УДК 621.317

И.П. Захаров, Н.С. Шевченко

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина*

# ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ ВЫРАЖЕНИИ ВХОДНЫХ ВЕЛИЧИН В ДЕЦИБЕЛАХ

*В статье рассматривается процедура оценивания неопределенности результата измерения при выражении входных величин в децибелах. Получены соотношения для пересчета среднего арифметического, стандартных неопределенностей типа А и В, суммарной стандартной и расширенной неопределенности для величин, выраженных в децибелах в соответствующие характеристики для исходных величин. Рассчитаны значения относительных погрешностей, получаемых в этих случаях. Определены условия, при которых этими погрешностями можно пренебречь.*

***Ключевые слова**: неопределенность измерения, стандартная неопределенность, суммарная стандартная неопределенность, расширенная неопределенность, децибел, метод Монте-Карло.*

## Введение

В практике электрических, акустических, оптических и других видов измерений широкое распространение получила безразмерная единица − децибел. Он применяется как для выражения относительных величин (затухания, усиления, динамического и частотного диапазонов), так и для выражения параметров интенсивности – плотности потока мощности, уровня звукового давления и других энергетических и силовых величин относительно некоторого исходного значения, принятого за нулевое в децибелах. Удобство применения этой единицы измерения связано со свойствами логарифма: использование операций сложения и умножения вместо, соответственно, операций умножения и возведения в степень, а так же существенное уменьшение диапазона числовых значений величин, выраженных в децибелах, при работе в широком диапазоне исходных величин.

Значения исходных величин связаны со значениями величин, выраженных в децибелах нелинейной (показательной) зависимостью, что ставит задачу определения условий эквивалентности оценок неопределенности измерений, получаемых в обоих случаях.

Решение этой задачи является **целью данной статьи**.

## 1. Определение оценки измеряемой величины

В качестве оценки измеряемой величины при многократных измерениях берется среднее арифметическое отдельных наблюдений.

Запишем общее выражение для перевода в абсолютные значения $X_i$ отдельных показаний индикаторного блока $A_{иi}$, выраженных в дБ:

$$X_i = X_0 \cdot 10^{A_{иi}/M},$$

где $X_0$ – исходный уровень, выраженный в абсолютных единицах; $M$ – коэффициент, равный 10 в случае измерения энергетических величин, и 20 в случае измерения силовых величин.

Среднее арифметическое результатов отдельных наблюдений $X_i$ будет равно

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{A_{иi}}{M}}. \qquad (1)$$

Выразим значение отдельного показания индикаторного блока $A_{иi}$ через случайную погрешность $\Delta_i$:

$$A_{иi} = \bar{A}_и + \Delta_i, \qquad (2)$$

где $\bar{A}_и = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_{иi}$ – среднее арифметическое показаний индикаторного блока.

При подстановке выражения (2) в (1) получим:

$$\bar{X} = \frac{X_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{\bar{A}_и+\Delta_i}{M}} = \frac{X_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}} \cdot 10^{\frac{\Delta_i}{M}} =$$

$$= \frac{X_0}{n} \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}} \sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{\Delta_i}{M}} = \bar{X}^* \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{\Delta_i}{M}},$$

где $\bar{X}^* = X_0 \cdot 10^{\bar{A}_и/M}$ – оценка измеряемой величины, получаемая обычно при пересчете из среднего арифметического показаний индикаторного блока $\bar{A}_и$.

Наличие в последнем выражении величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\bar{A}_и/M}$ приводит к смещению результата измерения.

Можно показать, что это смещение при малых значениях $\Delta_i/M$ стремится к нулю. Действительно, представляя величину $10^{\Delta_i/M}$ в виде первых членов разложения в ряд Тейлора

$$10^{\Delta_i/M} = 1 + \frac{\Delta_i}{M}\ln 10,$$

получаем выражение:

$$\bar{X} = \frac{X_0}{n} \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}} \left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{M}\ln 10\right] = X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}} = \bar{X}^*,$$

так как $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i}{M}\ln 10 = \frac{\ln 10}{M}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

## 2. Оценивание стандартной неопределенности типа А

Рассчитаем стандартную неопределенность типа А измеряемой величины $\bar{X}$:

$$u_A(\bar{X}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_0 \cdot 10^{\frac{A_{иi}}{M}} - X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и+\Delta_i}{M}} - X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}}\right)^2} =$$

$$= X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\frac{\Delta_i}{M}} - 1\right)^2}.$$

