

УДК 681.324

Д.Ю. Голубничий¹, В.В. Огурцов², В.Ф. Третьяк¹¹Харковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков²Харьковский национальный экономический университет, Харьков

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ НА ОСНОВЕ РАНГОВОГО ПОДХОДА

Рассмотрено метод решения задачи целочисленного линейного программирования с булевыми переменными на основе рангового подхода. Результаты экспериментального исследования показали, что наиболее существенный выигрыш в быстродействии достигается при использовании алгоритма A_1 совместно с приближенными алгоритмами, когда на первых этапах с полиномиальной временной сложностью отыскивается приближенное решение с погрешностью менее 5%, а затем с учетом величины имеющегося допустимого решения отыскивается оптимальное алгоритмом A_1 .

Ключевые слова: целочисленное линейное программирование, ранговый подход.

Введение

Постановка проблемы. В ряду научно-технических направлений, в наибольшей мере влияющих сегодня на прогресс в области передачи, приема и обработки информации, обработка данных (ОД) занимает одно из первых мест.

Аппаратура связи, обработки и передачи данных, средства гидро- и радиолокации, управления оружием и агрегатами, автомобильная электроника и авиация, измерительная техника, приборы контроля за состоянием объектов и окружающей среды, радиовещания, высококачественное воспроизведение звука, компьютерные технологии – вот далеко не полный перечень приложений, где методы и средства ОД обеспечивают принципиально новое качество.

Определяющим в упомянутых приложениях является требование обработки информации в масштабе реального времени.

В работе приводится алгоритм решения задачи целочисленного линейного программирования с булевыми переменными на основе рангового подхода.

Основная часть

В настоящее время получили довольно широкое распространение задачи об оптимальном наборе объектов при ограничении на расход ресурсов. Данные задачи в комбинаторной оптимизации относятся к типу задач о ранце, простейшая формальная модель которых имеет следующий вид. Требуется максимизировать:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j, \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j \leq b, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad c_j > 0, \quad a_j > 0, \quad b > 0. \quad (2)$$

В виду экспоненциальной сложности задачи представляется актуальной разработка эффективных

методов и алгоритмов на их основе для получения ее точного решения. Поэтому рассматривается возможность применения рангового подхода [1] к решению задачи (1), (2).

В основу решения задачи (1)-(2) положена модель, представляющая n -мерный единичный куб решения задачи (1)-(2) в виде графа ДД [1]. Построение путей следующего ранга в графе ДД строится с учетом оптимизации по направлению. Под оптимизацией по направлению в графе ДД к вершине p понимается формирование множеств $m_{sp}^{r=r+1}$ следующего ранга, которые получают за счет выделения в m_{sj}^r путей, подсоединение к которым ребра (j,p) позволит в множестве $m_{sp}^{r=r+1}$ получить пути, удовлетворяющие некоторым правилам $\{L_w\}$ на основе рекуррентного соотношения

$$\forall (\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r) \left[\mu_{sp}^{r=r+1} = L_w \left\{ \mu_{sj}^r \cup (i,p) \right\}; \right. \quad (3)$$

$$p = r+1, n; j = r, n,$$

где $m_{sj}^r \cup (j,p)$ – путь из вершины s графа ДД в вершину p , проходящий через промежуточную вершину j и удовлетворяющий правилам $\{L_w\}$, т.е. получаемый за счет подсоединения к пути μ_{sj}^r ребра (j,p) , если такое соединение не противоречит правилам $\{L_w\}$.

Таким образом, необходимо построить такие стратегии $\{L_w\}$ формирования множеств путей в графе ДД, которые позволили бы уменьшить временную сложность решения задачи, не нарушая ее оптимальность.

