УДК 681.2.088

А.М. Коцюба

ДП «Український НДНЦ проблем стандартизації, сертифікації та якост», Київ, Україна

ПАРАДОКС З АНОМАЛЬНО ВИСОКИМ ЗНАЧЕННЯМ КОЕФІЦІЄНТУ КОРЕЛЯЦІЇ ПІД ЧАС РОЗРАХУНКУ СУМАРНОЇ СТАНДАРТНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В роботі розглядається явище аномально високого значення коефіцієнту кореляції, що виникає за певних обставин під час оцінювання невизначеності вимірювання.

Ключові слова: *невизначеність вимірювання, коефіцієнт кореляції, сумарна стандартна невизначеність, аномальне значення.*

Вступ

За моделювального підходу до оцінювання невизначеності вимірювання [1, 2] нерідко під час оцінювання сумарної стандартної невизначеності виникає необхідність урахування кореляції між вхідними величинами. В принципі таке врахування можливе через коефіцієнти кореляції. З теорії кореляції відомо, що їх (коефіцієнтів кореляції) значення за модулем не може перевищувати одиницю. Однак, як буде показано нижче, під час оцінювання невизначеності вимірювання може скластися ситуація, коли формально оцінене значення коефіцієнта кореляції перевищуватиме одиницю.

Метою даної роботи є демонстрація парадоксу з аномально високим значенням коефіцієнту кореляції, що може виникнути під час оцінювання невизначеності вимірювання за певних обставин.

Постановка задачі. Відомо [1, 2], що одна і та ж вимірювальна процедура під час оцінювання невизначеності вимірювання може бути описана різними математичними моделями, тобто рівняння $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$, яке пов'язує вихідну вимірювану величину y з вхідними величинами x_i, може бути записане в різній формі, з різною кількістю вхідних величин. Вхідні величини можуть бути як незалежні, так і корельовані між собою. При цьому вибір модельного рівняння обумовлюється зручностями розрахунку (наочністю моделі, зручностями пошуку коефіцієнтів впливу тощо) та наявною вихідною інформацією для розрахунку стандартних невизначеностей вхідних величин. За корельованих вхідних величин розрахунок сумарної стандартної невизначеності потребує врахування кореляції, що, як уже зазначалося, можна зробити через коефіцієнти кореляції.

Розглянемо випадок (для простоти і наочності формул, однак без втрати рівня узагальненості), коли вибране модельне рівняння має лише дві вхідні величини, тобто

$$y = f(x_1, x_2). \qquad (1)$$

Нехай вхідні величини x_1, x_2 корельовані між собою, оскільки залежать від величин z, z_1, z_2, серед яких z спільна, тобто $x_1 = x_1(z, z_1)$, $x_2 = x_2(z, z_2)$. Тоді модельне рівняння через величини z, z_1, z_2 може бути записане як

$$y = f\left(x_1(z, z_1), x_2(z, z_2)\right) = f_1(z, z_1, z_2). \quad (2)$$

Припустимо, що величини $z = z(\xi_0, \xi)$, $z_1 = z_1(\xi_1, \xi)$, $z_2 = z_2(\xi_2, \xi)$, тобто також корельовані між собою, оскільки мають спільну величину ξ. Тоді через некорельовані величини ξ_0, ξ, ξ_1, ξ_2 модельне рівняння може бути записане у вигляді

$$y = f_1\left(z(\xi, \xi_0), z_1(\xi_1, \xi_0), z_2(\xi_2, \xi_0)\right) = \\ = f_2(\xi, \xi_0, \xi_1, \xi_2). \quad (3)$$

Звичайно, під час оцінювання сумарної стандартної невизначеності для уникнення розгляду кореляцій можна за вихідне вибрати модельне рівняння (3). Однак може бути, що зручніше для розрахунку вибрати модельне рівняння (1). Це може бути пов'язано, наприклад, з незручністю пошуку коефіцієнтів впливу $\partial f_2/\partial \xi_i$. Водночас припустимо, що в зв'язку з наявною інформацією розрахунок стандартних невизначеностей величин x_1, x_2 можливий лише через стандартні невизначеності величин ξ_0, ξ, ξ_1, ξ_2. Здавалося б, алгоритм вирішення цієї задачі зрозумілий і не містить несподіванок. Однак, насправді, як показано нижче, формальне слідування алгоритму призводить до парадоксу.

Основна частина

Згаданий вище алгоритм полягає в наступному:

1. Оцінюються стандартні невизначеності некорельованих вхідних величин $u(\xi_0)$, $u(\xi)$, $u(\xi_1)$, $u(\xi_2)$.

2. За стандартними невизначеностями некорельованих вхідних величин розраховують стандартні невизначеності величин z, z_1, z_2, наприклад,

$$u(z) = \sqrt{(\partial z/\partial \xi_0)^2 \cdot u^2(\xi_0) + (\partial z/\partial \xi)^2 \cdot u^2(\xi)}.$$

3. Знаходять коефіцієнти попарної кореляції величин z, z_1, z_2.

