

УДК 006.91

М.П. Сергиенко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ИХ ВЗАИМНОМ ПЕРЕСЧЕТЕ

В работе исследуются вопросы оценивания стандартной неопределенности при пересчете одних дискретно измеренных динамических характеристик в другие. В частности рассмотрены случаи оценивания неопределенности при нахождении переходной характеристики по дискретно измеренным импульсной и комплексной частотной характеристикам; при нахождении импульсной характеристики по переходной и комплексной частотной характеристикам; при нахождении комплексной частотной характеристики по переходной, импульсной и амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам.

Ключевые слова: *стандартная неопределенность, средство измерительной техники, динамическая характеристика, переходная характеристика, импульсная характеристика, комплексная частотная характеристика.*

Введение

В настоящее время динамические измерения получают все большее развитие, что связано с увеличением количества человеческих знаний о природе различных физических процессов, расширением возможностей исследовательского оборудования в различных областях науки и техники, повышением точности и быстродействия средств измерительной техники (СИТ).

Динамические свойства СИТ описываются их динамическими характеристиками (ДХ) [1 – 8], кото-

рые при современном уровне науки и технологий в подавляющем большинстве случаев определяются путем дискретных измерений характеристики с последующей ее идентификацией (то есть определением порядка и вида математической модели и аналитического выражения, оптимально описывающих ДХ) [9].

Целью данной работы является нахождение оценок стандартной неопределенности при пересчете одних дискретно измеренных ДХ в другие. Необходимость этого вызвана широким внедрением концепции неопределенности в сферу оценивания точности измерений [10, 11], и явно недостаточным ее

применением в рамках теории динамических измерений. С точки зрения классической теории погрешностей эта задача решена в [12].

Взаимный пересчет дискретно измеренных ДХ

При дискретном измерении ограниченной по времени (частоте) ДХ при пересчете одной ДХ в другую интегрирование заменяется суммированием полученных дискретных отсчетов исходной ДХ. В этом случае вместо интегральных форм преобразований Фурье и Лапласа используются их дискретные формы. Для взаимного пересчета ДХ применяются следующие выражения.

Для определения дискретного значения переходной характеристики:

– по импульсной характеристике

$$h(i\Delta t) = \Delta t \sum_{n=1}^i g(n\Delta t), \quad (1)$$

где Δt - период дискретизации переходной (импульсной) характеристики; $g(n\Delta t)$ - дискретные значения импульсной характеристики;

– по комплексной частотной характеристике $W(j\omega)$ – дискретное обратное преобразование Фурье от $W(j\omega)/(j\omega)$:

$$\begin{aligned} h(i\Delta t) &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{W(jn\Delta\omega)}{jn\Delta\omega} e^{jn\Delta\omega\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{W(jn\Delta\omega)}{jn} e^{jn\Delta\omega\Delta t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta\omega$ - период дискретизации круговой частоты ω ;

– по передаточной функции СИТ $W(p)$ – дискретное обратное преобразование Лапласа от $W(p)/p$

$$\begin{aligned} h(i\Delta t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \frac{W(p)}{p} e^{ip\Delta t} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=1}^N \frac{W(n\Delta p)}{n} e^{in\Delta p\Delta t}, \end{aligned} \quad (3)$$

где Δp – период дискретизации переменной p оператора Лапласа.

Для определения дискретного значения импульсной характеристики:

– по переходной характеристике

$$g(i\Delta t) = \frac{h(i\Delta t) - h[(i-1)\Delta t]}{\Delta t}; \quad (4)$$

– по комплексной частотной характеристике – дискретное обратное преобразование Фурье от $W(j\omega)$

$$g(i\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N W(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega\Delta t}; \quad (5)$$

– по передаточной функции – дискретное обратное преобразование Лапласа от $W(p)$

$$\begin{aligned} g(i\Delta t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} W(p) e^{ip\Delta t} dp = \\ &= \frac{\Delta p}{2\pi j} \sum_{n=1}^N W(n\Delta p) e^{in\Delta p\Delta t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения дискретного значения комплексной частотной характеристики:

– по переходной характеристике

$$W(jn\Delta\omega) = jn\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N h(i\Delta t) e^{-jn\Delta\omega\Delta t}; \quad (7)$$

– по импульсной характеристике – дискретное преобразование Фурье от $g(t)$

$$W(jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) e^{-jn\Delta\omega\Delta t}; \quad (8)$$

– по совокупности амплитудно-частотной $A(n\Delta\omega)$ и фазочастотной $\Phi(n\Delta\omega)$ характеристик (АЧХ и ФЧХ)

$$W(jn\Delta\omega) = A(n\Delta\omega) e^{j\Phi(n\Delta\omega)}. \quad (9)$$

Для определения передаточной функции

– по переходной характеристике

$$W(p) = p\Delta t \sum_{i=1}^N h(i\Delta t) e^{-ip\Delta t}; \quad (10)$$

– по импульсной характеристике – дискретное преобразование Лапласа от $g(t)$

$$W(p) = \Delta t \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) e^{-ip\Delta t}; \quad (11)$$

– по комплексной частотной характеристике путем замены $(j\omega)$ на p .

