

УДК 389:658.562:519.21(045)

О.М. Литвиненко

Інститут електроніки та систем управління Національного авіаційного університету,
Національний технічний університет України «КПІ», Київ

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОСЛІДОВНИХ АЛГОРИТМІВ КОНТРОЛЮ ПРИ НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНІ РОЗПОДІЛУ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАЛЬНОГО КАНАЛУ

Досліджено адаптивні алгоритми контролю на основі послідовної процедури за умови впливу похибки вимірювального каналу, що розподілена за нормальним законом. Встановлено, що при нормальному законі розподілу похибки вимірювального каналу, на відміну від рівномірного закону, на прийняття вірогідного рішення про придатність або непридатність об'єкту вноситься додаткова невизначеність. Оцінено вплив співвідношення між параметрами законів розподілу можливих значень контрольованої величини, випадкової похибки вимірювального каналу (ВК) та довжини допускового інтервалу на імовірність помилкових рішень при проведенні послідовної процедури контролю за умови нормального закону розподілу похибки ВК. Оцінено ефективність застосування розроблених адаптивних алгоритмів контролю на основі послідовної процедури.

Ключові слова: алгоритм контролю, вимірювальний канал, нормальний закон розподілу.

Вступ

При вимірювальному контролі процедурі порівняння з нормами, які задаються у вигляді уставок, і прийняття рішення про стан об'єкту, передують процедура сприйняття і перетворення інформативних сигналів, що відтворюють контрольовану величину. Наявність похибки вимірювального каналу (ВК), що має випадковий характер, призводить до помилкових рішень і тому виникає необхідність вирішення задачі зменшення впливу випадкової складової похибки, яка в умовах промислового виробництва є переважаючою через вплив таких факторів, як завади, вібрації, відхилення робочих умов від нормальних умов експлуатації та ін. Огляд існуючих методів зменшення впливу випадкової складової похибки вимірювального каналу показав, що традиційно на підприємствах обмежуються трьома шляхами. Перші два – із застосуванням прецизійних засобів вимірювання або введенням, так званих, звужуючих "контрольних" допусків [1], зменшують продуктивність і збільшують витрати на контроль. Проведення багаторазових вимірювань контрольованої величини з послідовним усередненням отриманих результатів при наявності у складі систем автоматизованого контролю засобів вимірювальної техніки просто і без додаткових матеріальних витрат дозволяє підвищити вірогідність контролю, але при цьому значно зростає об'єм контрольно-вимірювальних операцій. При контролі, на відміну від вимірювань, похибка перетворення ВК суттєво впливає на результат не в усьому діапазоні можливих значень контрольованої величини. Тому виникає можливість зменшення цього впливу в певних межах навколо граничних значень допускового інтервалу, що дозволить зменшити об'єм додаткових вимірювань. В даній статті запропоновано використання послідовної процедури, що розроблена Вальдом, коли за результатами поточної контрольно-

вимірювальної операції приймаються рішення про продовження або закінчення контролю. Це дозволяє мінімізувати кількість додаткових вимірювальних перетворень при вирішенні задачі підвищення вірогідності контролю. Дослідження залежності між заданою вірогідністю і необхідною кількістю додаткових контрольно-вимірювальних операцій послідовної процедури контролю для випадку нормального закону розподілу похибки ВК і є метою даної статті.

Основний розділ

Вихідною є інформація про вид і параметри закону розподілу похибки перетворення та можливих значень контрольованої величини.

В [2] проведено дослідження з припущенням, що і можливі значення контрольованої величини, і похибка вимірювального каналу розподілені за рівномірним законом. В результаті було отримано вирази для визначення складових ймовірності помилкових рішень, запропоновано підхід, що дозволяє визначити граничну кількість додаткових перетворень, після проведення яких послідовну процедуру контролю можна закінчувати й ймовірність помилкових рішень не перевищує допустимого значення.

Виходимо з того, що похибка вимірювального каналу розподілена за нормальним законом.

На відміну від рівномірного закону, основною складністю при аналізі для нормального закону є те, що щільність розподілу можливих значень похибки відмінна від нуля на усьому інтервалі $(-\infty; +\infty)$, тобто немає чітких обмежень її впливу на вірогідність контролю.

