

УДК 623.4.011

А.Б. Скорик, А.С. Кирилук, О.Ф. Галицкий

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗЕНИТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ РАКЕТ. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ ЗУР

*В статье рассматриваются вопросы построения математической модели контура наведения зенитных управляемых ракет. Приводится пример построения структурной схемы контура наведения, реализующего «классическое» пропорциональное управление по угловой скорости линии дальности. Рассмотрены условия, при которых пропорциональный метод наведения считается оптимальным. Исследуется модель кинематического звена, используемого в структурной схеме контура наведения, реализующего модифицированный (оптимальный) метод пропорционального сближения.*

**Ключевые слова:** контур наведения, модель кинематического звена, пропорциональный метод наведения, условия оптимальности метода наведения.

### Введение

**Постановка проблемы и анализ литературы.** Теория управления движением, которая все чаще называется теорией наведения, возникла как одно из направлений общей теории управления. Одной из важнейших задач теории наведения является изучение информационных процессов, протекающих в контуре наведения ракеты. В настоящее время существует ряд проблемных вопросов преподавания теории наведения ЗУР [1, 2]. Одним из способов преодоления этих проблем есть использование в учебном процессе математических моделей систем наведения зенитных ракет. Роль математического моделирования при изучении современных систем оружия трудно переоценить. Вместе с тем в отечественной литературе крайне мало работ, посвященных моделированию контуров наведения современных ракет и анализу современных методов наведения. В учебной литературе [3, 4] рассматриваются только классические варианты построения систем

наведения. Системы самонаведения с радиокоррекцией, в которых используется модифицированный метод пропорционального сближения, в учебной литературе практически не рассматриваются, хотя такие системы давно состоят на вооружении. При разработке математических моделей зенитных ракет, предназначенных для анализа практических пусков в войсках и использования в учебном процессе, очень ценным будет использование опыта разработки соответствующих моделей в процессе проектирования систем наведения [5 – 7].

**Цель статьи.** Анализ задачи моделирования контура наведения современных зенитных ракет, использующих модифицированный метод пропорционального сближения.

### Основной материал

Сложность динамических процессов, протекающих в контуре наведения, наличие ряда ограничений на управление требует при моделировании решения систем нелинейных дифференциальных

уравнений высокого порядка. Однако моделирование остается только экспериментом. А только теория способна дать необходимый уровень обобщения [5, 6]. Поэтому при анализе систем наведения мы будем использовать два подхода к созданию моделей. Первоначально будем исследовать математическую модель, поддающуюся математическому анализу и учитывающую главную специфику контура наведения, а именно метод наведения. В дальнейшем функционирование систем наведения ракет, реализующих выбранный метод наведения, исследуем с помощью имитационно-моделирующих программ, максимально полно отражающих функционирование реальных систем наведения ракет.

Относительное движение ракеты и цели в каждый момент времени удобно характеризовать векторами дальности  $\vec{R}(t)$ , относительной скорости  $\vec{V}(t)$  и относительного ускорения  $\vec{J}(t) = \vec{J}_ц - \vec{J}_р$  (рис. 1).

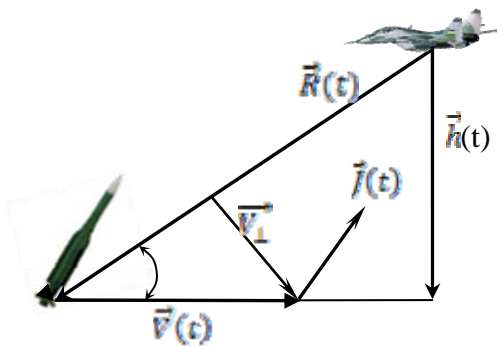


Рис. 1. Кинематика относительного движения ракеты и цели

Независимо от начальных условий в каждом полете модуль вектора дальности имеет минимум. Кратчайшее расстояние между ракетой и целью принято называть пролетом  $\vec{h}(t)$  (или промахом).

Процессом наведения называется прогнозирование пролета  $\vec{h}(t)$  и управление ракетой, обеспечивающего его уменьшение. Система наведения должна обеспечить измерение пролета и направить вектор относительного ускорения  $\vec{J}$  навстречу вектору пролета. Увеличение текущего пролета достигается таким маневром цели, при котором проекция ускорения  $\vec{J}$  на направление пролета положительна. Структурная схема типового контура наведения показана на рис. 2.