4. Розраховують стандартні невизначеності величин x_1, x_2, наприклад,

$$u(x_1) = \sqrt{(\partial x_1/\partial z)^2 \cdot u^2(z) + (\partial x_1/\partial z_1)^2 \cdot u^2(z_1) + \\ +2 \cdot (\partial x_1/\partial z) \cdot (\partial x_1/\partial z_1) \cdot r(z, z_1) \cdot u(z) \cdot u(z_1)},$$

де $r(z, z_1)$ – коефіцієнт кореляції величин z, z_1.

5. Оцінюють коефіцієнт кореляції $r(x_1, x_2)$ величин x_1, x_2.

6. Розраховують сумарну стандартну невизначеність величини y за формулою

$$u(y) = \sqrt{(\partial f/\partial x_1)^2 \cdot u^2(x_1) + (\partial f/\partial x_2)^2 \cdot u^2(x_2) + \\ +2 \cdot (\partial f/\partial x_1) \cdot (\partial f/\partial x_2) \cdot r(x_1, x_2) \cdot u(x_1) \cdot u(x_2)}.$$

Оцінимо значення коефіцієнту кореляції $r(x_1, x_2)$, що використовуються в даному алгоритмі:

$$r(x_1, x_2) = \frac{(\partial x_1/\partial z) \cdot (\partial x_2/\partial z) \cdot u^2(z)}{u(x_1) \cdot u(x_2)}. \quad (4)$$

З врахуванням того, що

$$u(x_1) = \sqrt{(\partial x_1/\partial z)^2 \cdot u^2(z) + (\partial x/\partial z_1)^2 \cdot u^2(z_1) + \\ +2 \cdot (\partial x_1/\partial z) \cdot (\partial x_1/\partial z_1) \cdot r(z, z_1) \cdot u(z) \cdot u(z_1)};$$

$$u(x_2) = \sqrt{(\partial x_2/\partial z)^2 \cdot u^2(z) + (\partial x_2/\partial z_2)^2 \cdot u^2(z_2) + \\ +2 \cdot (\partial x_2/\partial z) \cdot (\partial x_2/\partial z_2) \cdot r(z, z_2) \cdot u(z) \cdot u(z_2)},$$

та поділивши чисельник та знаменник в (4) на чисельник, отримаємо:

$$r(x_1, x_2) =$$

$$= \left(\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z_1}\right)^2 \cdot u^2(z_1)}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 \cdot u^2(z)} \left(1 + 2 \cdot \frac{\frac{\partial x_1}{\partial z} \cdot r(z, z_1) \cdot u(z)}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z_1}\right) \cdot u(z_1)} \right)} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\sqrt{\left[1 + \frac{\left(\frac{\partial x_2}{\partial z_2}\right)^2 \cdot u^2(z_2)}{\left(\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)^2 \cdot u^2(z)} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\frac{\partial x_2}{\partial z} \cdot r(z, z_2) \cdot u(z)}{\left(\frac{\partial x_2}{\partial z_2}\right) \cdot u(z_2)} \right) \right]} \right)^{-1}.$$

Якщо величини z, z_1, z_2 не корельовані, то коефіцієнт кореляції

$$r(x_1, x_2) =$$

$$= \left(\sqrt{\left[1 + \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z_1}\right)^2 \cdot u^2(z_1)}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 \cdot u^2(z)} \right] \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{\partial x_2}{\partial z_2}\right)^2 \cdot u^2(z_2)}{\left(\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)^2 \cdot u^2(z)} \right]} \right)^{-1}$$

завжди менший від одиниці, що і повинно бути. Однак коли величини z, z_1, z_2 корельовані, то може виникнути ситуація, коли формально розраховане значення коефіцієнту кореляції перевищуватиме 1, що суперечить теорії кореляції [3].

З подібною ситуацією автор цієї роботи зіткнувся, коли розглядав з метою демонстрації в навчальному процесі способи уникнення кореляції різні модельні рівняння для розрахунку невизначеності вимірювання результату визначення вологи в продукті за ГОСТ 29246-91.

Дійсно, з однієї сторони модельне рівняння для визначення масової частки вологи в продукті можна записати у вигляді

$$X = \frac{\Delta m_1}{\Delta m_2} \cdot 100\%, \quad (5)$$

де Δm_1 – втрата маси при висушуванні проби; Δm_2 – маса проби до висушування; X – масова доля вологи в %.

Вхідні величини Δm_1, Δm_2 – корельовані між собою, оскільки $\Delta m_1 = m - m_1$, $\Delta m_2 = m - m_2$, тобто обидві вхідні величини мають спільну змінну. Тут m – маса бюкси з кришкою та пробою для аналізу до висушування, m_1 – маса бюкси з кришкою та пробою для аналізу після висушування, m_2 – маса бюкси з кришкою. З іншої сторони модельне рівняння можна запитати у вигляді

$$X = \left((m - m_1)/(m - m_2)\right) \cdot 100\% . \qquad (6)$$

Причому всі вхідні величини корельовані, якщо вони визначались на одних і тих же вагах.

