УДК 519.00.00

Н.А. Яремчук, М.В. Галёвская

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», Киев, Украина

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОСТИ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В статье приведен анализ методов оценивания результата и неопределенности косвенного измерения при нелинейности модельного уравнения и возможности линеаризации уравнения неопределенности. Рассмотрены методы с сохранением составляющих высокого порядка при разложении в ряд Тейлора, с использованием интервального анализа, с использованием редуктивного интервального анализа, с использованием моделирования по методу Монте-Карло и метод приведения.

Ключевые слова: *неопределенность, косвенное измерение, нелинейность уравнения неопределенности.*

Постановка проблемы

При косвенном измерении модельное уравнение связывает измеряемую величину Y с величинами-аргументами $x_1, x_2, ...x_m$:

$$Y = f(x_1, x_2, ...x_m). \qquad (1)$$

При возможности линеаризации уравнения неопределенности, оценку измеряемой величины находят в соответствии с уравнением (1), а комбинированную стандартную неопределенность $u_c(y)$ по формуле:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot u(x_i, x_j), \qquad (2)$$

где $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ – ковариация между x_i и x_j; $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i = 1, 2, ...m)$ – частные производные (коэффициенты влияния отдельных составляющих неопределенности).

При отсутствии корреляции между аргументами, формула (2) принимает вид:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\cdot u^2(x_i), \qquad (3)$$

где $u(x_i)$ – стандартные неопределенности аргументов.

Если нелинейность f существенна, в формулу (3) необходимо включить составляющие более высокого порядка ряда Тейлора. Для симметричных распределений $x_i (i=1,2,...m)$ в соответствии с [1] получаем:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x^2{}_j}\right]u^2(x_i)u^2(x_j). \qquad (4)$$

Приведенная формула (4) позволяет оценить комбинированную стандартную неопределенность только при отсутствии корреляции между аргументами. Кроме того, возникает проблема оценивания результата косвенного измерения, которая не рассмотрена в [1]. В этом случае можно использовать выражение для функции нескольких случайных аргументов [2]. Среднее значение $\overline{Y}$ определяется формулой:

$$\overline{Y}\approx f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...\overline{x}_m)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+\sum_{i<j}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}u(x_i,x_j), \qquad (5)$$

в общем случае формулой

$$\overline{Y}\approx f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...\overline{x}_m)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i), \qquad (6)$$

если случайные аргументы взаимно некоррелированные. Если случайные аргументы независимы, то комбинированная стандартная неопределенность определяется формулой (7):

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2\left[\mu_4(x_i)-u^4(x_i)\right]+$$
$$+\sum_{i<j}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}u^2(x_i)u^2(x_j)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)\mu_3(x_i), \qquad (7)$$

где $\mu_3(x_i)$ и $\mu_4(x_i)$ – третий и четвертый центральный моменты распределений аргументов.

Из (7) видно, что при расчете комбинированной стандартной неопределенности в условиях нелинейности, нужно учитывать форму и асимметрию распределений аргументов. Для нормального распределения результаты расчета по формулам (4) и (7) практически совпадают. Следует отметить, что формула (4), приведенная в [1], рассчитана только на нормальное распределение аргументов модельного уравнения.

Таким образом, при оценивании результата косвенного измерения в условиях нелинейности, имеются две проблемы: первая – учёт смещения линеаризации в оценке измеряемой величины Y (5); вторая – учёт нелинейности модели измерения и корреляционных связей между ее аргументами. Последнее не решено в выражениях (4) и (7).

Анализ методов оценивания результата косвенного измерения и неопределенности

Критерием возможности или невозможности линеаризации уравнения неопределенности является значение смещения линеаризации. Если значение смещения линеаризации настолько меньше значения комбинированной стандартной неопределенности, что им можно пренебречь, то оценка измеряемой величины может быть найдена по формуле (1). Тогда эта оценка является несмещенной и состоятельной, если используются состоятельные оценки аргументов [3]. Коэффициенты влияния составляющих неопределенности вычисляют, заменяя истинные значения аргументов их оценками. Погрешность определения коэффициентов влияния служит еще одним источником погрешности нелинейных косвенных измерений [3]. Этой погрешности можно избежать для ряда модельных уравнений, если использовать относительные неопределенности. В этом случае в уравнение неопределенности входят только параметры модельного уравнения.