Введемо, як і для випадку рівномірного закону розподілу похибки вимірювального каналу, додаткові уставки, де ми допускаємо, що за їх межами вплив похибки на результат контролю дуже малий (практично відсутній):

$x_H'' = x_H - \lambda$; $x_H' = x_H + \lambda$; $x_B' = x_B - \lambda$; $x_B'' = x_B + \lambda$, де $\lambda = a \cdot \sigma_y$; a – стала величина, пов'язана з квантилем нормального закону розподілу; σ_y – середньоквадратичне відхилення похибки вимірювального каналу.

Згідно до запропонованого алгоритма, якщо результат початкового вимірювання контрольованої величини $z_0 = x + y_0$, де y_0 – реалізація випадкової похибки вимірювального каналу, що розподілена за нормальним законом, попадає в межі інтервалу $(x_H' \div x_B')$, тобто $x_H' < z_0 < x_B'$, контроль даного об'єкту закінчується й приймається рішення – “об'єкт придатний”. Але необхідно відмітити, що при цьому вноситься додаткова невизначеність, обумовлена тим, що в інтервал $(x_H' \div x_B')$ може потрапити результат перетворення параметра непридатного об'єкта, значення параметра якого більше x_B або менше x_H за рахунок впливу нормального закону розподілу похибки вимірювального каналу.

Проаналізуємо (рис. 1) імовірність виникнення помилкового рішення, що відповідає невизначеній відмові:

$$P_{HB} = P(x < x_H, x_H' < z = x + y < x_B') + P(x > x_B, x_B' < z = x + y < x_H')$$

λ – параметр, що характеризує довжину додаткових уставок; α_a – рівень статистичної значущості (імовірність потрапляння значення похибки вимірювального каналу за межі λ).

Таким чином, при попаданні результату вимірювання в інтервал $(x_H' \div x_B')$, рішення про придатність об'єкту приймається не з вірогідністю 1, як це було для рівномірного закону, а з вірогідністю $D = 1 - P_{HB}$. В граничному випадку при $x = x_H$ або $x = x_B$ (імовірність цієї події надзвичайно мала), граничне максимальне значення імовірності помилкового рішення буде дорівнювати $P_{HB} = \alpha_a$. Отже, якщо додатковий допусківий інтервал обмежений $\lambda = 2 \cdot \sigma_y$, тоді при $\alpha_a = 0,05$, граничне максимальне значення імовірності помилково прийнятого рішення “об'єкт придатний” буде дорівнювати $P = 0,05$, а вірогідність прийнятого рішення “об'єкт придатний” не менша за $D = 0,95$.

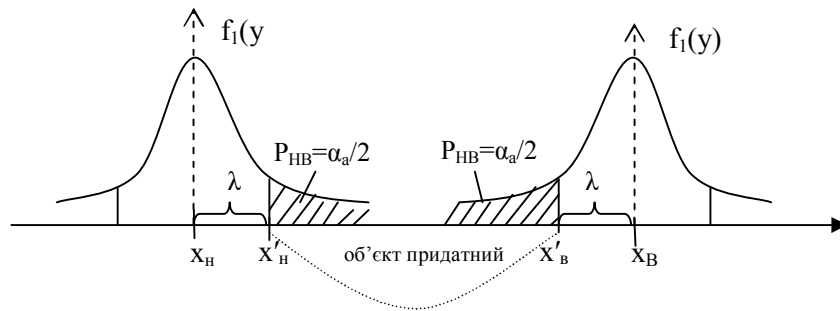


Рис. 1. Вплив похибки вимірювального каналу на прийняття рішення “об'єкт придатний” – виникнення ймовірності невизначеної відмови