Наиболее важной стратегией $\{L_1\}$ является правило, основанное на понятии выделения коридо-

ра в множестве m_{sj}^r . С целью упрощения изложения материала наложим на функционал (1) ограничения

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0, \quad (4)$$

т.е. отсортируем коэффициенты в функционале (1) в порядке убывания. Тогда в соответствии с (3) в построенных множествах каждого ранга пути окажутся также отсортированными в порядке невозрастания длины по весам функционала. Длина каждого пути по весу функционала $d_c(\mu_{sj}^r)$ определяет значение функционала (1) в верши нах единичного куба V^n . Длина по весам ограничений $d_a(\mu_{sj}^r)$ опреде-

ляет соответствует ли данная вершина V^n ограничениям (2), то есть принадлежит вершина n -мерного единичного куба V^n гиперплоскости (2). Если $d_a(\mu_{sj}^r) \leq b$, то вершина принадлежит гиперплоскости (2) и будем говорить, что путь m_{sj}^r удовлетворяет свойству v .

Сформулируем в виде теоремы правило, определяющее стратегию $\{L_1\}$, и позволяющее в множестве m_{sj}^r выделить путь $\bar{\mu}_{sj}^r$ с длиной $d_c(\bar{\mu}_{sj}^r)$, по отношению к которому все пути с меньшим значением длины по весам функционала исключаются из множества допустимых как неоптимальные.

Теорема 1. В сформированных множествах ранга r пути, у которых длина по весам функционала $d_c(\mu_{sj}^r)$ меньше длины пути по весам функционала с минимальной длиной по весам ограничений $d_a(\mu_{sj}^r)$, не могут определять оптимальное решение задачи (1) – (2).

Доказательство. Предположим, что на основе пути μ_{sj}^{*r} из множества m_{sj}^r , у которого длина $d_c(\mu_{sj}^{*r})$ меньше, нежели длина пути по весам функционала с минимальной длиной по весам ограничений $d_a(\mu_{sj}^r)$, удалось построить оптимальное решение задачи (1)-(2). Тогда в множества $m_{sp}^{r=r+1}$, $r = (\overline{1, n})$ следующего ранга должен попасть путь и минимальный по весам ограничений, ведь он тем более будет удовлетворять свойству v . Однако, длина по весам функционала у такого пути будет больше, нежели чем у μ_{sj}^{*r} и, следовательно, предположение о существовании μ_{sj}^{*r} неверно, а этот путь исключить из дальнейшего анализа, что и требовалось доказать.

Теорема 1 позволяет определить понятие коридора.

Определение. Под одномерным коридором из множества m_{sj}^r в множество $m_{sp}^{r=r+1}$ будем понимать совокупность путей μ_{sj}^r , находящихся между верхней границей множества m_{sj}^r и его нижней границей, удовлетворяющих свойству v в множестве $m_{sp}^{r=r+1}$. Верхняя граница в m_{sj}^r определяется путем с максимальной длиной по весам функционала $d_c(\mu_{sj}^r)$, а нижняя – путем с минимальной длиной по весам ограничений $d_a(\mu_{sj}^r)$.

Рассмотрим правило $\{L_2\}$ фильтрации неперспективных путей внутри выделенного коридора, определяемого теоремой 2.

Теорема 2. Если в коридоре существуют два пути $\mu_{sj}^{*r} \in m_{sj}^r$ и $\mu_{sj}^{**r} \in m_{sj}^r$, для которых $d_c(\mu_{sj}^{*r}) \geq d_c(\mu_{sj}^{**r})$; $d_a(\mu_{sj}^{*r}) \geq d_a(\mu_{sj}^{**r})$, то вектор \vec{X} , соответствующий пути μ_{sj}^{**r} , не может являться оптимальным решением задачи (1)-(2).