Это выражение в предположении $\Delta_i / M \to 0$ можно привести к следующему виду:

$$u_A(\bar{X}) = \bar{X}^* \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{\Delta_i}{M}\ln 10 - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}.$$

С учетом выражения (2), можно записать:

$$u_A(\bar{X}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(A_{иi} - \bar{A}_и)^2} =$$

$$= \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* u_A(\bar{A}_и) \approx \begin{cases} 0{,}23 \cdot \bar{X}^* \cdot u_A\left(\bar{A}_и\right), & \text{при } M = 10; \\ 0{,}115 \cdot \bar{X}^* \cdot u_A\left(\bar{A}_и\right), & \text{при } M = 20, \end{cases}$$

где $u_A\left(\bar{A}_и\right) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(A_{иi} - \bar{A}_и)^2}$ – стандартная неопределенность типа А среднего арифметического показаний индикаторного блока.

Таким образом, при определенных значениях стандартной неопределенности типа А для наблюдаемых показаний индикатора $A_{иi}$ можно перейти к стандартной неопределенности $u_A(\bar{X})$ путем умножения $u_A\left(\bar{A}_и\right)$ на $\frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^*$.

## 3. Оценивание стандартной неопределенности типа В

Аналогичным образом получим выражение для стандартной неопределенности по типу В. Действительно, пусть

$$\bar{X} = X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и+\Delta}{M}} = X_0 \cdot 10^{\frac{\bar{A}_и}{M}} 10^{\frac{\Delta}{M}} = \bar{X}^* \cdot 10^{\frac{\Delta}{M}} \approx$$

$$\approx \bar{X}^*\left(1 + \Delta\frac{\ln 10}{M}\right),$$

где $\Delta$ – поправка на неисключенную систематическую погрешность (НСП) определения $\bar{A}_и$.

Тогда поправка на НСП определения $\bar{X}$ будет равна

$$\Delta X = \bar{X} - \bar{X}^* = \frac{\ln 10}{M}\bar{X}^* \cdot \Delta$$

и неопределенность измерения $\hat{X}$ по типу В равна

$$u_B(\bar{X}) = \frac{\ln 10}{M}\bar{X}^* \cdot u_B(\bar{A}_и) \approx \begin{cases} 0,23\bar{X}^* \cdot u_B(\bar{A}_и), & \text{при}\, M = 10; \\ 0,115\bar{X}^* \cdot u_B(\bar{A}_и), & \text{при}\, M = 20, \end{cases}$$

где $u_B(\bar{A}_и) = u(\Delta)$ − стандартная неопределенность по типу В измерения $\bar{A}_и$.

## 4. Оценивание стандартной суммарной и расширенной неопределенностей

Рассчитаем суммарную стандартную неопределенность $u_c(\bar{X})$

$$u_c(\bar{X}) = \sqrt{\left[c_A \cdot u_A(\bar{A}_и)\right]^2 + \left[c_B \cdot u_B(\bar{A}_и)\right]^2},$$

где $c_A = \dfrac{\partial X}{\partial \bar{A}_и} = \dfrac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^*$ и $c_B = \dfrac{\partial X}{\partial \Delta} = \dfrac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^*$ – коэффициенты чувствительности.

При подстановке коэффициентов чувствительности в выражение для $u_c(\bar{X})$, получаем

$$u_c(\bar{X}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot \sqrt{(u_A{}^2(\bar{A}_u) + u_B{}^2(\bar{A}_u)} =$$

$$= \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot u_c(\bar{A}_и) \approx \begin{cases} 0,23 \cdot \bar{X}^* \cdot u_c\left(\bar{A}_и\right), & \text{при } M = 10; \\ 0,115 \cdot \bar{X}^* \cdot u_c\left(\bar{A}_и\right), & \text{при } M = 20. \end{cases}$$

Расширенная неопределенность $U(\bar{X})$ будет равна [1]:

$$U(\bar{X}) = k \cdot u_c(\bar{X}),$$

где k – коэффициент охвата, определяемый для эффективного числа степеней свободы и доверительной вероятности по таблице Стьюдента.