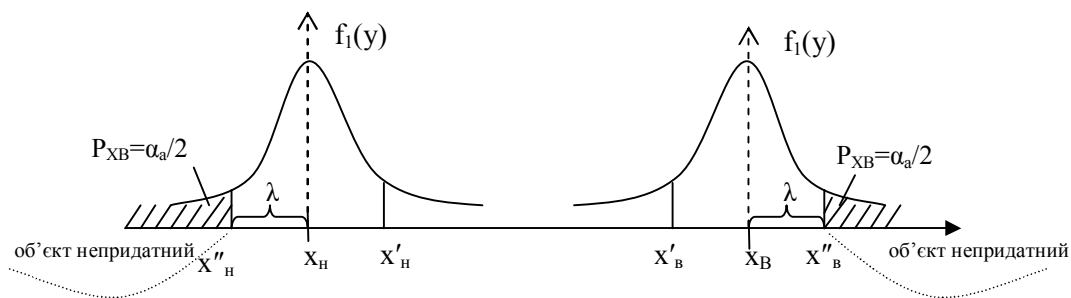


Рис. 2. Вплив похибки вимірювального каналу на прийняття рішення “об'єкт непридатний” – виникнення ймовірності хибної відмови

Якщо ж результат початкового вимірювання контрольованої величини потрапляє в межі інтервалу $(-\infty; x_H'')$ або $(x_B''; +\infty)$, тобто $z_0 < x_H''$ або $z_0 > x_B''$, то згідно до послідовного алгоритму, контроль даного об'єкту закінчується й приймається рішення – “об'єкт непридатний”. При цьому також вноситься додаткова невизначеність за рахунок впливу нормального закону похибки вимірювального каналу у вигляді виникнення імовірності хибної відмови. На рис. 2 наведено ситуацію, що відповідає цьому випадку:

$$P_{XB} = P(x_H < x < x_B, z < x_H'') + P(x_H < x < x_B, z > x_B'')$$

Таким чином, при попаданні результату вимірювання z в інтервал $(-\infty; x_H'')$ або $(x_B''; +\infty)$, рішення про непридатність об'єкту приймається з вірогідністю $D = 1 - P_{XB} = 1 - \alpha_a/2 - \alpha_a/2 = 1 - \alpha_a$. Отже, якщо додатковий допусківий інтервал обмежений $\lambda = 2 \cdot \sigma_y$, тоді при $\alpha_a = 0,05$, граничне мінімальне значення вірогідності прийнятого рішення “об'єкт непридатний” буде дорівнювати: $D = 1 - \alpha_a = 0,95$, що відповідає випадку, коли контрольований параметр приймає граничне значення ($x = x_H$ або $x = x_B$). Загальна додаткова невизначеність прийнятих рішень

буде дорівнювати: $P_{\text{пом}} = P_{\text{ХВ}} + P_{\text{НВ}}$. Об'єкт, для якого результат вимірювання параметра знаходиться в одному з інтервалів $(x_{\text{н}}'' \div x_{\text{н}}')$ або $(x_{\text{в}}' \div x_{\text{в}}'')$ визнається сумнівним й направляється на наступний етап досліджень, тому що немає впевненості з якої області значень параметра цей результат було "утворено" і маємо невизначеність при прийнятті рішення про придатність або непридатність об'єкта.

В залежності від того, в який інтервал попадає результат на наступному етапі, приймається рішення, згідно з вищевикладеними міркуваннями.

У випадку, коли після проведення N етапів послідовної процедури результат вимірювання жодного разу не вийшов за межі однієї з областей невизначеності, то для прийняття остаточного рішення про стан об'єкту використовується критерій знаків:

- якщо найчастіше серед N етапів результат вимірювання потрапляв в інтервал $(x_{\text{н}}; x_{\text{н}}')$ або $(x_{\text{в}}'; x_{\text{в}})$, тоді об'єкт визнаємо придатним.

- якщо ж найчастіше серед N етапів результат вимірювання потрапляв в інтервал $(x_{\text{н}}''; x_{\text{н}})$ або $(x_{\text{в}}; x_{\text{в}}'')$, тоді об'єкт визнаємо непридатним.

Кількість додаткових етапів залежить від розташування істинного значення контрольованої величини по відношенню до зони додаткових уставок $(x_{\text{н}}'' \div x_{\text{н}}')$ або $(x_{\text{в}}' \div x_{\text{в}}'')$. Максимальне число етапів вибирається на основі допустимого значення імовірності помилкових рішень.

Теоретично, виходячи з необмеженості нормального закону розподілу похибки вимірювального каналу, може виникнути ситуація, коли $z > x_{\text{в}}$, при $x \leq x_{\text{н}}$ або $z < x_{\text{н}}$, при $x \geq x_{\text{в}}$. Але ймовірність таких подій дуже мала.