В теории наведения [6] контур наведения представляется системой стабилизации, в которой в качестве объекта регулирования рассматривается кинематическое звено (КЗ). На КЗ воздействует возмущение  $\vec{J}_ц$  и управление  $\vec{J}_р$ . Стабилизируемой координатой является пролет  $\vec{h}(t)$ . Часто на борту ракеты не удастся измерить пролет, а измеряется

другая координата, которая используется для оценки пролета. С этой целью в контур наведения вводится звено формирования измеряемой величины (ФИБ). Информационное устройство осуществляет измерение координат с ошибкой  $\Psi$ . Бортовой вычислитель (вычислительное и корректирующее звенья) формирует управляющее воздействие (заданное ускорение  $J^*$ ), которое через исполнительное устройство (контур стабилизации) подается на объект регулирования. Контур стабилизации, задачей которого является воспроизведение с наилучшей точностью заданного ускорения  $J^*$ , подвержен воздействию возмущений, приложенных к ракете или автопилоту. Та часть возмущений, которая не подавляется автопилотом, является «ложной составляющей» в ускорении ракеты  $\vec{J}_р$  и воздействует на систему подобно маневру цели. Информационное звено, БВ и контур стабилизации часто объединяют в единый автономный контур.

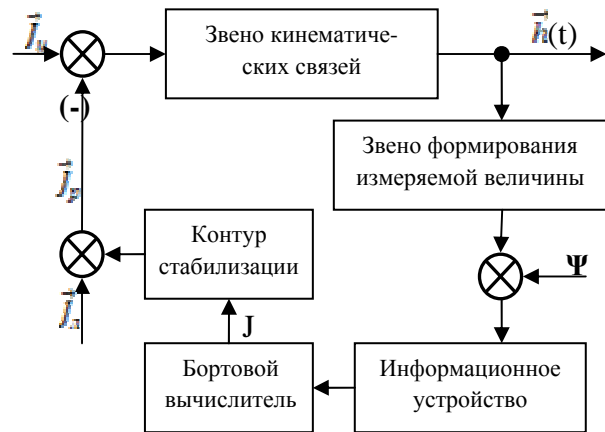


Рис. 2. Структурная схема контура наведения

Кинематическое звено в системах самонаведения определяет в пространстве выбранной системы координат кинематические связи между ракетой и целью. В общем случае КЗ является сложным нелинейным и нестационарным объектом. Линеаризация кинематических зависимостей осуществляется с использованием ряда допущений и ограничений. Имеется большое количество вариантов описания кинематического звена. В ставших классическими системах самонаведения управление осуществляется по угловой скорости линии дальности  $\vec{\omega}(t)$ . Управляющее ускорение рассчитывается относительно линии дальности, а не линии относительной скорости в предположении постоянства скорости сближения  $\dot{R}$ . Такое управление будет эффективным если угол между векторами  $\vec{R}(t)$  и  $\vec{V}(t)$  (рис. 1) небольшой, т.е. выполняется условие:

$$h < R. \tag{1}$$

Для рассмотренных условий линеаризованное кинематическое звено может быть записано в следующем виде [4]:

$$R\dot{\omega} - 2IR\dot{\omega} = J_{\omega} - J_p. \quad (2)$$

Выражение для мгновенного промаха имеет вид:

$$h = \omega \cdot \frac{R^2}{V}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что угловая скорость линии дальности позволяет измерять пролет с переменным масштабом: чем ближе ракета к цели, тем крупнее масштаб. Это свойство угловой скорости и используется в пропорциональном методе наведения:

$$\lambda_p = k_H \cdot \omega, \quad (4)$$

где  $\lambda_p$  – команда управления ракетой;  $k_H$  – коэффициент навигации.

Структурная схема контура наведения, реализующая управление (4) представлена на рис. 3. Автономный контур наведения, связывающий нормальное ускорение ракеты  $J_p$  с угловой скоростью ЛВЦ  $\dot{\omega}(t)$  описывается передаточной функцией вида [4]:

$$K_a(\delta) = J_{\delta}(\delta) / \omega(\delta) = \frac{k_{\delta\ddot{\omega}} k_{\dot{\omega}} k''_{pw}}{(1 + pT_{\delta\ddot{\omega}})(1 + pT_{\dot{\omega}})(1 + 2\xi'\dot{\omega}\delta + \dot{\omega}^2\delta^2)}. \quad (5)$$