Доказательство. Предположим, что на основе пути μ_{sj}^{**r} можно построить оптимальное решение. Последнее означает, что на последующих рангах путь μ_{sj}^{**r} наберет большее значение по весам функционала, нежели путь μ_{sj}^{*r} , т.е. $d_c(\mu_{sj}^{*r}) \leq d_c(\mu_{sj}^{**r})$. Но путь μ_{sj}^{*r} может быть построен в тоже множество m_{sj}^r , что и путь μ_{sj}^{**r} , как удовлетворяющий свойству v , но имеющий длину $d_a(\mu_{sj}^{*r}) \leq d_a(\mu_{sj}^{**r})$. При этом по весам функционала к этому моменту путь μ_{sj}^{*r} имеет длину большую, чем путь μ_{sj}^{**r} . Следовательно, каждый из них наберет одну и ту же величину по весам функционала, но $d_c(\mu_{sj}^{*r}) \geq d_c(\mu_{sj}^{**r})$.

Значит, предположение о том, что на основе пути μ_{sj}^{**r} можно построить оптимальное решение не верно, следовательно теорема 2 доказана.

Алгоритм решения задачи. Рассмотрим алгоритм A_1 решения задачи, реализующий предложенные стратегии $\{L_1\}$ и $\{L_2\}$, пошаговое описание которого имеет следующий вид.

ШАГ 1. Из вершины s строятся множества путей $\{\mu_{sj}^{r=1}\}_{j=\overline{1, n}}$ удовлетворяющих свойству v , и определяются в множествах $m_{sj}^{r=1}$ пути максималь-

ной длины $d_c(\mu_{s_j}^{*r})$ по весам функционала.

ШАГ 2. Формируются множества путей $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = r+1, n$, следующего ранга, удовлетворяющие свойству v , на базе множеств путей $m_{s_j}^r$ предыдущего ранга на основе принципа оптимизации по направлению (3) с выделением коридора по стратегии $\{L_1\}$ и исключением векторов внутри коридора в соответствии со стратегией $\{L_2\}$. Путь в множестве $m_{sp}^{r=r+1}$ может быть сформирован, если он удовлетворяет свойству v . Если свойство v не выполняется, то путь исключается из дальнейшего анализа. В образованных множествах $m_{sp}^{r=r+1}$ выделяются самые длинные пути $\{\mu_{s_j}^{*r=r+1}\}$ по весам функционала.

ШАГ 3. Проверяется, все ли множества путей следующего, $(r+1)$ -го, ранга пустые. Если это так, то осуществляется переход к шагу 4, если нет, то проверяется: $r = (n-1)$. В случае выполнения равенства также осуществляется переход к шагу 4, иначе r увеличивается на 1 и выполняется шаг 2.

ШАГ 4. Во множествах $\{\mu_{sp}^{*r=1}, \mu_{sp}^{*r=2}, \dots, \mu_{sw}^{*r=n}\}$ выделяется путь максимальной длины, и алгоритм A_1 заканчивает работу.

Экспериментальное сравнение алгоритма A_1 и известными. Для проведения экспериментального исследования в качестве эталонов выбираются аддитивный алгоритм Балаша [2] и алгоритм динамического программирования (ДП) [3], имеющий временную сложность $O(cn^2)$, где c – абсолютное значение функционала (1).

В ходе экспериментального исследования на ЭВМ с помощью датчика случайных чисел генерировались коэффициенты c_j , $j = (1, n)$ в функционале в диапазоне $1 \div 50$ и a_j – в ограничениях в диапазоне $1 \div 10$. Величина коэффициента b в (2) задавалась в диапазоне $1 \div 100$. Данные диапазоны являются наилучшими для алгоритма ДП [3]. Для остальных алгоритмов этот параметр несущественен.

Как оказалось, количественные значения числа элементарных операций (ЭО) существенно зависят от ранга r_{cp} получаемого решения, который определяет число единиц в оптимальном решении. Это подтверждает и табл. 1, в которой представлена зависимость математического ожидания (МО) числа ЭО от размера входного параметра n (размерности задачи) и от r_{cp} . Условно при $n = \text{const}$ диапазон изменения r_{cp} можно разбить на три зоны: 1 зона – $r_{cp} = [1 \div n/3]$; 2 зона – $r_{cp} = [n/3 \div 2n/3]$; 3 зона – $r_{cp} = [2n/3 \div n]$.

