УДК 519.85

И.А. Чуб[1], М.В. Новожилова[2]

[1] *Университет гражданской защиты Украины, Харьков*
[2] *Харьковский технический университет строительства и архитектуры, Харьков*

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВИЙ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Проведено исследование оптимизационной задачи размещения многоугольных неориентированных объектов в полосе, предложена линеаризация функций ограничений области допустимых решений. Данный подход является основой для построения информационной технологии решения рассматриваемого класса оптимизационных задач.

Ключевые слова: *оптимизация, размещение, геометрический объект, линеаризация.*

Введение

Постановка проблемы. Оптимизационные задачи размещения конечного набора неориентированных многоугольных геометрических объектов размещения в заданной многоугольной области, когда над объектами допускаются аффинные преобразования трансляции и поворота, широко распространены в практической деятельности. К задачам такого рода относятся, например, задачи раскроя изотропного материала (металлопрокат, ткань с соответствующими характеристиками, стекло, пластмасса и.т.д.) на многоугольные заготовки. Данная задача принадлежит к классу задач оптимизационного геометрического проектирования [1] и представляет теоретический и практический интерес в силу многообразия частных постановок, сложности математической модели. Эффективные точные методы решения задач практической размерности отсутствуют.

Анализ последних достижений и публикаций по теме исследования показал, что данное научное направление является объектом пристального внимания исследователей, о чем свидетельствует постоянно растущее число публикаций [1 – 3] как в нашей стране, так и за рубежом. По своей постановке данная задача относится к классу многомерных многоэкстремальных задач нелинейного невыпуклого программирования с весьма специфичной областью допустимых решений, что затрудняет или делает невозможным применение классических методов условной оптимизации [4].

Целью статьи является выделение новых свойств области допустимых решений математической модели задачи и построение на этой основе методики линеаризации основных ограничений области допустимых решений.

Основная часть

Пусть есть набор $R=\{R_i\}$, $R_i \subset E^2$, $i=\overline{1,N}$ неориентированных выпуклых многоугольных объектов размещения и полоса
$S_0=\{(x,y)\in E^2 \mid x\in[0,z), y\in[0,W]\}, W=\mathrm{const}, z=\mathrm{var}$.

Пусть также имеется множество областей запрета Ω_c, c=1,2,... C, пространственная форма которых – выпуклый многоугольник.

Тогда область размещения R_0 представляется в виде:

$$R_0=S_0 / \bigcup_{c=1}^{C}\Omega_c . \qquad (1)$$

Объект R_i задается упорядоченным против часовой стрелки набором $\{(x_i^1,y_i^1),(x_i^2,y_i^2),...,(x_i^{n_i},y_i^{n_i})\}$ координат вершин в собственной системе координат $X_iO_iY_i$ $i=\overline{1,N}$.

Положение R_i в общей системе координат XOY, связанной с областью R_0, задается вектором параметров размещения $u_i=(v_i,\varphi_i)=(x_i,y_i,\varphi_i)$, который определяет начало его собственной системы координат $X_iO_iY_i$. При этом компонента $v_i=(x_i,y_i)$ задает трансляцию O_i, а угловой параметр φ_i – поворот $X_iO_iY_i$ (рис. 1).

Задача размещения набора R многоугольных неориентированных объектов R_i, $i=\overline{1,N}$ в области R_0 такова: необходимо разместить N объектов без взаимных наложений в полосе R_0, так, чтобы длина занятой части полосы z была минимальной.

Математическая модель задачи размещения имеет вид: найти:

$$u^*=\underset{u=(u_1,u_2,...,u_N,z)\in D\subset E^{3N+1}}{\arg\min z}, \qquad (2)$$

где $D=D^1\cap D^2\cap D^3$ – множество допустимых решений задачи, подобласть $D^1 \subset E^{3N+1}$ выделяется ограничениями на размещение в полосе S_0, подобласть $D^2 \subset E^{3N+1}$ выделяется условиями взаимного непересечения пар (R_i,Ω_c), подобласть $D^3 \subset E^{3N+1}$

задается условиями попарного взаимного непересечения объектов размещения (R_i,R_j), $i,j=\overline{1,N},\ i \neq j$. $c=\overline{1,C}$.