Если неопределенности аргументов представлены в виде границ интервала, для получения результата и его расширенной неопределенности используют правила интервального анализа для отдельных математических операций, на которые разбивают модельное уравнение [4]. По правилам интервального анализа получают нижнюю Y_H и верхнюю Y_B границы результата измерения:

$$Y_H=\min f([x_{1H};x_{1B}],[x_{2H};x_{2B}],...[x_{mH};x_{mB}]);$$
$$Y_B=\max f([x_{1H};x_{1B}],[x_{2H};x_{2B}],...[x_{mH};x_{mB}]).$$

При этом связи между аргументами выбираются такие, которые соответствуют максимуму неопределенности. Например, при умножении коэффициент корреляции соответствует 1, т.е. оба аргумента имеют одновременно или максимальные значения x_{iB}, или минимальные значения x_{iH}. Оценку результата измерения и его расширенную неопределенность получают как:

$$\tilde{Y}=\frac{1}{2}(Y_H+Y_B);\ U(\tilde{Y})=\frac{1}{2}(Y_H-Y_B). \qquad (9)$$

Оценка $\tilde{Y}$ отвечает ситуации, когда $U(\tilde{Y})$ максимальна. Эта оценка при существенной нелинейности будет смещена относительно оценки (1). В [4] смещение оценки или поправку к (1) вычисляют по остаточному члену R_1 в ряде Тейлора:

$$R_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\cdot\Delta_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\Delta_i\Delta_j, \qquad (10)$$

где Δ_i, Δ_j – границы приращений аргументов.

Для большей гибкости и универсальности интервального анализа в [5] предложен редуктивный интервальный анализ, который можно использовать для расчета и стандартной и расширенной неопределенности. Этот метод разработан для оценивания трансформированной погрешности алгоритмов косвенных измерений. В этом случае множество входных данных характеризуют радиусом информации [6], который является оценкой снизу для погрешности алгоритма:

$$\mathrm{rad}A = \mathrm{int}\sup\left|a_1 - a_2\right|.$$

Как и в классическом интервальном анализе, результат измерения получают как:

$$\tilde{Y} = \mathrm{mid}(Y) = \frac{\underline{y} + \overline{y}}{2}, \qquad (11)$$

где $\underline{y}$ и $\overline{y}$ – нижняя и верхняя границы интервала соответственно.

Стандартную комбинированную или расширенную неопределенность получают в виде $\mathrm{rad}(y)$. Массив входных данных представляют как:

$$\mathrm{rad}(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{rad}(x_1) \\ \mathrm{rad}(x_2) \\ \dots \\ \mathrm{rad}(x_m) \end{bmatrix}; \; R = \begin{bmatrix} 1\; r_{12}\; \dots\; r_{1m} \\ r_{21}\; 1\; \dots\; r_{2m} \\ \dots \\ r_{m1}\; r_{m2}\; \dots\; 1 \end{bmatrix},$$

где $\mathrm{rad}(x_i)$ может быть и интервалом, и стандартной неопределенностью.

В [5] разработаны правила редуктивного интервального анализа для элементарных арифметических операций. Для обеспечения универсальности применения, этот метод требует дальнейшей разработки. Для неопределенности с оцениванием типа В были проанализированы и сравнены следующие методы: с сохранением составляющих второго порядка при разложении в ряд Тейлора, с использованием интервального анализ, с использованием редукционного интервального анализа, с использованием моделирования по методу Монте-Карло. Сравнение способов оценивания результата измерения и неопределенности проведено при одинаковых моделях входных данных и модельных уравнениях. Исследования показали хорошую сходимость результатов при одинаковых предпосылках. Области применения рассмотренных методов систематизированы в табл. 1.