При попадании оптимального решения в первую зону для задач небольшой размерности ($n < 20$) с точки зрения времени решения наиболее эффективными являются алгоритмы Балаша и ДП (для

этого алгоритма добавляется условие малого абсолютного значения функционала).

Таблица 3

Зависимость МО числа ЭО от n

n	r_{cp}	ЭО D	ЭО A_1	ЭО ДП
10	3	454	503	414
	5	1258	781	1076
	8	325	927	3122
15	3	1342	922	1885
	5	4285	1720	2415
	8	7872	2444	3982
	10	5634	2880	6327
20	12	2284	3128	9870
	5	4771	1450	8921
	10	52127	7975	18825
	15	12192	10191	37242
	18	4504	11291	51248

В случае, когда $n > 30$ и оптимальное решение попадает в первую зону, эффективнее применять алгоритм A_1 . Во второй зоне для алгоритма Балаша наблюдается экспоненциальный рост числа ЭО. В этом случае наиболее эффективным алгоритмом является алгоритм A_1 . В третьей зоне экспоненциальный рост числа ЭО уже наблюдается для алгоритма ДП, а наиболее предпочтительным является алгоритм Балаша. Таким образом, предлагаемый алгоритм имеет лучшие временные показатели во второй условно выделенной зоне.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Во-первых, временная сложность точных алгоритмов для решения задачи (1)-(2) зависит от принадлежности оптимального решения к какой-либо зоне. Во-вторых, для таких алгоритмов существует хотя бы одна зона, в которой наблюдается экспоненциальный рост выполняемых ЭО, зависящих от количества обрабатываемых допустимых решений. Принадлежность к выделенной зоне определяется количеством единиц в оптимальном решении.

Выводы

Применение предложенных стратегий позволит увеличить размерность решаемой задачи (1)-(2) не нарушая ее оптимальности, особенно в тех случаях, когда оптимальное решение принадлежит второй условно выделенной зоне. Наиболее существенный выигрыш в быстродействии достигается при использовании алгоритма A_1 совместно с приближенными алгоритмами [1], когда на первых этапах с полиномиальной временной сложностью отыскивается приближенное решение с погрешностью менее 5%, а затем с учетом величины имеющегося допустимого решения отыскивается оптимальное алгоритмом A_1 .

Список литературы

1. Королев А.В. Эффективность параллельных алгоритмов оптимизации вычислительного процесса / А.В. Королев, С.В. Листровой, В.Ф. Третьяк // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. – 1997. – № 1. – С. 85-91.

2. Калинин В.Н. Теория систем и оптимального управления. Ч. 2. Понятия, модели и алгоритмы оптимального выбора / В.Н. Калинин, Б.А. Резников, Е.И. Варакин. – М: СССР, 1987. – 590 с.

3. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 512 с.

Поступила в редколлегию 18.06.2009

Рецензент: д-р техн. наук, с.н.с. В.В. Баранник, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

**МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ
З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ НА ОСНОВІ РАНГОВОГО ПІДХОДУ**

Д.Ю. Голубничий, В.В. Огурцов, В.Ф. Третяк

Розглянуто метод рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними на основі рангового підходу. Наведено результати експериментального дослідження.

Ключові слова: цілочисельне лінійне програмування, ранговий підхід.

**METHOD FOR DECISION OF TASK OF INTEGER LINEAR PROGRAMMING
WITH BOOLE VARIABLES ON BASIS OF GRADE APPROACH**

D.Yu. Golubnichiy, V.V. Ogurtsov, V.F. Tret'yak

The method decision of task of the integer linear programming with boole variables on the basis of grade approach. The results research of the developed algorithms are resulted.

Keywords: integer linear programming, grade approach.