

УДК 006.86 : 519

З.Л. Варша<sup>1</sup>, Е.М. Корчински<sup>2</sup><sup>1</sup>Polish Metrological Society, Warsaw, Poland<sup>2</sup>Technical University of Lodz, Poland

## ФУНКЦИЯ СДВИНУТОГО КОСИНУСА – АЛЬТЕРНАТИВА НОРМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

*Сдвинутая на один период функция косинуса, нормализованная так, чтобы площадь под ней равнялась единице, предложена в качестве нетрадиционной модели функции плотности вероятности. Она может аппроксимировать нормальное распределение в диапазоне  $\pm 2,5$  стандартного отклонения с точностью примерно  $\pm 0,02$ , что приемлемо при оценивании неопределенности измерения. В этой работе рассмотрены свойства предлагаемой функции плотности вероятности, основанной на функции косинуса, и возможности её применения при обработке данных. Рекомендуется её применение в виртуальных средствах измерения с автоматическим вычислением неопределенности.*

**Ключевые слова:** функция плотности вероятности, аппроксимация нормального распределения.

### Введение

Нормальное распределение погрешности и неопределенности положено в основу большинства нормативных документов, включая международные рекомендации GUM [1]. Это связано с предположением о том, что большинство факторов случайно влияют на измеряемый объект или/и измерительную цепь.

На практике, одним из недостатков применения нормального распределения является ограниченность диапазона значений измеряемых величин. В измерительных экспериментах всегда ограничено число влияющих величин и существуют физические ограничения при сборе данных. Дополнительная информация о том, что данные ограничены, позволяет использовать усеченное распределение. Например, усеченное нормальное распределение получают путем ограничения диапазона значений с последующей нормализацией

для приведения площади под кривой к единице. Описание такой усеченной Гауссовой функции достаточно сложно. Некоторые другие ограниченные функции, рекомендованные для оценивания неопределенности методом Монте-Карло, приведены в табл. 1 [2]. Кроме того, необходимо учитывать, что для распределений отличных от нормального, могут применяться оценки более точные чем среднее значение [3, 4]. Не имеет значения, какой метод применяется – метод Монте-Карло или метод, основанный на свертке. Упрощение нормального распределения и распределения Стьюдента является большой помощью для уменьшения математических операций, которые могут занимать достаточный объем памяти для хранения табличных значений и соответствующих математических операций. Это может быть важно при разработке средств измерений с автоматической функцией вычисления неопределенности [5, 6].

Для обработки сигналов в режиме реального времени необходимы разные распределения. В простейших интеллектуальных датчиках, средствах с использованием сигнальных процессоров объем памяти значительно ограничен. В работе рассмотрена разработка простых моделей функции плотности вероятности, которые аппроксимируют нормальное распределение. Например, сдвинутая вверх функцию косинуса в диапазоне от  $-\pi$  до  $+\pi$ . В самом простом случае эта функция может пересекать горизонтальную ось абсцисс (рис. 1) или даже может находиться над осью. Когда теоретический базис исследуемой нами модели был выбран, упоминание о схожей модели было найдено в статье, опубликованной еще в 1961 году [7]. Автор предлагал использовать специфическую сдвинутую вверх функцию косинуса в диапазоне  $\pm\pi$  для аппроксимации нормального распределения, но данная функция оказалась не оптимальной. Возможно, из-за этого предложение Грина не было развито в статистических и метрологических публикациях.

## 2. Теоретические основы

**2.1 Предлагаемые функции.** Предлагается специфическая модель функции распределения плотности вероятности в общем виде

$$f(x) = B + A \cos(2\pi \cdot (x/X_T)), \quad (1)$$

где  $x$  – наблюдаемое значение;  $f(x) > 0$ ;  $X_T$  – величина равная одному периоду косинуса;  $A, B$  – константы.