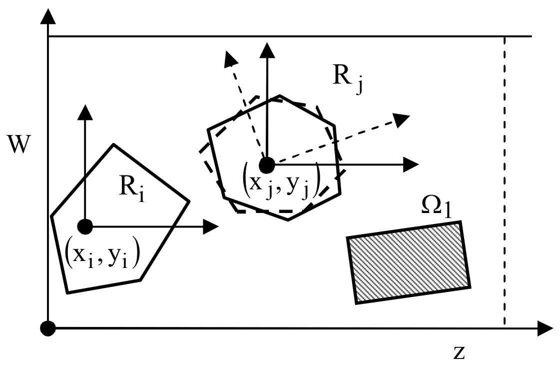

Рис. 1. Область размещения с размещаемыми объектами и неподвижной областью запрета

Область D – невыпуклое, несвязное ограниченное точечное множество, имеющее кусочно-гладкую границу $\Psi = \mathrm{Fr}D$, $\Psi \subset E^{3N}$, которая описывается линейными и нелинейными ограничениями. Каждая компонента связности области допустимых решений является многосвязной.

<u>*Свойство 1.*</u> Число ограничений I на область D допустимых решений задачи (2) квадратично зависит от числа размещаемых объектов и равно

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = O(4N \max_{i=1,N} n_i) + \\ +O(CN \max_{i=1,N} n_i) + O(N^2 \max_{i=1,N} n_i), \tag{3}$$

где I_1, I_2, I_3 – число ограничений на подобласти D^1, D^2, D^3 соответственно.

Кусочно-линейная аппроксимация области $D_{R_0} = D^1 \cap D^2$. Построим преобразование $\Im(D_{R_0}, \delta)$ такое, что его применение к исходной нелинейной области D_{R_0} продуцирует аппроксимационное множество D^L с кусочно-линейной границей.

<u>*Замечание 1*</u>. Кусочно-линейная аппроксимация области D_{R_0}, реализуемая преобразованием $\Im$, проводится в диапазоне Δ(u) изменения параметров размещения объектов R_i, определяемом заданной точностью вычислений ε. На основании изучения особенностей области D сделан вывод о возможности выбора диапазонов вида $\varphi \in [-0{,}3;\ 0{,}3]$, x_i, $y_i \in [0;5]$, $i = 1,2,\ldots,I$.

Построим кусочно-линейную аппроксимацию области D^1.

Подобласть D^1 описывается системой $F_0(u) \le 0$ наборов $F_{0i}^h(u_i) \le 0$ нелинейных неравенств вида:

$$F_0(u) := \{F_{0i}^h(u_i),\ h = 1,..,4;\ i = 1,2,...,N,$$

где набор $F_{0i}^h(u_i) \le 0 := \left\langle F_{0i}^{hj}(u_i) \le 0,\ j = \overline{1,n_i}\right.$ состоит из n_i систем $F_{0i}^{hj}(u_i) \le 0$ нелинейных неравенств с функциями $f_{0i}^{hj_m}$, $m = \overline{1,3}$ вида:

$$f_{0i}^{1j_1} = -x_i + x_i^j \cos\varphi_i + y_i^j \sin\varphi_i\ ,$$

$$f_{0i}^{2j_1} = -y_i + y_i^j \cos\varphi_i - x_i^j \sin\varphi_i\ ,$$

$$f_{0i}^{3j_1} = y_i - W - y_i^j \cos\varphi_i + x_i^j \sin\varphi_i\ ,$$

$$f_{0i}^{4j_1} = x_i - z - x_i^j \cos\varphi_i - y_i^j \sin\varphi_i\ ,$$

$$f_{0i}^{hj_2} : \varphi_i - \Delta_i^{hj\_0},\quad f_{0i}^{hj_3} : \varphi_i - \Delta_i^{hj\_1},$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} (\Delta_i^{hj\_1} - \Delta_i^{hj\_0}) = 2\pi\ .$$

<u>*Замечание 2.*</u> В данном случае реализовано касание типа «вершина объекта R_i – сторона S_0» [2]. Назовем это касание касанием I-го типа.

Линеаризация функций $f_{0i}^{hj_1}$. Каждая из функций $f_{0i}^{hj_1}$ представляет собой сумму трех слагаемых, первое из которых является линейным, а два других есть тригонометрические функции параметра размещения φ_i.

Использование разложений функций sin φ и cos φ в ряд Маклорена соответственно вида:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots$$

позволяет приближенно представить значение функций значением их аргумента φ: $\sin\varphi \cong \varphi$, $\cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2!$, пренебрегая слагаемыми более высоких порядков.

