЦІЄВИДНИХяРОЗПОДІЛІВя

З.Л. Варша, М.В. Гальовська

В статті розглянуто нетрадиційні оцінки вимірюваної величини, отримані з емпіричних розподілів, при асоціюванні з теоретичними моделями, котрі відрізняються від нормального розподілу. Розглянуті однокомпонентні та багатокомпонентні оцінки для сімейства трапецієвидних розподілів. В якості найкращої оцінки центру для всього сімейства трапецій може використовуватись двокомпонентна оцінка, котра визначається лінійною функцією вибіркового середнього і серединою розмаху. Запропоновані нові оцінки успішно розширюють перелік оцінок вимірюваної величини і варіантів оцінювання невизначеності за типом А

Ключові слова: *результат вимірювання, оцінювання невизначеності за типом А.*

CHOOSINGяTHEяBESTяESTIMATESяOFяMEASURANDяONяTHEяEXAMPLEяOFяTRAPEZOIDALяDISTRIBUTIONSя

Z.L. Warsza, M.V.Galovska

This article reviewed the non-traditional estimators of the measurand, received from empirical distributions. First of all it is important for distributions with associated with the theoretical models differed from the normal distribution. One-component and multi-component estimators for family of trapezoidal distributions are considered. As the best estimator of the distribution center for the whole family can be used two-component estimator, which determined as a linear function of sample mean and sample midrange. Proposed new estimator expand the list of measurand estimators and ways of uncertainty estimation of the type A.

Key words: *measurement result, uncertainty estimation of type A.*