Из-за константы  $B$  функция  $f(x)$  (1) была названа как «функция сдвинутого косинуса» с предложенным обозначением  $+COS$ . Модель действительна лишь для  $f(x) > 0$  и её площадь равняется 1, а функция  $+COS$  может применяться в пределах одного периода ( $\pm(X \leq 0,5 X_T)$ ). Функция  $f(x)$  изначально имеет три независимых параметра  $A, B, X$ . Для их нахождения необходимо три соотношения (условия):

- площадь под кривой равна  $S = 1$ , или  $S < 1$ , как, например, для Гауссовой кривой в тех же пределах;

- предел аппроксимации  $X_{APPROX} < X$  или точка пересечения Гауссовой функции или другой параметр функции  $+COS$ , например:  $\pm\sigma, \pm 2\sigma, \dots$  подобно Гауссовой функции;

- минимальное расстояние между двумя кривыми основано на следующих критериях: МНК, МНМ, критерий Чебышева и другие.

В случае когда период функции косинуса сдвинут на  $B > A$ , площадь под кривой  $S = 2XB$ . Исходя из того, что  $S = 1$ , половина диапазона  $X$  функции косинуса

$$X = 1/(2B). \quad (2)$$

Функция (1) может быть записана как

$$f(x) = B + A \cos(2\pi xB). \quad (3)$$

Функция (3) имеет два независимых параметра,  $A$  и  $B$  (или  $A$  и  $X$ ).

Интегральное распределения (3) описывается следующим соотношением

$$F(x) = \int f(x) dx = Bx + \frac{1}{2\pi B} A \sin \pi \frac{x}{X} + const \quad (4)$$

для  $-X \leq x \leq X$ .

Функции (3), (4) могут быть применены для аппроксимации нормального распределения, но только в случае, когда нужна точность выше, чем в частном случае  $A = B$ . Для  $A = B$ :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{X} + 1 \right) + \frac{1}{2\pi} \sin \pi \frac{x}{X} \Big|_{-X \leq x \leq X} \quad (4a)$$

Некоторые значения  $F(x)$  для  $A = B$  и  $X = 1/2A$  представлены ниже в табл. 1.

Таблица 1

Значения функции распределения модели  $COS^2$

x/X	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5
F(x)	0	0,001	0,006	0,021	0,049	0,091
x/X	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	
F(x)	0,149	0,221	0,307	0,401	0,5	
x/X	0,4	0,3	0,2	0,1	0	
F(x)	0,851	0,780	0,694	0,599	0,5	
x/X	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
F(x)	1	0,999	0,994	0,979	0,951	0,909

Предложенная простейшая, сдвинутая вверх функция косинуса для случая, когда  $B = A$ :

$$f(x) = A \left( 1 + \cos(\pi \cdot (x/X)) \right). \quad (5)$$

Площадь в пределах  $\pm X$  равна 1 и после интегрирования (5):  $A \cdot 2X = 1$  и  $2\sin(x = \pm X) = 0$ . Тогда:

$$X = 1/(2A) \quad (6)$$

и  $f(x) = A(1 + \cos 2\pi Ax) \equiv 2A \cos^2 \pi Ax$ . (7)

Параметры  $A$  и  $X$  взаимозависимы (6) и этого достаточно для получения одного. Функция  $+COS$  (7) с  $A = B$  называется  $COS^2$ . Если такая функция включает верхнюю часть нормального распределения с СКО  $\sigma$  (кривая 2 на рис. 1), тогда амплитуда составит:

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (7a)$$

и так как площадь под кривой (2)  $S = 1$  из (3), половина размаха косинуса составили

$$X = \sigma\sqrt{2\pi} \approx 2,507\sigma.$$

Для стандартного нормального распределения ( $\sigma = 1$ ):

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,1995 \quad \text{и} \quad X = \sqrt{2\pi} \approx 2,507.$$

### Параметры распределения

СКО  $\sigma_{+COS}$  модели  $+COS$  функции в общем случае (6)

$$\sigma_{+COS} = \sqrt{\int_{-X}^{+X} x^2 (B + A \cos 2\pi xB) dx}. \quad (8)$$

Для (7)

$$\int x^2 \cos cx dx = \frac{\sin cx}{c} \left( x^2 - \frac{2}{c^2} \right) + \frac{2x \cos cx}{c^2}, \quad (8a)$$

где  $c = 2\pi B$  и для  $x = X, B = 1/2X$  или  $X = 1/2B, B \geq A$ .