Пусть задана погрешность вычислений $\varepsilon_s > 0$. В зависимости от величины ε_{sin} можно определить диапазон $\varphi \in [\Delta_i^{j-1}(\varepsilon_s); \Delta_i^{j-r}(\varepsilon_s)]$, в котором $|\sin\varphi - \varphi| < \varepsilon_s$. Так, если $\varepsilon_s = 0{,}015$, то $\varphi \in [-0{,}2;0{,}2]$.

<u>*Замечание 3.*</u> При одной и той же погрешности вычислений $\varepsilon_c > 0$ диапазон $[\Delta_i^{j-1}(\varepsilon_c); \Delta_i^{j-r}(\varepsilon_c)]$, в котором $\cos\varphi - (1 - \varphi^2/2!) < \varepsilon_c$, значительно шире. Так, если $\varepsilon_c = 0{,}015$, то для функции cos φ соответствующий диапазон изменения углового параметра $\varphi \in [-0{,}29;0{,}29]$.

Рассмотрим функцию $g(\varphi_i) = (1 - \varphi_i^2/2)$. Кусочно-линейная аппроксимация $g^L(\varphi_i)$ функции $g(\varphi_i)$ в диапазоне изменения углового параметра

$\varphi_i \in [0;\ 0{,}36]$, узлами которой являются равномерно отстоящие по оси φ точки $A_1=(0;\ 1)$, $A_2=(0{,}12;\ 0{,}9928)$, $A_3=(0{,}24;\ 0{,}9712)$, $A_4=(0{,}36;\ 0{,}9358)$, состоит из трех линейных звеньев вида

$$g^L_{k-1}(\varphi_i) = (y_{A_k} - y_{A_{k-1}})*(\varphi_i - x_{A_{k-1}})/$$
$$/(x_{A_k} - x_{A_{k-1}}) + y_{A_{k-1}},\ k=\overline{2,4}.$$

При этом погрешность ε_{c_lin} определяется как

$$\varepsilon_{c\_lin} = \max_{\varphi_i \in [0;0{,}36]} \left| g^L(\varphi_i) - \cos\varphi_i \right| \le 0{,}0016\,.$$

<u>*Замечание 4.*</u> Погрешность ε_{c_lin} является управляющим параметром, т.е. количество k узлов A_k ломаной $g^L(\varphi_i)$ является функцией ε_{c_lin}: $k=f(\varepsilon_{c\_lin})$.

Положим $g^L_{k-1}(\varphi_i) = a_k\varphi_i + b_k$,

где $a_k = (y_{A_k} - y_{A_{k-1}})/(x_{A_k} - x_{A_{k-1}})$,

$b_k = y_{A_{k-1}} - a_k x_{A_{k-1}}$, $k=f(\varepsilon_{c\_lin})$.

Тогда функция $f^{1j_1}_{0i}$ представляется в виде набора функций

$$f^{1j_1}_{0i} \approx -x_i + x^j_i\, g^L(\varphi_i) + y^j_i\,\varphi_i = \left\langle -x_i + x^j_i\, g^L_{k-1}(\varphi_i) + y^j_i\varphi_i,\right. \quad \varphi_i \in [A_{k-1};A_k].$$

Аналогично,

$$f^{2j_1}_{0i} \approx -y_i + y^j_i\, g^L(\varphi_i) - x^j_i\,\varphi_i = \left\langle -y_i + y^j_i\, g^L_{k-1}(\varphi_i) + x^j_i\,\varphi_i,\right.$$

$$f^{3j_1}_{0i} \approx y_i - W - y^j_i\, g^L(\varphi_i) + x^j_i\,\varphi_i = \left\langle y_i - W - y^j_i\, g^L_{k-1}(\varphi_i) + x^j_i\,\varphi_i,\right.$$

$$f^{4j_1}_{0i} \approx x_i - z - x^j_i\, g^L(\varphi_i) - y^j_i\,\varphi_i = \left\langle x_i - z - + x^j_i\, g^L_{k-1}(\varphi_i) - y^j_i\,\varphi_i,\right. \quad \varphi_i \in [A_{k-1};\ A_k].$$

<u>*Замечание 4.*</u> Предложенная методика линеаризации условий размещения объектов R_i в области R_0 практически без изменений применима в случае, если объекты R_i являются невыпуклыми.

