УДК 681.324

Д.Ю. Голубничий[1], В.В. Огурцов[2], В.Ф. Третьяк[1]

[1]*Харковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков*
[2]*Харьковский национальный экономический университет, Харьков*

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ НА ОСНОВЕ РАНГОВОГО ПОДХОДА

Рассмотрено метод решения задачи целочисленного линейного программирования с булевыми переменными на основе рангового подхода. Результаты экспериментального исследования показали, что наиболее существенный выигрыш в быстродействии достигается при использовании алгоритма A_1 совместно с приближенными алгоритмами, когда на первых этапах с полиномиальной временной сложностью отыскивается приближенное решение с погрешностью менее 5%, а затем с учетом величины имеющегося допустимого решения отыскивается оптимальное алгоритмом A_1 .

Ключевые слова: *целочисленное линейное программирование, ранговый поход.*

Введение

Постановка проблемы. В ряду научно-технических направлений, в наибольшей мере влияющих сегодня на прогресс в области передачи, приема и обработки информации, обработка данных (ОД) занимает одно из первых мест.

Аппаратура связи, обработки и передачи данных, средства гидро- и радиолокации, управления оружием и агрегатами, автомобильная электроника и авиация, измерительная техника, приборы контроля за состоянием объектов и окружающей среды, радиовещания, высококачественное воспроизведение звука, компьютерные технологии – вот далеко не полный перечень приложений, где методы и средства ОД обеспечивают принципиально новое качество.

Определяющим в упомянутых приложениях является требование обработки информации в масштабе реального времени.

В работе приводится алгоритм решения задачи целочисленного линейного программирования с булевыми переменными на основе рангового подхода.

Основнаяячасть

В настоящее время получили довольно широкое распространение задачи об оптимальном наборе объектов при ограничении на расход ресурсов. Данные задачи в комбинаторной оптимизации относятся к типу задач о ранце, простейшая формальная модель которых имеет следующий вид. Требуется максимизировать:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \le b,\ \ x_j \in \{0,1\}, c_j > 0,\ a_j > 0,\ b > 0. \tag{2}$$

В виду экспоненциальной сложности задачи представляется актуальной разработка эффективных методов и алгоритмов на их основе для получения ее точного решения. Поэтому рассматривается возможность применения рангового подхода [1] к решению задачи (1), (2).

В основу решения задачи (1)-(2) положена модель, представляющая n-мерный единичный куб решения задачи (1)-(2) в виде графа DΔ [1]. Построение путей следующего ранга в графе DΔ строится с учетом оптимизации по направлению. Под оптимизацией по направлению в графе DΔ к вершине p понимается формирование множеств $m_{sp}^{r=r+1}$ следующего ранга, которые получаются за счет выделения в m_{sj}^{r} путей, подсоединение к которым ребра (j,p) позволит в множестве $m_{sp}^{r=r+1}$ получить пути, удовлетворяющие некоторым правилам $\{L_w\}$ на основе рекуррентного соотношения

$$\forall \left(\mu_{sj}^{r} \in m_{sj}^{r}\right) \left[\mu_{sp}^{r=r+1} = L_w\left\{\mu_{sj}^{r} \cup (i,p)\right\}\right]; \quad p = \overline{r+1,n};\ j = \overline{r,n}, \tag{3}$$

где $m_{sj}^{r} \cup (j,p)$ – путь из вершины s графа DΔ в вершину p, проходящий через промежуточную вершину j и удовлетворяющий правилам $\{L_w\}$, т.е. получаемый за счет подсоединения к пути μ_{sj}^{r} ребра (j,p), если такое соединение не противоречит правилам $\{L_w\}$.

Таким образом, необходимо построить такие стратегии $\{L_w\}$ формирования множеств путей в графе DΔ, которые позволили бы уменьшить временную сложность решения задачи, не нарушая ее оптимальность.