В современной теории оптимального управления для оценки качества функционирования систем автоматического управления широкое применение находит квадратичный функционал [7]:

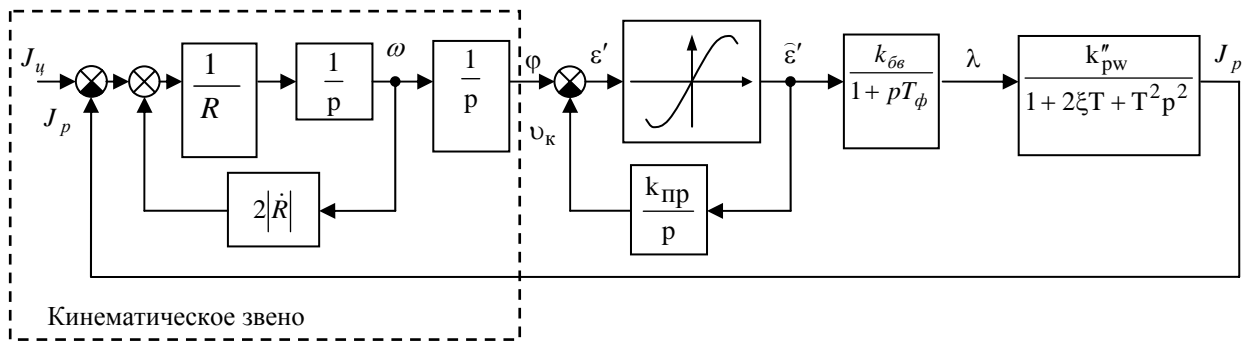


Рис. 3. Структурная схема контура наведения реализующего пропорциональное управление по угловой скорости линии дальности

$$I(x, x_{tk}, u, t_k) = M_y \left\{ \begin{aligned} & [x(t_k) - x_{tk}(t_k)]^T \tilde{A}(t_k) [x(t_k) - x_{tk}(t_k)] + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} [x(\tau) - x_{tk}(\tau)]^T L(\tau) [x(\tau) - x_{tk}(\tau)] d\tau + \int_{t_0}^{t_k} u(\tau)^T K^{-1} u(\tau) d\tau \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где  $x(t)$  – вектор состояния объекта управления;  $x_{tk}$  – требуемый вектор состояния объекта в конечный (терминальный) момент наведения;  $u(t)$  – вектор управления.

Символ  $M_y$  – означает операцию определения условного математического ожидания функционала  $I(x, x_{tk}, u, t_k)$  на интервале  $t_k - t_0$ .

Первое слагаемое характеризует отклонение состояния объекта управления от требуемых значений в конце самонаведения ракеты. Если  $\tilde{A}(t_k)$  – единичная матрица, то первое слагаемое оптимизирует среднеквадратичную ошибку самонаведения в момент встречи ракеты с целью ( $t = t_k$ ).

Второе слагаемое имеет смысл обобщенной интегральной оценки качества переходных процессов. В теории наведения интегральная оценка качества переходных процессов обеспечивает задание требований к траектории самонаведения.

Третье слагаемое характеризует затраты на управление, представляя собой интегральную квадратичную оценку вектора управления  $u(t)$ . При единичной матрице  $K$  третье слагаемое будет иметь вид

$M_y \left\{ \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^{t_k} u_i^2(\tau) d\tau \right\}$ , что, по существу, определяет среднюю энергию вектора управления.

Если не накладывать требований на траекторию наведения а стремиться только к уменьшению конечного промаха и стараться минимизировать затраты на управление, то функционал качества можно записать в виде:

$$I = M_y \left\{ \tilde{A}_1 \omega^2(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} J_p(\tau) d\tau \right\}. \quad (7)$$

В теории наведения найдено оптимальное управление для объекта управления (2) и функционала (7). Оптимальный закон наведения имеет вид:

$$J_p = 3\dot{R}\dot{\omega} + 1,5 \cdot \tilde{J}_{\omega}. \quad (8)$$

Применение ПМН в (8) приводит к тому, что в качестве управляющего принимается уже не угловая скорость вращения ЛВЦ, а величина  $\dot{R} \cdot \dot{\omega}$ , что изменяет свойства системы наведения.

Для дальнейшего рассмотрения преобразуем уравнение (2) в более удобный вид в соответствии с

методикой, изложенной в [6]. Дальность можно записать в виде:

$$R(t) = \dot{R}I(t_0 - t), \tag{9}$$

где  $t_0$  – прогнозируемое время наведения;  
 $t_0 - t$  – упрежденное время.