Коэффициент охвата для абсолютных величин равен коэффициенту охвата для величин, выраженных в дБ, так как

$$\nu_{eff} = (n\text{-}1)\left[\frac{u_c(\bar{X})}{u_A(\bar{X})}\right]^4 = (n-1) \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot u_c(\bar{A}_u)}{\frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot u_A(\bar{A}_u)}\right]^4 = (n-1)\left[\frac{u_c(\bar{A}_u)}{u_A(\bar{A}_u)}\right]^4.$$

Т.о., расширенная неопределенность равна

$$U(\bar{X}) = k \cdot \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot u_c(\bar{A}_u) \approx$$

$$\approx \begin{cases} 0,23 \cdot \bar{X}^* \cdot U\left(\bar{A}_и\right), & \text{при } M = 10; \\ 0,115 \cdot \bar{X}^* \cdot U\left(\bar{A}_и\right), & \text{при } M = 20. \end{cases}$$

То есть можно рассчитывать суммарную стандартную неопределенность $u_c\left(\bar{A}_и\right)$ или расширенную неопределенность $U\left(\bar{A}_и\right)$, а затем переходить к суммарной стандартной неопределенности $u_c(\bar{X})$ или расширенной неопределенности $U(\bar{X})$ путем их умножения на $\left((\ln 10)/M\right) \cdot \bar{X}^*$.

## 5. Исследование погрешности полученных оценок

В статье произведен вывод формул, дающих возможность переводить полученные в дБ значения неопределенностей в абсолютные величины. При выводе формул использовалось разложение в ряд Тейлора, ограниченное членом первой степени. Поэтому существует необходимость анализа погрешности оценивания неопределенности, возникающей в результате линеаризации.

Расчет погрешности произведен методом Монте-Карло. Для этого осуществлено генерирование массива случайных чисел $\Delta$ с заданным СКО, нулевым математическим ожиданием и нормальным законом распределения объемом $10^5$.

Оценим относительную погрешность линеаризации для среднего арифметического $\bar{X}$:

$$\delta\bar{X} = \frac{\bar{X}^* - \bar{X}}{\bar{X}},$$

где $\bar{X} = \dfrac{X_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{\bar{A}_u + \Delta_i}{M}} = \bar{X}^* \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{\Delta_i}{M}}$ – действительное значение среднего арифметического; $\bar{X}^* = X_0 \cdot 10^{\bar{A}_и/M}$ – оценка измеряемой величины.

В результате вычислений был получен график, приведенный на рис. 1.

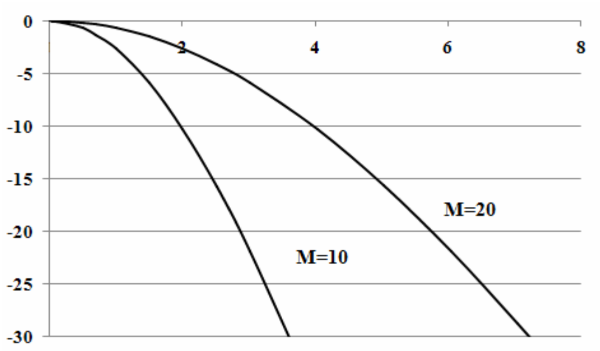


Рис. 1. Зависимость $\delta\bar{X}(S(\Delta_i))$

Оценим относительную погрешность линеаризации для стандартной неопределенности типа А $u_A(\bar{X})$:

$$\delta u_A(\bar{X}) = \frac{u_A{}^*(\bar{X}) - u_A(\bar{X})}{u_A(\bar{X})},$$

где $u_A(\bar{X}) = \bar{X}^* \sqrt{\dfrac{1}{n(n\text{-}1)}\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\frac{\Delta_i}{M}} - 1\right)^2}$ – действительное значение неопределенности по типу А;

$u_A{}^*(\bar{X}) = \dfrac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot u\left(\bar{A}_и\right)$ – значение среднего арифметического при разложении в ряд Тейлора.

В результате вычислений был получен график, приведенный на рис. 2.