Наиболее важной стратегией $\{L_1\}$ является правило, основанное на понятии выделения коридора в множестве m_{sj}^{r}. С целью упрощения изложения материала наложим на функционал (1) ограничения

$$c_1 \geq c_2 \geq ..... \geq c_n \geq 0\,, \qquad (4)$$

т.е. отсортируем коэффициенты в функционале (1) в порядке убывания. Тогда в соответствии с (3) в построенных множествах каждого ранга пути окажутся также отсортированными в порядке невозрастания длины по весам функционала. Длина каждого пути по весу функционала $d_c\left(\mu_{sj}^{r}\right)$ определяет значение функционала (1) в верши нах единичного куба B^n. Длина по весам ограничений $d_a\left(\mu_{sj}^{r}\right)$ определяет соответствует ли данная вершина B^n ограничениям (2), то есть принадлежит вершина n-мерного единичного куба B^n гиперплоскости (2). Если $d_a\left(\mu_{sj}^{r}\right) \leq b$, то вершина принадлежит гиперплоскости (2) и будем говорить, что путь m_{sj}^{r} удовлетворяет свойству ν.

Сформулируем в виде теоремы правило, определяющее стратегию $\left\{L_1\right\}$, и позволяющее в множестве m_{sj}^{r} выделить путь $\overline{\mu}_{sj}^{r}$ с длиной $d_c\left(\overline{\mu}_{sj}^{r}\right)$, по отношению к которому все пути с меньшим значением длины по весам функционала исключаются из множества допустимых как неоптимальные.

Теорема 1. В сформированных множествах ранга r пути, у которых длина по весам функционала $d_c\left(\mu_{sj}^{r}\right)$ меньше длины пути по весам функционала с минимальной длиной по весам ограничений $d_a\left(\mu_{sj}^{r}\right)$, не могут определять оптимальное решение задачи (1) – (2).

Доказательство. Предположим, что на основе пути μ_{sj}^{*r} из множества m_{sj}^{r}, у которого длина $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right)$ меньше, нежели длина пути по весам функционала с минимальной длиной по весам ограничений $d_a\left(\mu_{sj}^{r}\right)$, удалось построить оптимальное решение задачи (1)-(2). Тогда в множества $m_{sp}^{r=r+1}$, $p=\left(\overline{1,n}\right)$ следующего ранга должен попасть путь и минимальный по весам ограничений, ведь он тем более будет удовлетворять свойству ν. Однако, длина по весам функционала у такого пути будет больше, нежели чем у μ_{sj}^{*r} и, следовательно, предположение о существовании μ_{sj}^{*r} неверно, а этот путь исключить из дальнейшего анализа, что и требовалось доказать.

Теорема 1 позволяет определить понятие коридора.

Определение. Под одномерным коридором из множества m_{sj}^{r} в множество $m_{sp}^{r=r+1}$ будем понимать совокупность путей μ_{sj}^{r}, находящихся между верхней границей множества m_{sj}^{r} и его нижней границей, удовлетворяющих свойству ν в множестве $m_{sp}^{r=r+1}$. Верхняя граница в m_{sj}^{r} определяется путем с максимальной длиной по весам функционала $d_c\left(\mu_{sj}^{r}\right)$, а нижняя – путем с минимальной длиной по весам ограничений $d_{€}\left(\mu_{sj}^{r}\right)$.

Рассмотрим правило $\left\{L_2\right\}$ фильтрации неперспективных путей внутри выделенного коридора, определяемого теоремой 2.

Теорема 2. Если в коридоре существуют два пути $\mu_{sj}^{*r} \in m_{sj}^{r}$ и $\mu_{sj}^{**r} \in m_{sj}^{r}$, для которых $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \geq d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$; $d_a\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \geq d_a\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$, то вектор $\vec{X}$, соответствующий пути μ_{sj}^{**r}, не может являться оптимальным решением задачи (1)-(2).