С учетом (9) выражения для (2) будет иметь вид:

$$\dot{R}I\dot{\omega}(t_0 - t) - 2\dot{R}I\omega = J_{ц} - J_{п}. \tag{10}$$

Выражение (10) можно заменить эквивалентным:

$$\dot{R}I[\omega(t_0 - t)]' - \dot{R}I\omega = J_{ц} - J_{п}. \tag{11}$$

Проинтегрировав левую и правую части (3) в предположении  $\dot{R}I = \text{const}$ , получим:

$$\dot{R}I\dot{\varepsilon}(t_0 - t) - \dot{R}I\Delta\varepsilon = \dot{L}, \tag{12}$$

где

$$\dot{\varepsilon} = \omega; J = J_{ц} - J_{п};$$

$$\Delta\varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} du + \Delta\varepsilon(0);$$

$$\dot{L} = \int_0^t J du + \dot{L}(0).$$

Соответствующая схема кинематического звена показана на рис. 4.

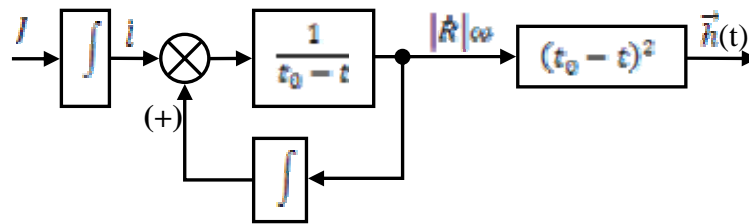


Рис. 4. Структурная схема кинематического звена

В случае, если относительная скорость  $\vec{v}(t)$  не совпадает с линией дальности (рис.1), то существует некоторая ортогональная скорость

$$V_{\perp} = R\omega,$$

которая вызывает вращение ЛВЦ [2].

Дифференцируя  $V_{\perp}$ , получим:

$$(V_{\perp})' = N_{\perp} = R\dot{\omega} - \dot{R}I\omega. \tag{13}$$

С учетом (13) выражение (2) будет иметь вид:

$$N_{\perp} = \dot{R}I\omega + J_{ц} - J_{п}. \tag{14}$$

Выражение для КЗ в форме (14) хорошо отражает физическую сущность наведения.

Линия визирования цели вращается с ускорением  $N_{\perp}$ .

Обнуляя это ускорение путем регулирования  $J_{п}$  можно обеспечить регулирование промаха.

При этом закон наведения должен компенсировать ускорение цели и ускорение, определяемое текущим пролетом, что и реализовано в оптимальном законе наведения (8). Передаточную функцию автономного контура наведения (5) можно представить в виде:  $K_a(p) = K_a W(p)$ .

Очевидно, что передаточная функция  $W(p)$  обладает свойством

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = 1.$$

Если время самонаведения на порядок превышает постоянную времени автономного контура, то оператор автономного контура может быть заменен постоянным коэффициентом усиления. Контур наведения для оптимального закона наведения (8) и КЗ в форме (12) может быть приведен к виду, представленному на рис. 5.

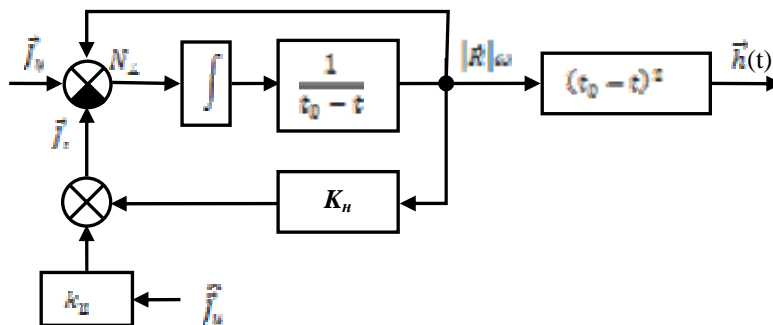


Рис. 5. Структурная схема контура наведения для оптимального метода наведения

Кинематическое звено на рис. 5 преобразовано из КЗ на рис. 4 путем переноса точки суммирования. В современных системах наведения [5] реализованы законы наведения, сходные по своей структуре с законом наведения (8):

$$J_p = K(\tau)(\dot{R}\omega + K_{рн}J_{рн} + K_{ц} \Delta J_{ц} + K_q q), \quad (15)$$

где  $K_{рн}J_{рн}$ ,  $K_{ц} \Delta J_{ц}$ ,  $K_q q$  – составляющие, компенсирующие продольное ускорение ракеты, маневр цели и силу тяжести.