В цьому випадку $\partial x_1/\partial z = \partial \Delta m_1/\partial m = 1$, $\partial x_2/\partial z = \partial \Delta m_2/\partial m = 1$, $\partial x_1/\partial z_1 = \partial \Delta m_1/\partial m_1 = -1$, $\partial x_2/\partial z_2 = \partial \Delta m_2/\partial m_2 = -1$. Тоді знаменник виразу для коефіцієнта кореляції набуде вигляду (з урахуванням, що $u(z) \approx u(z_1) \approx u(z_2)$ та $r(z, z_1) \equiv r(m, m_1) \approx r(z, z_2) \equiv r(m, m_2) = r$:

$$\left(2 - 2 \cdot r(z, z_1)\right) \cdot \left(2 - 2 \cdot r(z, z_2)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left[1 - r(z, z_1)\right] \times \left[1 - r(z, z_2)\right] = 4 \cdot \left(r^2 - 2 \cdot r + 1\right).$$

Зазначимо, що для даного прикладу коефіцієнти кореляції $r(m, m_1), r(m, m_2)$ завжди додатні. Таким чином, за умови, що $r > 0{,}5$ коефіцієнт кореляції $r(x_1, x_2) \equiv r(\Delta m_1, \Delta m_2) > 1$. У прикладі з вологою, що розглядав автор, обидва коефіцієнти кореляції $r(m, m_1)$ та $r(m, m_2)$ мали вищі за 0,5 значення.

Обговорення результатів

Отже, як показано, формальне слідування алгоритму оцінювання невизначеності, який, до речі, повністю відповідає принципам GUM [1], може призвести до казусу – значення коефіцієнта кореляції, що перевищує одиницю. Це, швидше за все, пов'язане з подвійним урахуванням одних і тих же джерел кореляції. Непрямим пiдтвердженням цього є аналіз прикладу з визначення вологи за ГОСТ 29246-91. В цьому випадку розрахунок сумарної стандартної невизначеності за модельним рівнянням, вираженим через некорельовані вхідні величини (в даній роботі не наводиться і залежить від конструктивних особливостей задіяних ваг, тобто, це механічні ваги чи електронні, рівноплечі чи одноплечі, з нижнім чи верхнім розташуванням тарілок тощо), та за рівнянням (6) дали однаковий результат. Із зрозумілих причин це значення невизначеності не ставилось під сумнів. Досягти співпадіння значення сумарної стандартної невизначеності, розрахованої за вказаними рівняннями, та рівнянням (5), а також уникнути парадоксу із значенням коефіцієнта кореляції, що перевищує одиницю, вдалося лише тоді, коли формально кореляцією величин m, m_1 та m, m_2 під час розрахунку коефіцієнта кореляції $r(\Delta m_1, \Delta m_2)$ знехтували. Цілком ймовірно, що таким чином було усунуто подвійне врахування кореляції, обумовленої одними і тими ж причинами.

Втім, стверджувати це напевне зарано, оскільки таке співпадіння могло бути випадковим як наслідок конкретного виду модельного рівняння.

Для встановлення, чи можна усунути вказаний парадокс подібним чином у всіх випадках незалежно від виду модельного рівняння і наскільки це коректно, необхідні додаткові дослідження, що є предметом подальшої роботи автора.

Єдина рекомендація, яку можна дати на даному етапі, полягає в тому, що в подібних випадках, коли коефіцієнт кореляції $r(x_1, x_2)$ може бути розрахований лише за рівнянням типу (4) (нестатистичним шляхом) через стандартні невизначеності також корельованих величин, від яких в свою чергу залежать величини x_1, x_2, потрібно перейти до іншого виду модельного рівняння.

Список літератури

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993.

2. EUROLAB Technical Report 1/2006. Guide to the Evaluation of Measurement Uncertainty for Quantitative Test Results. – EUROLAB, France, August 2006.

3. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

Надійшла до редколегії 15.07.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.П. Мачехін, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

ПАРАДОКС С АНОМАЛЬНО ВЫСОКИМ ЗНАЧЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ СУММАРНОЙ СТАНДАРТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.Н. Коцюба

В работе рассматривается явление аномально высокого значения коэффициента корреляции, возникающее при определенных обстоятельствах при оценивании неопределенности измерения.

Ключевые слова: *неопределенность измерения, коэффициент корреляции, суммарная стандартная неопределенность, аномальное значение.*

PARADOX WITH IT IS ABNORMAL HIGH VALUE OF FACTOR OF CORRELATION AT CALCULATION OF COMBINED STANDARD UNCERTAINTY

A.M. Kotsjuba

In work the phenomenon is considered is abnormal high value of factor of the correlation, arising at the certain circumstances at evalution of measurement uncertainty.

Keywords: *uncertainty of measurement, factor of correlation, combined standard uncertainty, abnormal value.*