Доказательство. Предположим, что на основе пути μ_{sj}^{**r} можно построить оптимальное решение. Последнее означает, что на последующих рангах путь μ_{sj}^{**r} наберет большее значение по весам функционала, нежели путь μ_{sj}^{*r}, т.е. $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \leq d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. Но путь μ_{sj}^{*r} может быть построен в тоже множество m_{sj}^{r}, что и путь m_{sj}^{**r}, как удовлетворяющий свойству ν, но имеющий длину $d_a\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \leq d_a\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. При этом по весам функционала к этому моменту путь μ_{sj}^{*r} имеет длину большую, чем путь μ_{sj}^{**r}. Следовательно, каждый из них наберет одну и ту же величину по весам функционала, но $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \geq d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$.

Значит, предположение о том, что на основе пути μ_{sj}^{**r} можно построить оптимальное решение не верно, следовательно теорема 2 доказана.

Алгоритм решения задачи. Рассмотрим алгоритм A_1 решения задачи, реализующий предложенные стратегии $\left\{L_1\right\}$ и $\left\{L_2\right\}$, пошаговое описание которого имеет следующий вид.

ШАГ 1. Из вершины s строятся множества путей $\left\{\mu_{sj}^{r=1}\right\} j=\overline{1,n}$ удовлетворяющих свойству ν, и определяются в множествах $m_{sj}^{r=1}$ пути максимальной длины $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right)$ по весам функционала.

ШАГ 2. Формируются множества путей $m_{sp}^{r=r+1}\, p=\overline{r+1,n}$, следующего ранга, удовлетворяющие свойству ν, на базе множеств путей m_{sj}^{r} предыдущего ранга на основе принципа оптимизации по направлению (3) с выделением коридора по стратегии $\{L_1\}$ и исключением векторов внутри коридора в соответствии со стратегией $\{L_2\}$. Путь в множестве $m_{sp}^{r=r+1}$ может быть сформирован, если он удовлетворяет свойству ν. Если свойство ν не выполняется, то путь исключается из дальнейшего анализа. В образованных множествах $m_{sp}^{r=r+1}$ выделяются самые длинные пути $\{\mu_{sj}^{*r=r+1}\}$ по весам функционала.

ШАГ 3 . Проверяется, все ли множества путей следующего, (r+1)-го, ранга пустые. Если это так, то осуществляется переход к шагу 4, если нет, то проверяется: r = (n–1). В случае выполнения равенства также осуществляется переход к шагу 4, иначе r увеличивается на 1 и выполняется шаг 2.

ШАГ 4. Во множествах $\left\{\mu_{sp}^{*r=1}, \mu_{sp}^{*r=2}, .., \mu_{sw}^{*r=n}\right\}$ выделяется путь максимальной длины, и алгоритм A_1 заканчивает работу.

Экспериментальное сравнение алгоритма А1 и известными. Для проведения экспериментального исследования в качестве эталонов выбираются аддитивный алгоритм Балаша [2] и алгоритм динамического программирования (ДП) [3], имеющий временную сложность $O(cn^2)$, где c – абсолютное значение функционала (1).

В ходе экспериментального исследования на ЭВМ с помощью датчика случайных чисел генерировались коэффициенты c_j j = (1,n) в функционале в диапазоне 1 ÷50 и a_j – в ограничениях в диапазоне 1÷10. Величина коэффициента b в (2) задавалась в диапазоне 1÷100. Данные диапазоны являются наилучшими для алгоритма ДП [3]. Для остальных алгоритмов этот параметр несущественен.

Как оказалось, количественные значения числа элементарных операций (ЭО) существенно зависят от ранга r_{cp} получаемого решения, который определяет число единиц в оптимальном решении. Это подтверждает и табл. 1, в которой представлена зависимость математического ожидания (МО) числа ЭО от размера входного параметра n (размерности задачи) и от r_{cp}. Условно при n = const диапазон изменения r_{cp} можно разбить на три зоны: 1 зона – r_{cp} = [1÷ n/3]; 2 зона – r_{cp} = [n/3 ÷2n/3]; 3 зона – r_{cp} = [2 n/3 ÷ n].