Линеаризация условий взаимного непересечения объектов $R = \{R_i\},\ i=\overline{1,N}$ и зон запрета $\Omega = \{\Omega_c\},\ c=\overline{1,C}$ – область D^2. Подобласть D^2 задается условиями попарного взаимного непересечения объектов размещения и зон запрета, и описывается системой $F(u) \le 0$ наборов $F_{ic}(u_c, u_i) \le 0$ нелинейных неравенств вида:

$$F_{ic}(u_c, u_i) \le 0 := \left\langle F^{hj}_{ic}(u_c, u_i) \le 0,\ h=\overline{1,n_c},\ j=\overline{1,n_i}\right.,$$
$$i=\overline{1,N},\quad c=\overline{1,C},$$

n_c – количество вершин зоны запрета Ω_c.

Система $F^{hj}_{ic}(u_c, u_i) \le 0$ содержит три неравенства, причем вид функции $f^{hj_1}_{0i}$ первого неравенства системы зависит от типа касания пары (R_i, Ω_c), два других – ограничения на значение углового параметра φ_i.

Рассмотрим некоторую пару объектов (R_i,Ω_c), $i \in \overline{1,N}$, $c \in \overline{1,C}$. Фиксированные параметры размещения зоны запрета Ω_c имеют вид $u_c=(a_c,b_c)$.

В данном случае реализуется как касание I-го типа «вершина (x^k_i, y^k_i) объекта R_i – сторона $[(x^l_c, y^l_c), (x^{l+1}_c, y^{l+1}_c)]$ объекта Ω_c», так и касание II-го типа «сторона $[(x^k_i, y^k_i)\ (x^k_i, y^k_i)]$ R_i – вершина (x^l_c, y^l_c) Ω_c».

Касание I-го типа (в системе координат $X_cO_cY_c$) описывается в виде:

$$f^{hj_1}_{0i}: A(x_i - a_c) + B(y_i - b_c) + (Ax^k_i + By^k_i)\cos\varphi_i -$$
$$-(Bx^k_i - Ay^k_i)\sin\varphi_i - (By^l_c + Ax^l_c) \le 0.$$

С учетом предыдущего изложения

$$f^{hj_1}_{0i} \approx Ax_j + By_j - (Ax^k_j + By^k_j)g(\varphi_i) -$$
$$-(Bx^k_j - Ay^k_j)\varphi_j - Aa_c - Bb_i - C_c.$$

Использование функции $g^L(\varphi_i)$ позволяет построить линеаризацию функции $f^{hj_1}_{0i}$ рассматриваемого ограничения.

Приведем процесс линеаризации функции $f^{hj_1}_{0i}$ в случае *касания II-го типа*. Функция $f^{hj_1}_{0i}$ описывается следующим образом:

$$f^{hj_1}_{0i}: A(\varphi_i)(x_i - a_c) + B(\varphi_i)(y_i - b_c) -$$
$$-Q_1\cos\varphi_i + Q_2\sin\varphi_i + Q_3 \le 0,$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – константы, зависящие от метрических характеристик объектов и области размещения.

Учитывая, что

$A(\varphi_i)=A\cos\varphi_i+B\sin\varphi_i$, $B(\varphi_i)=B\cos\varphi_i - A\sin\varphi_i$,

$$C(\varphi_i) = x^{k+1}_i(\varphi_i)A(\varphi_i) + y^{k+1}_i(\varphi_i)B(\varphi_i) - x^l_c A(\varphi_i) -$$
$$- y^l_c B(\varphi_i),$$

на первом шаге линеаризации заменим

$$A(\varphi) \approx A\left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right) + B\varphi,\ B(\varphi) \approx B\left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right) - A\varphi\,.$$

Функция $f^{hj_1}_{0i}$ примет вид:

$$f^{hj_1}_{0i}: Ax_i + By_i - A\frac{\varphi_i^2}{2}x_i + B\varphi_i x_i - B\frac{\varphi_i^2}{2}y_i -$$
$$-A\varphi_i y_i + \frac{\varphi_i^2}{2}(Bb_c + Aa_c) + \varphi_i(Ab_c - Ba_c) - Aa_c - Bb_c +$$
$$+\frac{\varphi_i^2}{2}Q_1 + Q_2\varphi_i + Q_3 - Q_1\,.$$

Обозначим:

$G_1 = -Aa_c - Bb_c + Q_3 - Q_1$ – константную часть рассматриваемой функции;

$G_2(x_i, y_i, \varphi_i) = Ax_i + By_i + \varphi_i(Ab_c - Ba_c) + {}$ $+Q_2\varphi_i$ – линеаризованную часть функции;

$G_3(\varphi_i) = \frac{\varphi_i^2}{2}(Bb_c + Aa_c) + \frac{\varphi_i^2}{2}(x_c^1 A + By_c^1)$ – квадратичную часть функции;

$G_4(x_i, y_i, \varphi_i) = B\varphi_i x_i - A\varphi_i y_i$ – гиперболическую часть функции;

$G_5(x_i, y_i, \varphi_i) = -A\frac{\varphi_i^2}{2}x_i - B\frac{\varphi_i^2}{2}y_i$ – составляющую третьего порядка функции.