Два параметра независимы и решение (8) может быть представлено как:

$$\sigma_{+\cos} = X \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} AX} = \frac{1}{2B} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \frac{A}{B}} \quad (9)$$

Это решение пригодно лишь для ограниченных значений A/B:

$$A/B \leq \pi^2/6 \approx 1,78.$$

При A = B = 1/2X

$$\sigma_{+\cos} = X \sqrt{1/3 - 2/\pi^2} = (1/2A) \cdot 0,3615. \quad (9a)$$

Если имеется значение СКО  $\sigma_{+\cos}$ , то есть возможность найти взаимосвязанные величины A и X. Например, если  $\sigma_{+\cos} = 1$ : A = 0,1808, X = 2,766. Или наоборот. Если даны пределы X, например, X = 2,5 из (9a)  $\sigma_{+\cos} = 0,9060$ .

Для вычисления расширенной неопределенности, значения коэффициента охвата (k<sub>PC</sub>) +COS для вероятности P при n>10 представлены ниже в табл. 2. При n≤10 необходимо дополнительное увеличение k<sub>PC</sub> (Стьюдентизация предложенного распределения).

Таблица 2

Коэффициент охвата для распределения +COS							
P [%]	50	68,3	90	95	99	99,7	100
k <sub>PC</sub> (x/X)	0,265	0,385	0,596	0,683	0,816	0,878	

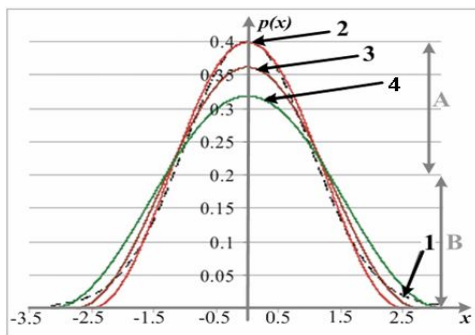


Рис. 1. Функции плотности вероятности: 1 – стандартное нормальное N(0,1) и три функции A(1+cos2πAx); 2 – проходящая через верхнюю точку функции нормального распределения, 3 – с СКО  $\sigma_{+\cos} = 1$ , 4 – предложенное Гринем  $f_{GR}(x)$  [7]

### 3. Аппроксимация нормального распределения функциями + COS

Разности  $\Delta_{PDF}$  между каждым из распределений COS<sup>2</sup> и стандартным нормальным ( $\sigma = 1$ ) отображены на рис. 2, а и их интегральные распределения CPDF  $\Delta_{CPDF}$  на рис. 2, б. Величины главных параметров трех функций в столбцах 2 и 4 табл. 3. Из рис. 2, а, б и данных из табл. 3 можно сделать вывод, что разность  $\Delta_{PDF}$  COS<sup>2</sup> дифференциальных распределений 2 и нормального, а также соответствующих интегральных распределений не превышает ±2,1%. Отклонение от кривой 3 (при значении СКО  $\sigma = 1$ ) варьируется в более широком диапазоне(+2,8%, -3,7%).

Даже такой точности достаточно для большинства способов оценивания неопределенности типа А. В столбце 4 также даны сравнения параметров функции  $f_{GR}(x)$ , предложенной Гринем [7]. Для нее A = 1/(2π), СКО  $\sigma_{+\cos} \approx 1,14$ . Разности  $\Delta_{PDF}$  и  $\Delta_{CPDF}$  функции Грина  $f_{GR}(x)$  и нормального распределения – значительно выше (до +4,5%, -8,1%) и неприемлемы для большинства исследовательских и технических измерений. Для аппроксимации нормального распределения две другие +COS функции с единым оптимальным параметром A = B представлены в столбце 5 и 6 табл. 3. Величина A кривой 5 вычисляется из разности  $\Delta_{PDF}$  известным методом наименьших квадратов, а для кривой 6 методом наименьших модулей.

Отклонения  $\Delta_{PDF}$  и  $\Delta_{CPDF}$  распределений 5 и 6 вместе с 2 показаны на рис. 3, а, б. Для более узкого диапазона аппроксимации возможно достичь более высокой точности. Зависимость оптимальных значений A и половины диапазона X +COS в диапазоне аппроксимации  $X_{APPROX}$  представлен на рис. 4, а. Изменения основных параметров разниц  $\Delta_{PDF}$  и  $\Delta_{CPDF}$  представлены на рис. 4, б, с. Средние значения, предельные значения и СКО  $\Delta_{PDF}$  и  $\Delta_{CPDF}$  функции +COS рассмотрены для стандартного нормального распределения и представлены в табл. 3 для сравнения.