Оценивание стандартных неопределенностей ДХ

Стандартная неопределенность ДХ ζ , полученной путем пересчета других ДХ, измеренных в дискретных точках ξ_i , в общем случае может быть рассчитана по формуле

$$u(\zeta) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_i} \right)^2} u^2(\xi_i), \quad (12)$$

где $u(\xi_i)$ – стандартные неопределенности дискретно измеренных значений исходной характеристики. При этом не учитываются вклады неопределенностей различных неинформативных параметров и условия окружающей среды, которые могут быть учтены известными методами [11].

Если стандартные неопределенности дискретно измеренных значений исходной характеристики одинаковы, то есть $u(\xi_1) = u(\xi_2) = \dots = u(\xi)$, что выполняется в большинстве практических случаев, то стандартная неопределенность

$$u(\zeta) = u(\xi) \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_i} \right)^2}. \quad (13)$$

Стандартная неопределенность переходной характеристики при определении:

- по дискретно измеренной импульсной характеристике (выражение (1))

$$u(h(i\Delta t)) = \Delta t \sqrt{\sum_{n=1}^i u^2(g(n\Delta t))} = \Delta t \sqrt{i} u(g(\Delta t)); \quad (14)$$

- по комплексной частотной характеристике (выражение (2)) может быть определена из следующих соображений. Представим выражение (2) в виде

$$h(i\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{W(jn\Delta\omega)}{n} [\sin(in\Delta\omega\Delta t) - j\cos(in\Delta\omega\Delta t)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} [\alpha(n) - j\beta(n)],$$

где $\alpha(n) = W(jn\Delta\omega) \sin(in\Delta\omega\Delta t)$;
 $\beta(n) = W(jn\Delta\omega) \cos(in\Delta\omega\Delta t)$.

Стандартная неопределенность полученной переходной характеристики

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 u^2(\alpha(n)) + \left(-\frac{j}{n}\right)^2 u^2(\beta(n)) \right]} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} [u^2(\alpha(n)) + u^2(\beta(n))]}.$$

Неопределенности величин $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ соответственно имеют вид:

$$u(\alpha(n)) = \sin(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega));$$

$$u(\beta(n)) = \cos(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega)),$$

поэтому

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} u^2(W(jn\Delta\omega))}. \quad (15)$$

Если $u(W(j\Delta\omega)) = u(W(j2\Delta\omega)) = \dots = u(W(j\Delta\omega))$, то

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} u^2(W(j\Delta\omega))}.$$

Если при этом $N \rightarrow \infty$, то сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

[13], и тогда

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\sqrt{6}} u(W(j\Delta\omega)). \quad (16)$$

Стандартная неопределенность импульсной характеристики при определении:

- по дискретно измеренной переходной характеристике в соответствии с выражением (4)

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{u^2(h(i\Delta t)) + u^2(h[(i-1)\Delta t])}. \quad (17)$$

Если $u(h(i\Delta t)) = u(h[(i-1)\Delta t]) = u(h(\Delta t))$, то

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} u(h(\Delta t)); \quad (18)$$

- по комплексной частотной характеристике в соответствии с выражением (5) может быть определена следующим образом.

Представим выражение (5) в виде

$$g(i\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N W(jn\Delta\omega) [\cos(in\Delta\omega\Delta t) + j\sin(in\Delta\omega\Delta t)] = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N [\alpha(n) + j\beta(n)],$$

где $\alpha(n) = W(jn\Delta\omega) \cos(in\Delta\omega\Delta t)$;

$\beta(n) = W(jn\Delta\omega) \sin(in\Delta\omega\Delta t)$.

Стандартная неопределенность импульсной характеристики в этом случае будет иметь вид

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N [u^2(\alpha(n)) + j^2 u^2(\beta(n))]} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N [u^2(\alpha(n)) - u^2(\beta(n))]},$$

где $u(\alpha(n)) = \cos(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega))$;

$u(\beta(n)) = \sin(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega))$.