Таблица 1

Систематизация областей применения методов оценивания неопределенности

Форма представления входных данных, наличие или отсутствие корреляции между аргументами	Оценивание выходных данных	1	2	3	4
Стандартные неопределенности аргументов, отсутствие корреляции между аргументами	Оценивание результата со смещением линеаризации	+	–	+	+
	Оценивание комбинированной стандартной неопределенности	+	–	+	+
Стандартные неопределенности аргументов, наличие корреляции между аргументами	Оценивание результата со смещением линеаризации	+	–	+	+
	Оценивание комбинированной стандартной неопределенности	–	–	+	+
Расширенные неопределенности аргументов	Оценивание результата как середины размаха	–	+	+	+
	Оценивание расширенной неопределенности	–	+	+	+

1 – метод оценивания с сохранением составляющих высшего порядка; 2 – метод с использованием интервального анализа; 3 – статистическое моделирование (метод Монте-Карло); 4 – метод с использованием редуктивного интервального анализа

Рассмотренные методы оценивания – аналитические, за исключением метода Монте-Карло. Из табл. 1 можно сделать не совсем правильный вывод об универсальности метода Монте-Карло (поскольку его можно использовать практически во всех ситуациях). Действительно, этот метод использовался для сравнения во всех случаях, но для его реализации были необходимы дополнительные данные. Так, например, при использовании интервального анализа и редуктивного интервального анализа не было необходимости в знании распределений аргументов, в то время, как для реализации метода Монте-Карло эти данные было необходимо добавлять либо приписывать. При определении результата и неопределённости косвенного измерения с оцениванием неопределённости аргументов типа А исходные данные могут быть представлены или в виде обработанных результатов измерения аргументов (средние значения, стандартные неопределённости, сведения о наличии корреляционных связей между аргументами и т.д.), или в виде рядов измерений аргументов. В этом случае могут быть использованы методы с сохранением составляющих высших порядков, методы, основанные на редуктивном интервальном анализе и метод приведения [3]. Метод приведения позволяет найти оценку измеряемой величины и её неопределённости, не прибегая к разложению в ряд Тейлора, что имеет место в первых двух методах. Ограничением метода приведения является требование наличия одинакового количества измерений у всех аргументов. В [1] проведено сравнение оценивания результата и неопределённости с помощью метода, основанного на линеаризации уравнения неопределённости и метода приведения при условии наличия корреляционных связей между аргументами. Результаты оценивания двумя методами практически совпадают, т.к. случайные отклонения отдельных результатов измерений малы и линеаризация справедлива. Аналогичные расчёты были проведены для больших случайных отклонений, т.е. для случая, когда линеаризация несправедлива. Расчёты проводились с помощью трёх перечисленных методов. Значения комбинированной стандартной неопределённости практически совпали, а оценки результата измерения отличались, несмотря на введение смещения линеаризации. Это объясняется тем, что в общем случае математическое ожидание функции не равно функции от математических ожиданий, т.е. предпочтительным в этом случае является метод приведения. Его целесообразно также использовать при малом количестве измерений аргументов, когда невозможно точно определить коэффициент корреляции.

На основании проведенного анализа можно сделать следующие рекомендации по применению рассмотренных методов оценивания результата косвенного измерения и его неопределенности.

1. При оценивании результата и неопределенности с помощью метода, основанного на сохранении составляющих высшего порядка в разложении по Тейлору, компенсируют смещение оценки результата из-за линеаризации и рассчитывают комбинированную стандартную неопределенность при отсутствии корреляционных связей между аргументами. В случае нелинейности модельного уравнения, комбинированная стандартная неопределенность зависит от формы и симметрии распределений аргументов. Оценивание смещения из-за линеаризации может быть произведено и при наличии корреляционных связей между аргументами как самостоятельный расчет с целью принятия решения о возможности и невозможности линеаризации.