Таблица 3

Параметры распределений +COS и их разниц  $\Delta_{PDF}$ ,  $\Delta_{CPDF}$  от нормального распределения об  $\sigma = 1$

+COS $X_{APPROX}=X$	Тип	COS <sup>2</sup>					+ COS при B ≠ A		
		Верхняя точка	$\sigma_{+\cos}=1$	$f_{GR}(x)$	min (Δf) <sup>2</sup>	min  Δf	min (Δf) <sup>2</sup>	min  Δf	
	Кривая	2	3	4	5	6	7	8	
	A	Данное значение A			Оптимальное МНК A		Оптимальные МНК A и B		
	B	B = A						0,220	0,219
	X=1/2B	2,51	2,77	3,14	2,69	2,54	2,27	2,28	
	$\sigma_{+\cos}$	0,906	1	1,136	0,971	0,922	0,937	0,936	
$\Delta_{PDF}$ $\Delta f = f_{+\cos} - f_G$	min Δf	-0,022	-0,037	-0,0806	-0,027	-0,020	-0,0015	-0,0013	
	max Δf	0,020	0,028	0,0446	0,024	0,020	0,012	0,012	
	mean Δf	0,0024	0,001	0,0003	0,0013	0,0021	0,0050	0,0049	
	$\overline{\Delta f}$	0,014	0,020	0,0389	0,016	0,0132	0,0043	0,0044	
$\Delta_{CPDF}$ $\Delta F = F_{+\cos} - F_G$	min ΔF	-0,019	-0,018	-0,0483	-0,012	-0,016	-0,012	-0,011	
	max ΔF	0,019	0,018	0,0483	0,012	0,016	0,012	0,011	
	mean ΔF	0,000	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000	0,000	
	$\overline{\Delta F}$	0,012	0,010	0,0284	0,008	0,010	0,007	0,007	

Каждое нормальное распределение со случайным  $\sigma_i$  может также просто быть аппроксимировано некоей функцией  $\text{COS}^2$  при  $A_i = B_i$  и  $X_i = 1/(2A_i)$  из столбцов 2–6 табл. 3. Из (9, а)

$$A_i \sigma_i = A \sigma \quad \text{и} \quad X_i \sigma = X \sigma_i. \quad (10)$$

Три примера аппроксимации  $\text{COS}^2$  для нормального распределения при  $\sigma = (0,5, 1, 2)$  представлены на рис. 5.

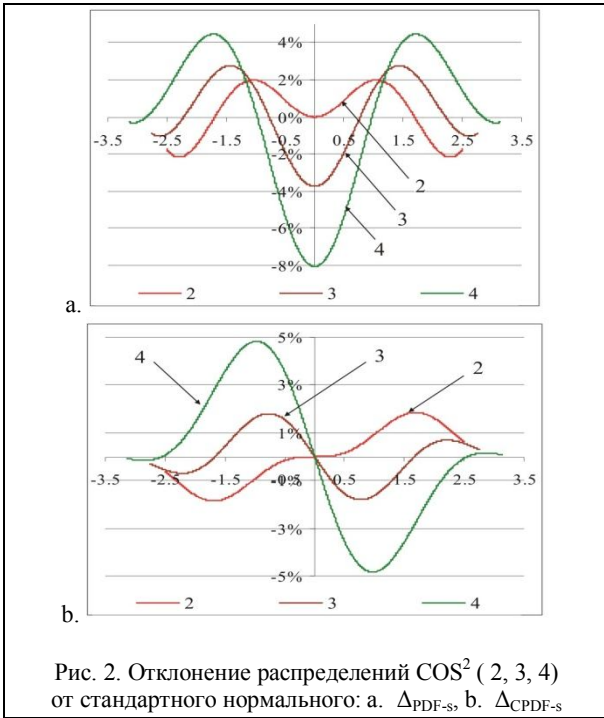


Рис. 2. Отклонение распределений  $\text{COS}^2$  (2, 3, 4) от стандартного нормального: а.  $\Delta_{\text{PDF-s}}$ , б.  $\Delta_{\text{CDF-s}}$