Стандартная неопределенность импульсной характеристики

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \cos(2in\Delta\omega\Delta t) u^2(W(jn\Delta\omega))}. \quad (19)$$

Если $W(j\Delta\omega) = W(j2\Delta\omega) = \dots = W(j\Delta\omega)$, тогда

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \cos(2in\Delta\omega\Delta t) u^2(W(j\Delta\omega))}. \quad (20)$$

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики при ее нахождении:

- по переходной характеристике в соответствии с выражением (7) может быть оценена следующим образом. Представим выражение (7) в виде

$$W(jn\Delta\omega) = n\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N jh(i\Delta t) [\cos(-in\Delta\omega\Delta t) + j\sin(-in\Delta\omega\Delta t)] = n\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N h(i\Delta t) [\sin(in\Delta\omega\Delta t) + j\cos(in\Delta\omega\Delta t)] = n\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N [\alpha(n) + j\beta(n)],$$

где $\alpha(n) = h(i\Delta t) \sin(in\Delta\omega\Delta t)$;

$\beta(n) = h(i\Delta t) \cos(in\Delta\omega\Delta t)$.

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = n\Delta\omega\Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [u^2(\alpha(n)) - u^2(\beta(n))]},$$

а стандартные неопределенности $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ равны соответственно

$$u(\alpha(n)) = \sin(in\Delta\omega\Delta t) u(h(i\Delta t)) ;$$

$$u(\beta(n)) = \cos(in\Delta\omega\Delta t) u(h(i\Delta t)) .$$

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = n\Delta\omega\Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [2\sin^2(in\Delta\omega\Delta t) - 1] u^2(h(i\Delta t))} . \quad (21)$$

Если $h(\Delta t) = h(2\Delta t) = \dots = h(N\Delta t)$, тогда

$$u(W(jn\Delta\omega)) = n\Delta\omega\Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [2\sin^2(in\Delta\omega\Delta t) - 1] u^2(h(\Delta t))} ; \quad (22)$$

- по импульсной характеристике в соответствии с выражением (8) может быть оценена аналогично. Запишем выражение (8) в следующем виде

$$W(jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) [\cos(-in\Delta\omega\Delta t) + j\sin(-in\Delta\omega\Delta t)] = \Delta t \sum_{i=1}^N [\alpha(n) + j\beta(n)] ,$$

где $\alpha(n) = g(i\Delta t) \cos(-in\Delta\omega\Delta t)$;

$$\beta(n) = g(i\Delta t) \sin(-in\Delta\omega\Delta t) .$$

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [u^2(\alpha(n)) - u^2(\beta(n))]} ,$$

где $u(\alpha(n)) = \cos(-in\Delta\omega\Delta t) u(g(i\Delta t))$,

$$u(\beta(n)) = \sin(-in\Delta\omega\Delta t) u(g(i\Delta t))$$
 - стандартные

неопределенности величин $\alpha(n)$ и $\beta(n)$.

Стандартная неопределенность

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N \cos^2(-2in\Delta\omega\Delta t) u^2(g(i\Delta t))} . \quad (23)$$

Если $g(\Delta t) = g(2\Delta t) = \dots = g(N\Delta t)$, то

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N \cos^2(-2in\Delta\omega\Delta t) u^2(g(\Delta t))} ; \quad (24)$$

- по АЧХ и ФЧХ, полученным экспериментально, в соответствии с выражением (9) аналогичным образом.

Представим выражение (9) в алгебраической форме [13]

$$W(jn\Delta\omega) = P(n\Delta\omega) + jQ(n\Delta\omega) ,$$

где $P(n\Delta\omega) = A(n\Delta\omega) \cos(\Phi(n\Delta\omega))$;

$Q(n\Delta\omega) = A(n\Delta\omega) \sin(\Phi(n\Delta\omega))$ - соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики.