Продольное ускорение ракеты и сила тяжести, также как и маневр цели, являются возмущениями, воздействующими на контур наведения. Результирующий вектор относительного ускорения  $\vec{J}$ , как правило, не удается направить по пролету (рис. 1).

Однако, принимая во внимание, что проекция ускорения на относительную скорость влияет на время самонаведения и учитывается в терминальных системах наведения, то в рассматриваемой модели она не оказывает вредного влияния на процесс наведения.

Суммарная составляющая возмущений, воздействующих на контур наведения, направленная по пролету, в модели может быть введена в состав нормального ускорения цели  $\vec{J}_{ц}$  и соответственно в измеренное значение  $\hat{J}_{ц}$ .

Что характерно, именно такой подход реализуется в некоторых системах самонаведения.

Отличительной особенностью модели контура наведения (рис. 5) является ее простота.

## Вывод

В статье рассмотрены вопросы построения математической модели контура наведения ЗУР. Полученные результаты дают достаточно хорошее представление о процессах в системе наведения ЗУР и могут быть использованы в качестве учебного материала.

## Список литературы

1. Скорик А.Б. Проблемные вопросы изучения принципов построения зенитных управляемых ракет и стрельбы ЗУР / А.Б. Скорик, С.В. Ольховиков, А.С. Кирилук // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС. – 2008. – Вип. 5 (72). – С. 111-115.
2. Скорик А.Б. Актуальні питання викладання методів наведення ЗКР під час підготовки офіцерів ЗРВ / А.Б. Скорик, А.С. Кирилук, О.Ф. Галицький // Навчально-виховний процес: Методика, досвід, проблеми. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 3-4 (109-110). – С. 34-41.
3. Неупокоев Ф.К. Стрельба зенитними ракетами / Ф.К. Неупокоев. – М.: Воениздат, 1991. – 274 с.
4. Довідник з протиповітряної оборони // Торочин А.Я., Романенко І.О., Даник Ю.Г., Пащенко Р.Е. – К.: МО України, 2003. – 368 с.
5. Проектирование зенитных управляемых ракет / Под ред. И.С. Голубева, В.Г. Светлова. – М.: МАИ, 1999. – 728 с.
6. Проектирование систем наведения / Под ред. Е.А. Федосова. – М.: Машиностроение, 1975. – 296 с.
7. Максимов М.В. Радиоэлектронные системы самонаведения / М.В. Максимов, Г.И. Горгонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 304 с.

Поступила в редколлегию 4.06.2009

**Рецензент:** д-р воен. наук, проф. Г.М. Дробаха, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗЕНІТНИХ КЕРОВАНИХ РАКЕТ. АНАЛІЗ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТУРА НАВЕДЕННЯ ЗКР

А.Б. Скорик, А.С. Кирилук, О.Ф. Галицький

*У статті розглядаються питання побудови математичної моделі контура наведення зенітних керованих ракет. Наводиться приклад побудови структурної схеми контура наведення, що реалізує «класичне» пропорційне керування за кутовою швидкістю лінії дальності. Розглянуті умови, при яких пропорційний метод наведення вважається оптимальним. Досліджується модель кінематичної ланки, що використовується в структурній схемі контура наведення, який реалізує модифікований (оптимальний) метод пропорційного зближення.*

**Ключові слова:** контур наведення, модель кінематичної ланки, пропорційний метод наведення, умови оптимальності методу наведення.

### MATHEMATICAL DESIGN OF THE ZENITHAL GUIDED ROCKETS. ANALYSIS OF TASK OF DESIGN OF CONTOUR OF AIMING OF ZGR

A.B. Skorik, A.S. Kirilyuk, O.F. Galytsky

*The questions of construction of mathematical model of contour of aiming of the zenithal guided rockets are examined in the article. An example of construction of flow diagram of contour of aiming, realizing a «classic» proportional management on the angular speed of line of distance is made. Terms at which the proportional method of aiming is considered optimum are examined. The model of kinematics link, in-use in the flow diagram of contour of aiming, realizing the modified (optimum) method of proportional rapprochement is researched.*

**Keywords:** aiming contour, model of kinematics link, proportional method of aiming, terms of optimality of aiming method.