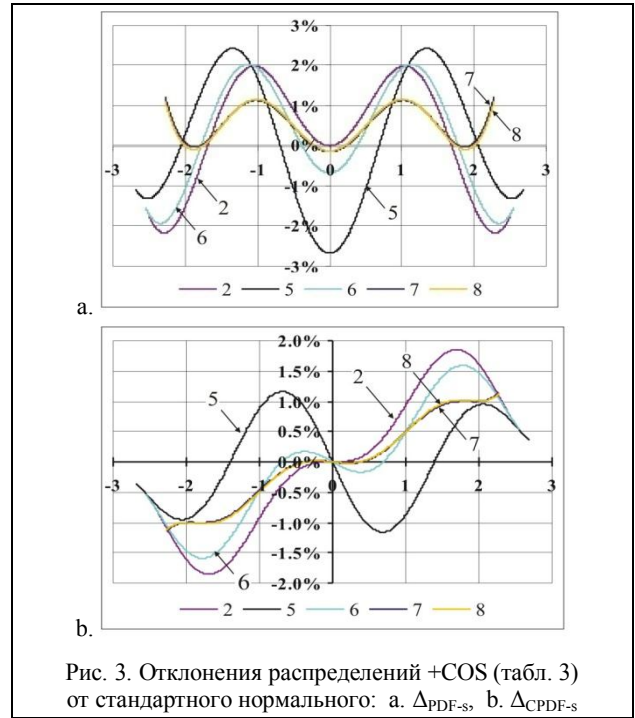


Рис. 3. Отклонения распределений  $+\text{COS}$  (табл. 3) от стандартного нормального: а.  $\Delta_{\text{PDF-s}}$ , б.  $\Delta_{\text{CDF-s}}$

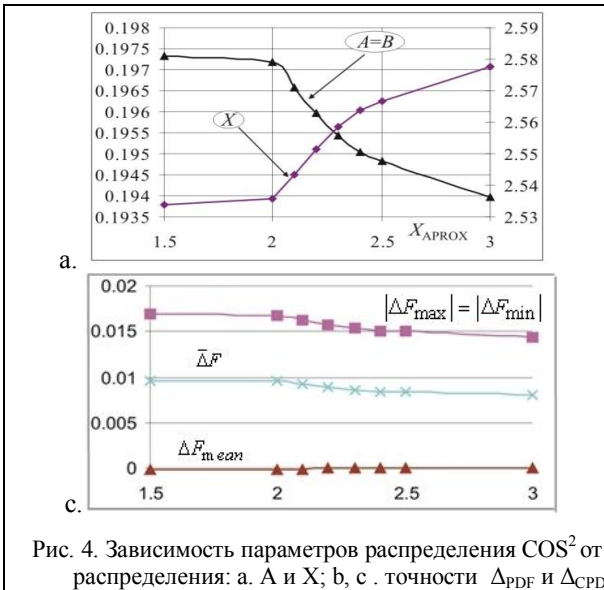


Рис. 4. Зависимость параметров распределения  $\text{COS}^2$  от значений интервала  $X_{\text{APPROX}}$  аппроксимации нём нормального распределения: а. А и X; б, с. точности  $\Delta_{\text{PDF}}$  и  $\Delta_{\text{CDF}}$  для случая оптимального значения А (найденных МНК)

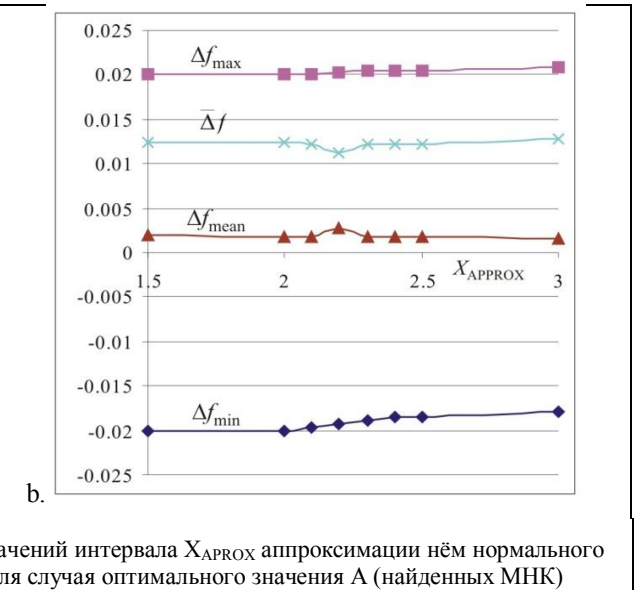


Рис. 5. Нормальное распределение с различными значениями СКО  $\sigma = (1/2, 1, 2)$  и соответствующая аппроксимация  $+\text{COS}$