В залежності від встановленої довжини додаткових уставок $\lambda = a \cdot \sigma_y$, а точніше від вибраного значення a - квантиля нормального закону розподілу похибки вимірювального каналу, буде змінюватись додаткова невизначеність $P_{\text{дод.нев.}}$: чим більше значення a , тим меншим буде граничне значення додаткової невизначеності, що обумовлене, як вже сказано вище, особливістю щільності розподілу нормального закону (немає чітких обмежень її впливу), але й більшим буде інтервал невизначеності і тим більша кількість сумнівних об'єктів, які потрібно направляти на наступний етап досліджень, що призводить до збільшення об'єму контролю.

Граничне значення загальної ймовірності помилкових рішень на кожному етапі досліджень буде дорівнювати:

$P_{\text{пом}} = P_{\text{дод. нев.}} + (\text{кількість сумнівних об'єктів} / \text{загальна кількість об'єктів на контролі})$.

Виникає необхідність у визначенні впливу співвідношення між параметрами законів розподілу можливих значень контрольованої величини, випадкової похибки ВК та довжиною допускового інтер-

валу на імовірність помилкових рішень при проведенні послідовної процедури контролю за умови нормального закону розподілу похибки ВК.

Вхідною інформацією перед проведенням процедури контролю є:

- середньоквадратичне відхилення похибки вимірювального каналу σ_y ;
- середньоквадратичне відхилення контрольованої величини σ_x ;
- довжина додаткових допускових інтервалів (уставок) в околиці граничних значень $\lambda = a \cdot \sigma_y$;
- довжина вихідного допускового інтервалу $(x_{\text{н}} \div x_{\text{в}}) \cdot 2 \cdot l$;
- гранична кількість додаткових етапів N .

Для дослідження співвідношень введено наступні параметри:

- нормована довжина додаткових уставок: $\varphi_x = \lambda / \sigma_x = a \cdot \sigma_y / \sigma_x$;

- відносна довжина додаткових уставок: $\varphi_l = \lambda / l = a \cdot \sigma_y / l$;

- нормована довжина допускового інтервалу: $\varphi = l / \sigma_x$.

Спочатку встановлено аналітичні залежності на основі апріорних даних про співвідношення між параметрами закону розподілу контрольованої величини, точностними характеристиками вимірювального засобу та допусковим інтервалом φ , φ_l , φ_x , а також a , що дозволяє визначити граничне значення імовірності помилкових рішень при введенні зони додаткових уставок після проведення початкового етапу досліджень:

$$P_{\text{пом}0} = P_{\text{дод.нев.}} + P_{\text{Х0}} + P_{\text{Н0}},$$

при $\varphi > \sqrt{3} + \varphi_x$ імовірність помилкових рішень

$$P_{\text{пом}0} = P_{\text{дод.нев.}};$$

при $\varphi \leq \sqrt{3} - \varphi_x$:

$$P_{\text{пом}0} = P_{\text{дод.нев.}} + P_{\text{Х0}} + P_{\text{Н0}} = P_{\text{дод.нев.}} + 2 \cdot \frac{\varphi_x}{\sqrt{6\pi}} \cdot \Phi(2a/\varphi_l);$$

при $\sqrt{3} - \varphi_x \leq \varphi < \sqrt{3}$ імовірність помилкових рішень дорівнює:

$$P_{\text{пом}0} = P_{\text{дод.нев.}} + P_{\text{Х0}} + P_{\text{Н0}} = P_{\text{дод.нев.}} + \frac{\varphi_x}{\sqrt{6\pi}} \cdot \Phi(2a/\varphi_l) + \frac{(\sqrt{3} - \varphi) \cdot \Phi(2a/\varphi_l) + (\varphi_x/a) \cdot (1 - e^{-2 \cdot (a/\varphi_l)^2})}{\sqrt{6\pi}};$$

при $\sqrt{3} < \varphi \leq \sqrt{3} + \varphi_x$:

$$P_{\text{пом}0} = P_{\text{дод.нев.}} + P_{\text{Х0}} + P_{\text{Н0}} = P_{\text{дод.нев.}} + \frac{(\sqrt{3} - \varphi) \cdot \Phi(2a/\varphi_l) + (\varphi_x/a) \cdot (1 - e^{-2 \cdot (a/\varphi_l)^2})}{\sqrt{6\pi}},$$

де $P_{\text{дод.нев.}}$ - додаткова невизначеність, що обумов-

лена нормальним законом розподілу похибки вимі-

$$\text{ривального каналу; } \Phi(2a/\varphi_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\int_0^{2a/\varphi_l} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right]$$

– функція Лапласа. Для функції Лапласа $\Phi(2a/\varphi_l)$ складені таблиці значень, що наведені у довідниках [4].