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики в этом случае будет иметь вид

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \sqrt{u^2(P(n\Delta\omega)) + j^2 u^2(Q(n\Delta\omega))} = \sqrt{u^2(P(n\Delta\omega)) - u^2(Q(n\Delta\omega))} ,$$

где квадраты стандартных неопределенностей

$$u^2(P(n\Delta\omega)) = \cos^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(A(n\Delta\omega)) +$$

$$+ A^2(n\Delta\omega) \sin^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(\Phi(n\Delta\omega)) ;$$

$$u^2(Q(n\Delta\omega)) = \sin^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(A(n\Delta\omega)) +$$

$$+ A^2(n\Delta\omega) \cos^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(\Phi(n\Delta\omega)) .$$

Подставляя эти выражения в предыдущее, можно получить формулу для оценивания стандартной неопределенности комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = [\cos(2\Phi(n\Delta\omega)) \times \times [u^2(A(n\Delta\omega)) - A^2(n\Delta\omega) u^2(\Phi(n\Delta\omega))]]^{\frac{1}{2}} . \quad (25)$$

Стандартные неопределенности передаточных функций можно получить аналогично либо из неопределенностей комплексной частотной характеристики путем замены $j\Delta\omega$ на оператор Лапласа p .

Выводы

Проведенное исследование позволяет осуществлять оценивание неопределенности при взаимном пересчете дискретно измеренных ДХ. Полученные выражения справедливы для СИТ, моделируемых динамическими звеньями любого типа, что существенно упрощает процедуру получения результата измерения и его неопределенности.

Список литературы

1. ГОСТ 8.009-84 ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. - М.: Изд-во стандартов, 1988. - 38 с.
2. ГОСТ 8.256-77 ГСИ. Нормирование и определение динамических характеристик аналоговых средств измерений. Основные положения. - М.: Изд-во стандартов, 1980. - 8 с.
3. ГОСТ 8.508-84 ГСИ. Метрологические характеристики средств измерений и точностные характеристики средств автоматизации ГСП. Общие методы оценки и контроля. - М.: Изд-во стандартов, 1984. - 53 с.
4. МИ 02-001-96 ГСИ. Методика оценивания погрешностей измерения динамических характеристик линейных средств измерений. - Львов: ГНИИ «Система», 1996. - 77 с.
5. МИ 1951-88 ГСИ. Динамические измерения. Термины и определения. - М.: Изд-во стандартов, 1990. - 17 с.
6. РТМ 25.191-75 Средства измерения и автоматизации ГСП. Определение динамических характеристик. - М.: Изд-во стандартов, 1977. - 44 с.
7. МИ 2090-90 Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения. - М.: Изд-во стандартов, 1991. - 64 с.
8. РД 50-453-84 Характеристики погрешности средств измерений в реальных условиях эксплуатации. Методы расчета. - М.: Изд-во стандартов, 1988. - 17 с.
9. Грановский В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. - Л.: Энергоатомиздат, 1984. - 220 с.

10. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO, Geneva, First Edition. – 1995 – 101 p. Пер. с англ. – СПб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999. – 126 с.

11. Захаров И.П. Теория неопределенности в измерениях: учеб. пособие / И.П. Захаров, В.Д. Кукуш. - Х.: Консум, 2002. – 256 с.

12. Сергиенко М.П. Исследование трансформации погрешностей динамических характеристик средств измерительной техники при их взаимном пересчете / М.П. Сергиенко // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.: ЦНДІ НУ, 2007. – Вип. 4. – С. 108-111.

13. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981. – 718 с.

Поступила в редколлегию 3.07.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ЇХ ВЗАЄМНОМУ ПЕРЕРАХУВАННІ

М.П. Сергиенко

В роботі досліджуються питання оцінювання стандартної невизначеності при перерахуванні одних дискретно вимірних динамічних характеристик в інші. Зокрема розглянуті випадки оцінювання невизначеності при знаходженні перехідної характеристики за дискретно вимірними імпульсною та комплексною частотною характеристиками; при знаходженні імпульсної характеристики за дискретно вимірними перехідною та комплексною частотною характеристиками; при знаходженні комплексної частотної характеристики за перехідною, імпульсною та амплітудно-частотною і фазочастотною характеристиками.

Ключові слова: стандартна невизначеність, засіб вимірювальної техніки, динамічна характеристика, перехідна характеристика, імпульсна характеристика, комплексна частотна характеристика.

THE UNCERTAINTY OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS BY THEIR MUTUAL TRANSLATION

M.P. Sergienko

The questions of estimation standard uncertainty by translation from ones dynamic characteristics into others are research in this work. Specifically the cases of estimation uncertainty considered when a transient characteristic got from a pulse characteristic or a complex frequency characteristic; a pulse characteristic got from a transient characteristic or a complex frequency characteristic; a complex frequency characteristic got from a transient characteristic or a pulse characteristic or from an amplitude-frequency characteristic and a phase-frequency characteristic.

Keywords: standard uncertainty, measurement instrument, dynamic characteristic, transient characteristic, pulse characteristic, complex frequency characteristic.