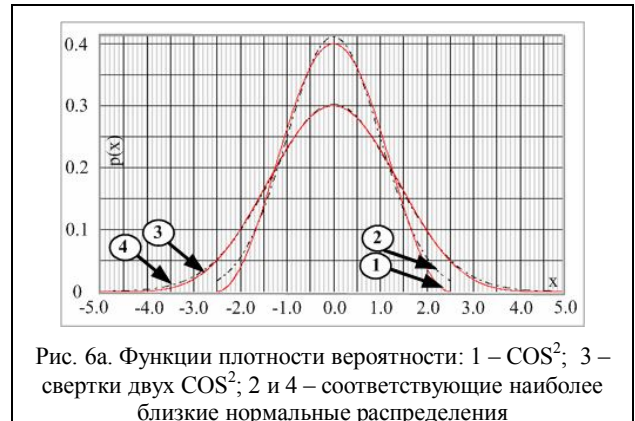


Рис. 6а. Функции плотности вероятности: 1 –  $\text{COS}^2$ ; 3 – свертки двух  $\text{COS}^2$ ; 2 и 4 – соответствующие наиболее близкие нормальные распределения

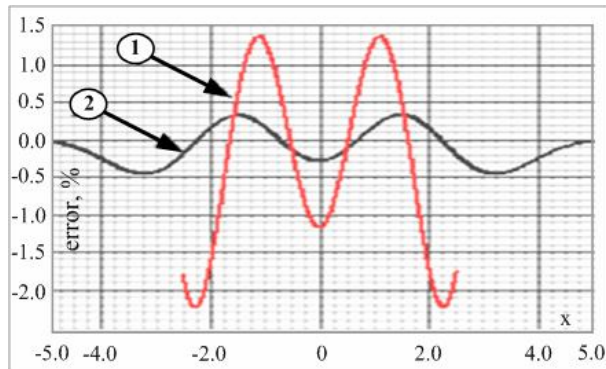


Рис. 6б. Отклонения  $\Delta_{PDF}: \text{COS}^2$  от нормального (1), свертки двух  $\text{COS}^2$  от нормального (2)

#### 4. Краткое описание свертки функций +COS

Результат свертки двух простых +COS распределений  $f(x) = A(1 + \cos 2\pi xA)$  представлен на рис. 6. а. Для этого примера +COS функция имеет следующие параметры  $A = B = 0,2$ ,  $X = 2,5$ ,  $\sigma_{+COS} = 0,904$ ,  $\sigma_G = 0,997$ . Эксцесс  $E = 2,4$  (как для треугольного распределения). Результат свертки – не +COS функция, а ближе к нормальному распределению.

СКО результирующего распределения (свертка двух некоррелированных функций +COS)

$$\sigma_{2(+COS)*} = \sqrt{\sigma_{+COS}^2 + \sigma_{+COS}^2} = \sqrt{2} \sigma_{+COS}.$$

Это  $\sigma_{2(+COS)*} = 1,28$ . Эксцесс равен 2,71.

#### 5. Пример расчета неопределенности

Дана выборка 200 значений  $x_i$  наблюдений многократных измерений. Для сравнения должна быть найдена оценка измеряемой величины и соответствующее значение неопределенности результата измерения с использованием моделей нормального распределения и  $\text{COS}^2$ .

Гистограмма отклонений значений наблюдений от среднего значения  $\bar{x}$  из 17 поддиапазонов показана на рис. 7 как 1.

В данном случае применение критерия согласия эмпирического распределения и  $\text{COS}^2$  модели  $\chi^2$  в диапазоне граничных порядковых статистик не дает положительных результатов. Поэтому рассмотрены функции плотности вероятности в более широком диапазоне, 3 – при полуразмахе  $X_1 = 2,31$ , равном отклонению от 0 значения  $x_{MAX}$  и 4 – по значению  $X_2$ , рассчитанному по значению СКО  $S(x_i) = 0,978$  и формуле (9а). Их расширенные неопределенности  $U$  для различных значений уровня доверия и коэффициента охвата  $k_p$  приведены в табл. 4. Согласие с нормальным распределением и функцией  $\text{COS}^2$  оценивалось по значениям средних квадратических отклонений.