Тогда функция $f_{0i}^{hj_1}$ второго типа имеет вид:

$$f_{0i}^{hj_1}(x_i, y_i, \varphi_i) = G_1 + G_2(x_i, y_i, \varphi_i) + G_3(\varphi_i) + G_4(x_i, y_i, \varphi_i) + G_5(x_i, y_i, \varphi_i).$$

Функция G_3 задается набором функций

$$G_3(\varphi_i) \approx g^L(\varphi_i)\{B(b_c + y_c^1) + A(a_c + x_c^1)\} = \left\langle g_{k-1}^L(\varphi_i)\{B(b_c + y_c^1) + A(a_c + x_c^1)\}\right.,$$

$$\varphi_i \in [A_{k-1}; A_k],\ k = f(\varepsilon_{\cos\_lin}).$$

Функция $f_{0i}^{hj_1}$ *II-го типа* в части $G_4(x_i, y_i, \varphi_i)$. содержит произведения $\varphi_i x_i$, $\varphi_i y_i$. На основе анализа геометрических свойств поверхностей $\Gamma(\varphi_i, x_i) = \varphi_i x_i$ и $\Gamma(\varphi_i, y_i) = \varphi_i y_i$ в заданных диапазонах изменения параметров размещения построена линеаризация $\Gamma^L(\varphi_i, x_i)$ $\Gamma^L(\varphi_i, y_i)$ гиперплоскостями $g_{k-1}^L(\varphi_i, x_i), k = \overline{2,3}$:

$$G_4(\varphi_i) \approx \left\langle g_{k-1}^L(\varphi_i, x_i)\right., k = \overline{2,3}.$$

Линеаризация части $G_5(x_i, y_i, \varphi_i)$ ограничения основана на использовании суперпозиции функций $g^L(\varphi_i)$ и $\Gamma^L(\varphi_i, x_i)$ $\Gamma^L(\varphi_i, y_i)$.

Выводы. Направления дальнейших исследований

Таким образом, построен алгоритм линеаризации функций ограничений области допустимых решений на размещение в области многоугольных неориентированных объектов размещения, позволяющий с заданной точностью свести рассматриваемую нелинейную оптимизационную задачу к набору оптимизационных задач линейного программирования. Данный подход является основой для построения информационной технологии решения рассматриваемого класса оптимизационных задач.

Список литературы

1. *Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.*
2. *Новожилова М.В. Методологія розв'язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування / М.В. Новожилова // Вісник Запорізького державного університету. – Запоріжжя: ЗДУ. – 1999. – № 1. – с. 35-39.*
3. *Гиренко К.А. Математична модель та метод розв'язання задачі розміщення неорієнтованих складених геометричних об'єктів: автореф. дис. на ... канд. техн. наук / Гиренко К.А. – Х., 2009. – 18 с.*
4. *Исследование операций. В 2-х т. Т. 2. Модели и применения / Под ред. Дж. Моудера, С Элмаграби. – М: Мир, 1981. – 677 с.*

Поступила в редколлегию 27.05.2009

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Д. Сизова, Харьковский технический университет строительства и архитектуры, Харьков.

ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ УМОВ РОЗМІЩЕННЯ НЕОРІЄНТОВАНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

І.А. Чуб, М.В. Новожилова

Проведено дослідження оптимізаційної задачі розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів в смузі, запропонована лінеаризація функцій обмежень області припустимих рішень. Даний підхід є основою для побудови інформаційної технології рішення даного класу оптимізаційних задач.

Ключові слова: *оптимізація, розміщення, геометричний об'єкт, лінеаризація.*

LINAR APPROXIMATION FOR PLACEMENT CONDITIONS OF NONORIENTED GEOMETRICAL OBJECTS

I.A. Chub, M.V. Novozhilova

Research of optimization task of placing of the polygonal nonoriented objects is conducted in a bar, linearizing of functions of limitations of area of feasible solutions is offered. This approach is basis for the construction of information technology of decision of the examined class of tasks of optimizations.

Keywords: *optimization, placing, geometrical object, linearization.*