2. При оценивании результата и неопределенности с помощью интервального анализа, в качестве исходных данных используют оценки аргументов и их расширенные неопределенности в виде границ интервала. В качестве оценки результата косвенного измерения используют середину размаха, а в качестве расширенной неопределенности – полуразмах. При оценивании модельное уравнение должно быть разделено на отдельные математические операции, для которых рассчитывают границы интервалов.

3. Редуктивный интервальный анализ может быть использован для оценивания результата косвенного измерения и его неопределенности с учетом корреляции между аргументами, а комбинированная стандартная неопределенность, оцениваемая с учетом корреляции, дополняется составляющими высших порядков. Так же как и при интервальном анализе, оценивание производится по отдельным математическим операциям. При исследовании перечень операций интервального редуктивного анализа был расширен.

4. Для оценивания результата косвенного измерения и его неопределенности может быть использовано статическое моделирование по методу Монте-Карло. Достоинства и недостатки этого метода были рассмотрены в литературе. В отличии от аналитических методов процедура моделирования должна быть адаптирована под конкретное модельное уравнение. Кроме этого, для реализации метода Монте-Карло в ряде случаев нужно дополнить исходные данные.

5. При наличии аргументов с оцениванием неопределенности типа А для определения оценки измеряемой величины и её неопределённости могут быть использованы метод с сохранением составляющих высших порядков, редуктивный интервальный анализ и метод приведения. При незначительной нелинейности уравнения неопределённости результаты оценивания совпадают при использовании всех методов, при значительной нелинейности оценка измеряемой величины отличаются из-за недостаточной компенсации смещения линеаризации, т.е. предпочтительным является метод приведения. Его применение ограничено тем, что число измерений всех аргументов должно быть одинаковым.

Списокялитературыя

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 с.*
2. *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под редакцией А.А. Свешникова. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 656 с.*
3. *Рабинович С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л: Энергия, 1978. – 262 с.*
4. *Ціделко В.Д. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і надання результату вимірювання / В.Д. Ціделко, Н.А. Яремчук.. – К.: Політехніка, 2002. – 176 с.*
5. *Jacubiec J. Application of reductive interval arithmetic to uncertainty evaluation of measurement data processing algorithms: Monograph / J. Jacubiec. – Wydawnicteo Politechniki Ślaskiej, Gliwice, 2002. – 241 p.*
6. *Трауб Дж. Общая теория оптимальных алгоритмов: пер. с англ. / Дж. Трауб, Х. Вожьняковский. – М.: Мир, 1983. – 362 с.*

Поступила в редколлегию 2.07.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

АНАЛІЗяМЕТОДІВяОЦІНЮВАННсяНЕВИЗНАЧЕНОСТІяОПОСЕРЕДКОВАНОГОяВИМІРЮВАННсяя ПРИяНЕЛІНІЙНОСТІяМОДЕЛЬНОГОяРІВНсННся

Н.А. Яремчук, М.В. Гальовська

У статті наведений аналіз методів оцінювання результату та невизначеності опосередкованого вимірювання при не лінійності модельного рівняння та можливості лінеаризації рівняння невизначеності. Серед них: методи із збереженням складових високого порядку ряду Тейлора, з використанням інтервального аналізу, з використанням редуктивного інтервального аналізу, метод Монте-Карло та метод зведення.

Ключові слова: *невизначеність, опосередковане вимірювання, нелінійність рівняння невизначеності.*

ANALYSISяOFяMETHODSяOFяINDIRECTяMEASUREMENTяUNCERTAINTYяEVALUATIONяя WHENяMODELяEQUATIONяISяNONLINEARя

N.A. Yaremchuk, M.V. Galovska

Analysis of methods of indirect measurement uncertainty evaluation ,when model equation is nonlinear *and possible linearization, is given. These are: methods with saving of high order members of Taylor series, methods with interval analysis application, methods with reductive interval analysis application, Monte-Carlo method and reduction method.*

Keywords: *uncertainty, indirect measurement, nonlinearity of model equation.*