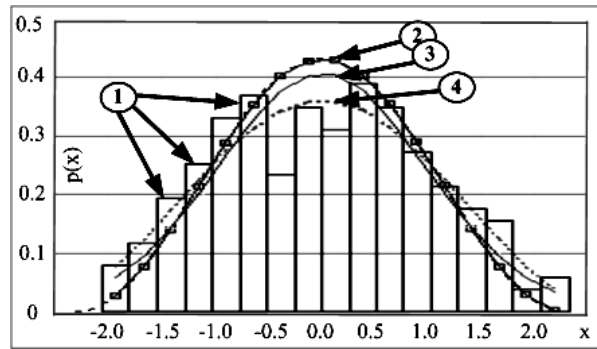


Рис. 7. 1 – Гистограмма, построенная по значениям элементов выборки; 2– аппроксимирующее нормальное распределение;  $\text{COS}^2$  распределения: 3 – по половине размаха  $X_1$ , и граничным значениям; 4 – по размаху  $2X_2$ , полученному по СКО выборки и (9а)

Таблица 4

Расширенные неопределенности с коэффициентом охвата  $k_p$

Уровень доверия	$\text{COS}^2(0, X_i)$			$N(0, \bar{\sigma})$
	$X=1$	$X_1=2,31$	$X_2=2,71$	$S(x_i)=0,978$
	$k_{PC}$	Расширенная неопределенность $\pm U$		
0,500	0,265	0,043	0,051	0,047
0,683	0,385	0,063	0,074	0,069 ( $u_A$ )
0,900	0,596	0,097	0,114	0,114
0,950	0,683	0,112	0,131	0,136
0,990	0,816	0,133	0,156	0,178
0,997	0,878	0,143	0,168	0,205
1	1	0,163	0,192	$\infty$
$\chi^2$	$\chi_{кр}=23,7$	19,5	6,05	7,98
$u_A(U) = \sqrt{\sum (f(x_i) - h_n)^2 / \sqrt{n}}$		0,071	0,012	0,016
$u_A(U) \%$		5,0%	6,4%	7,8%

Результат измерения с неопределенностью:  
Модель нормального распределения:

$$x = \bar{x} \pm k_{PG} \frac{S(x_i)}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 0,205, \quad P = 0,997.$$

Модель  $\text{COS}^2$ :

$$x = \bar{x} \pm k_{PC} \frac{X_1}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 0,143; \quad P = 0,997$$

$$\text{или } x = \bar{x} \pm k_{PC} \frac{X_2}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 0,192; \quad P = 0,997$$

Расширенная неопределенность нормального распределения при уровне доверия 0,997 на 43,4% выше чем для модели  $\text{COS}^2$  (для полуразмаха  $X_1$ ) или на 22% (для полуразмаха  $X_2$ ). Среднее значение для модели  $\text{COS}^2$  находится внутри интервала  $\pm(2,36$  или  $2,78)u_A$  с уровнем доверия  $P = 1$ .

#### Выводы

Предложена нетрадиционная модель распределения вероятностей, основанная на функции косинуса, с соответствующим обозначением +COS. Дан-

ная модель представляє собою смещену на один період функцію косинуса.

Полезной может быть форма распределения  $+COS$ , обозначенная  $COS^2$ , и получаемая при равных значениях амплитуды  $A$  и значения смещения  $B$ . Это значит, что размах случайной величины имеет пределы  $\pm\pi$  в радианах, то есть места касания горизонтальной оси. Предложенная модель описывается только двумя параметрами и является хорошим средством для оценивания неопределенности. При корректном выборе параметров, она дает точную аппроксимацию центральной части нормального распределения в диапазоне  $\pm 2,5$  СКО и дает лучшую оценку неопределенности.

Распределение  $COS^2$  не имеет такой неестественной характеристики как хвосты, вытянутые в бесконечность. На практике невозможно получить наблюдения, настолько широко разбросанные.