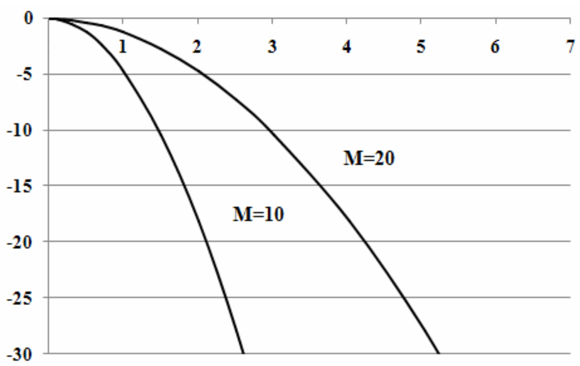


Рис. 2. Зависимость $\delta u_A(\bar{X})(S(\bar{\Delta}))$

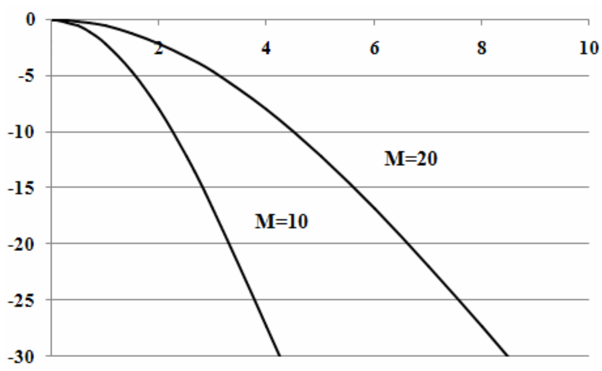


Рис. 3. Зависимость $\delta u_B(\bar{X})(S(\Delta_i))$

Оценим относительную погрешность линеаризации для стандартной неопределенности по типу В:

$$\delta u_B(\bar{X}) = \frac{u_B^*(\bar{X}) - u_B(\bar{X})}{u_B(\bar{X})},$$

где $u_B(\bar{X}) = \bar{X}^* \cdot u_B(10^{\Delta/M} - 1)$ – действительное значение неопределенности по типу В;

$u_B^*(\bar{X}) = \frac{\ln 10}{M} \cdot \bar{X}^* \cdot u_B\left(\bar{A}_и\right)$ – значение неопределенности по типу В при разложении в ряд Тейлора.

Результат вычисления $\delta u_B(\bar{X})$ приведен на рис. 3.

## Выводы

1. Процедура вычисления среднего арифметического входных величин, выраженных в децибелах с последующим пересчетом в оценку измеряемой величины, дает, из-за наличия связывающей их нелинейной зависимости, смещенную оценку измеряемой величины. Это смещение не будет превышать 10% при значениях СКО случайной погрешности не более 2 дБ для энергетических величин и 4 дБ для силовых величин.

2. Относительная погрешность оценивания стандартной неопределенности измерения типа А не будет превышать 15% при значениях стандартной неопределенности типа А величины, выраженной в децибелах не более 1,8 дБ для энергетических величин и 3,6 дБ для силовых величин.

3. Относительная погрешность оценивания стандартной неопределенности измерения типа В не будет превышать 15% при значениях стандартной неопределенности типа В величины, выраженной в децибелах не более 2,8 дБ для энергетических величин и 5,6 дБ для силовых величин.

## Список литературы

*1. JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – JCGM, 2008. – 120 p.*

*Поступила в редколлегию 16.07.2009*

**Рецензент**: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАННЯ ПРИ ВИРАЖЕННІ ВХІДНИХ ВЕЛИЧИН В ДЕЦИБЕЛАХ

І.П. Захаров, Н.С. Шевченко

*У статті розглядається процедура оцінювання невизначеності результату вимірювань при вираженні вхідних величин у децибелах. Отримано співвідношення для перерахунку середнього арифметичного, стандартних невизначеностей типу А і В, сумарної стандартної й розширеної невизначеності для величин, виражених у децибелах у відповідні характеристики для вихідних величин. Розраховано значення відносних похибок, що виникають у цих випадках. Визначено умови, при яких цими похибками можна знехтувати.*

***Ключові слова**: невизначеність вимірювань, стандартна невизначеність, сумарна стандартна невизначеність, розширена невизначеність, децибел, метод Монте-Карло.*

## FEATURES OF UNCERTAINTY EVALUATION OF MEASUREMENT AT EXPRESSION OF INPUT QUANTITIES IN DECIBELS

I.P. Zakharov, N.S. Shevchenko

*In article the procedure of uncertainty evaluation of the result of measurement is considered at expression of input quantities in decibels. The ratio for recalculation of an arithmetic mean, standard uncertainties of type A and B, the combined standard and expanded uncertainties for the quantities expressed in decibels into corresponding characteristics for output quantities were received. Values of the relative errors appeared in these cases were calculated. The conditions at which these errors can be neglected were defined.*

***Keywords**: uncertainty of measurement, standard uncertainty, combined standard uncertainty, expanded uncertainty, decibel, a method of Monte-Carlo.*