При попадании оптимального решения в первую зону для задач небольшой размерности (n < 20) с точки зрения времени решения наиболее эффективными являются алгоритмы Балаша и ДП (для этого алгоритма добавляется условие малого абсолютного значения функционала).

Таблица 3

Зависимость МО числа ЭО от n

n	r_{cp}	ЭО D	ЭО A_1	ЭО ДП
10	3	454	503	414
	5	1258	781	1076
	8	325	927	3122
15	3	1342	922	1885
	5	4285	1720	2415
	8	7872	2444	3982
	10	5634	2880	6327
	12	2284	3128	9870
20	5	4771	1450	8921
	10	52127	7975	18825
	15	12192	10191	37242
	18	4504	11291	51248

В случае, когда n > 30 и оптимальное решение попадает в первую зону, эффективнее применять алгоритм A_1.Во второй зоне для алгоритма Балаша наблюдается экспоненциальный рост числа ЭО. В этом случае наиболее эффективным алгоритмом является алгоритм A_1. В третьей зоне экспоненциальный рост числа ЭО уже наблюдается для алгоритма ДП, а наиболее предпочтительным является алгоритм Балаша. Таким образом, предлагаемый алгоритм имеет лучшие временные показатели во второй условно выделенной зоне.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Во-первых, временная сложность точных алгоритмов для решения задачи (1)-(2) зависит от принадлежности оптимального решения к какой-либо зоне. Во-вторых, для таких алгоритмов существует хотя бы одна зона, в которой наблюдается экспоненциальный рост выполняемых ЭО, зависящих от количества обрабатываемых допустимых решений. Принадлежность к выделенной зоне определяется количеством единиц в оптимальном решении.

Выводыя

Применение предложенных стратегий позволит увеличить размерность решаемой задачи (1)-(2) не нарушая ее оптимальности, особенно в тех случаях, когда оптимальное решение принадлежит второй условно выделенной зоне. Наиболее существенный выигрыш в быстродействии достигается при использовании алгоритма A_1 совместно с приближенными алгоритмами [1], когда на первых этапах с полиномиальной временной сложностью отыскивается приближенное решение с погрешностью менее 5%, а затем с учетом величины имеющегося допустимого решения отыскивается оптимальное алгоритмом A_1 .

Списокялитературыя

1. Королев А.В. Эффективность параллельных алгоритмов оптимизации вычислительного процесса / А.В. Королев, С.В. Листровой, В.Ф. Третьяк // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. – 1997. – № 1. – С. 85-91.

2. Калинин В.Н. Теория систем и оптимального управления. Ч. 2. Понятия, модели и алгоритмы оптимального выбора / В.Н. Калинин, Б.А. Резников, Е.И. Варакин. – МО СССР, 1987. – 590 с.

3. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 512 с.

Поступила в редколлегию 18.06.2009

Рецензент: д-р техн. наук, с.н.с. В.В. Баранник, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ НА ОСНОВІ РАНГОВОГО ПІДХОДУ

Д.Ю. Голубничий, В.В. Огурцов, В.Ф. Третяк

Розглянуто метод рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними на основі рангового підходу. Наведено результати експериментального дослідження.

Ключові слова: *цілочисельне лінійне програмування, ранговий підхід.*

METHOD FOR DECISION OF TASK OF INTEGER LINEAR PROGRAMMING WITH BOOLE VARIABLES ON BASIS OF GRADE APPROACH

D.Yu. Golubnichiy, V.V. Ogurtsov, V.F. Tret'yak

The method decision of task of the integer linear programming with boole variables on the basis of grade approach. The results research of the developed algorithms are resulted.

Keywords: *integer linear programming, grade approach.*