Распределение  $COS^2$  близкое к нормальному и дает аппроксимацию с точностью около  $\pm 2\%$  в интервале, равном одному полному периоду. Для более узкого диапазона можно получить более высокую точность аппроксимации.

Значение эксцесса для распределения  $COS^2$  близко к эксцессу треугольного распределения, поэтому в качестве оценки измеряемой величины можно использовать тоже более точную двухкомпонентную статистику [4].

Использование предложенной модели дает возможность упростить многие операции, также увеличить быстродействие и сократить объем занимаемой памяти. Это дает возможность применения предложенной модели в микроконтроллерах однокристалльных ЭВМ. Рассмотренная модель может использоваться в интеллектуальных датчиках и простых средствах измерений с автоматическим

оцениванием неопределенности для индицирования результатов с требуемым уровнем доверия [5, 6].

## Список литературы

1. Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) JCGM OIML 1993.
2. Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Guide OIML G 1-101 Edition 2007 (E).
3. Warsza Z.L. Methods of upgrading the uncertainty of type A evaluation (1). Elimination the influence of unknown drift and harmonic components / Z.L. Warsza, M. Dorozhovets, M.J. Korczyński // Proc. of 15th IMEKO TC4 Symposium. – Iasi Romania, 2007. – P. 193-198.
4. Dorozhovets M. Methods of upgrading the uncertainty of type A (2). Elimination of the influence of autocorrelation of observations and choosing the adequate distribution / M. Dorozhovets, Z. Warsza // Proceedings of 15th IMEKO TC4 Symposium. – Iasi Romania, 2007. – P. 199-204.
5. Warsza Z.L. On line cleaning of the raw data and uncertainty type A evaluation – development aspects / Z.L. Warsza, M.J. Korczyński // Proceedings of 18th Symposium Metrology and Metrology Assurance, 10 -14 Sept. 2008. – Sozopol, Bulgaria. – P. 330-337.
6. Korczyński M.J. A New Instrument Enriched by Type A Uncertainty Evaluation / M.J. Korczyński, Z.L. Warsza // Proc. of 16th IMEKO TC4 International Symposium in Florence, 22-24 Sept. 2008. – P. 1181 (CD).
7. Raab D.H. A cosine approximation to the normal distribution / D.H. Raab, E.H. Green // Psychometrika. – 1961. – Vol. 26, no 4. – P. 447-500.
8. Warsza Z.L. About the best measurand estimators of trapezoidal distributions / Z.L. Warsza, M. Galovska // Proceedings of XIX IMEKO Congress in Lisbon. – P. 513.

Поступила в редколлегию 14.07.2009

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## ФУНКЦІЯ ЗРУШЕНОГО КОСИНУСА – АЛЬТЕРНАТИВА НОРМАЛЬНОМУ РОЗПОДІЛУ

З.Л. Варша, Е.М. Корчинські

Зрушена на один період функція косинуса, нормалізована так, щоб площа під нею дорівнювала одиниці, запропонована як нетрадиційна модель функції щільності вірогідності. Вона може апроксимувати нормальний розподіл в діапазоні  $\pm 2,5$  стандартного відхилення з точністю приблизно  $\pm 0,02$ , що прийнятно при оцінюванні невизначеності вимірювання. У цій роботі розглянуті властивості запропонованої функції щільності вірогідності, заснованої на функції косинуса, і можливості її застосування при обробці даних. Рекомендується її застосування у віртуальних засобах вимірювання з автоматичним обчисленням невизначеності.

**Ключові слова:** функція щільності вірогідності, апроксимація нормального розподілу.

## SHIFTED UP COSINE FUNCTION AS MODEL OF PROBABILITY DISTRIBUTION

Z.L. Warsza, M.J. Korczyński

The shifted up one period of cosine function with field under it normalized to 1 is proposed to be use as the unconventional model of probability density function (PDF) of symbol  $+COS$ . It could approximate Normal probability distribution in the range  $\pm 2,5$  standard deviation with accuracy of about  $\pm 0,02$ , which is fully acceptable in the evaluation of measurement uncertainty. Properties of the cosine based PDF are considered. The possibility of its applications in the routine data assessment and in virtual instruments with automatic uncertainty calculations is discussed and recommended.

**Keywords:** function of closeness of probability, approximation of normal distribution.