Застосування розрахункових формул для визначення імовірності помилкових рішень після проведення кожного додаткового етапу послідовної процедури контролю за умови нормального закону розподілу похибки ВК зі щільністю

$$f_1(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

є досить громіздким. А вирі-

шення оберненої задачі - обґрунтоване визначення граничної кількості додаткових етапів досліджень N і зовсім неможливе.

Запропоновано вирішення поставленої задачі здійснювати за допомогою результатів комп'ютерного моделювання процесу контролю.

По результатах досліджень встановлено залежність $P_{\text{пом}} = \psi(\varphi_x, \varphi, \varphi_l)$ й оцінено зменшення імовірності помилкових рішень на кожному додатковому етапі досліджень k_i на фоні збільшення при цьому кількості додаткових контрольно-вимірювальних операцій v_i , тобто об'єму контролю. Коефіцієнти k_i та v_i є показниками ефективності процедури контролю [3]. На рис. 3 наведено показники ефективності для випадку, коли нормована довжина допускового інтервалу дорівнює $\varphi = 1,25$.

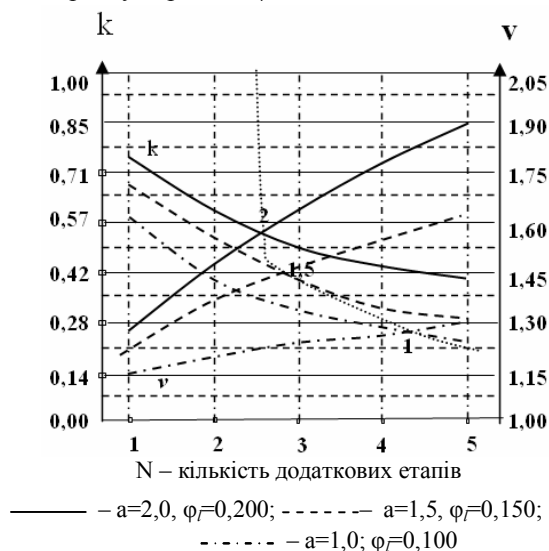


Рис. 3. Ефективність послідовних алгоритмів при $\varphi=1,25$

Відносне зменшення імовірності помилкових рішень на кожному додатковому етапі досліджень визначалося по відношенню до імовірності помилкових рішень після проведення початкового етапу досліджень:

$$k_i = P_i / P_{\text{осн. етап-}},$$

де P_i – імовірність помилкових рішень після проведення i -го додаткового етапу ($i = 1..N$); $P_{\text{осн. етап-}}$ – імовірність помилкових рішень після проведення початкового (основного) етапу досліджень.

Відносне збільшення об'єму контролю на кожному додатковому етапі досліджень оцінювалося по відношенню до об'єму контролю при одноразовому спостереженні і визначалося за формулою:

$$v_i = V_i / W,$$

де V_i – об'єм контролю на i -му додатковому етапі; W – об'єм контролю при однократному спостереженні.

Отже, якщо відомі хоча б два з трьох параметра $\varphi_x, \varphi, \varphi_l$ з визначеної залежності $P_{\text{пом}} = \psi(\varphi_x, \varphi, \varphi_l)$ можна визначити третій невідомий параметр (виходячи з того, що вказані характеристики пов'язані співвідношенням $\varphi_x = \varphi \cdot \varphi_l$) та оцінити можливе граничне значення імовірності помилкових рішень $P_{\text{пом}}$ при введенні зони додаткових уставок та формуванні рішення про стан об'єкта контролю після проведення початкового етапу досліджень. Далі, після прийняття рішення про проведення наступного додаткового етапу досліджень можна оцінити відносне зменшення імовірності помилкових рішень процедури контролю k_i і як при цьому збільшується об'єм додаткових досліджень v_i .

Отже, при введенні додаткових уставок, які відстоять від вихідних уставок на відстань $\lambda = \sigma_y$, при проведенні 5 додаткових етапів досліджень імовірність помилкових рішень зменшується у 4 рази, при цьому збільшення контрольно-вимірювальних операцій не перевищує 30%. Якщо ж $\lambda = 1,5 \cdot \sigma_y$, тоді в результаті проведення 5 додаткових етапів досліджень можливо отримати зменшення ймовірності помилкових рішень у 3 рази, при цьому збільшення контрольно-вимірювальних операцій не перевищує 62%. При $\lambda = 2,0 \cdot \sigma_y$ в результаті проведення 5 додаткових етапів досліджень можливо отримати зменшення імовірності помилкових рішень більш, ніж у 2,5 рази, при цьому число контрольно-вимірювальних операцій збільшується менш ніж удвічі, порівняно з одноразовим перетворенням. Розмір зони додаткових уставок залежить від регламентованого значення імовірності хибної відмови $P_{\text{ХВ}}$: чим більше довжина зони додаткових уставок, тим менше $P_{\text{ХВ}}$, але і тим більше необхідно проводити додаткових контрольно-вимірювальних операцій.

Визначено точку оптимуму, тобто таку оптимальну кількість додаткових етапів, після проведення яких надалі проводити контроль недоцільно, так як виграш від зменшення імовірності помилкових рішень прямопропорційний втратам на проведення додаткових перетворень. Встановлено, що цією точкою оптимуму є точка перетину лінії, що відображає відносне зменшення ймовірності помилко-

вих рішень $k(N)$ з лінією, що відображає відносне збільшення при цьому об'єму контролю $v(N)$. Для випадку, коли нормована довжина допускового інтервалу дорівнює

$$\varphi = 1,25, \text{ при } \lambda = 2 \cdot \sigma_y, \text{ або } \lambda = 1,5 \cdot \sigma_y,$$

оптимальна кількість додаткових етапів досліджень послідовної процедури контролю N дорівнює 2.

Якщо ж вводилися додаткові уставки, які відстоять від вихідних уставок на відстань $\lambda = 1,0 \cdot \sigma_y$, оптимальна кількість додаткових етапів досліджень послідовної процедури контролю N дорівнює 3.

Висновки

1. При нормальному законі розподілу похибки вимірювального каналу, на відміну від рівномірного закону, на прийняття вірогідного рішення про придатність або непридатність об'єкту вноситься додаткова невизначеність $P_{\text{дод.нев.}}$, граничне значення якої залежить від встановленої довжини додаткових уставок.

2. В результаті використання адаптивних алгоритмів контролю на основі послідовної процедури, в залежності від встановленого розміру зони додаткових уставок, при проведенні 5-ти додаткових етапів відбувається зменшення імовірності помилкових рішень більш ніж у 4 рази, при цьому збільшення контрольно-вимірювальних операцій не перевищує 30%.

3. Оптимальною кількістю додаткових етапів послідовної процедури контролю для розглянутого випадку, коли нормована довжина допускового

інтервалу дорівнює $\varphi=1,25$, є 2 або 3 кроки (в залежності від встановленого розміру зони додаткових уставок) – далі продовжувати контроль нецільно.

4. Практична цінність результатів, що наведені в даній статті, полягає в тому, що можливо вводити визначену зону додаткових уставок λ і на основі інформації про можливе зменшення k імовірності помилкових рішень на кожному етапі досліджень, визначати необхідне число додаткових етапів досліджень N .

Список літератури

1. Михайлов А.В. Эксплуатационные допуски и надежность в радиоэлектронной аппаратуре / А.В. Михайлов. – М.: Советское радио, 1970. – 216 с.
2. Володарський Є.Т. Послідовні алгоритми контролю / Є.Т. Володарський, О.М. Литвиненко // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія: міжнародний науково-технічний журнал Вінницького технічного університету. – 2009. – № 2. – С. 35-39.
3. Володарський Є.Т. Ефективність послідовних алгоритмів / Є.Т. Володарський, О.М. Литвиненко // Науковий журнал «Вісник Хмельницького національного університету». – Хмельницький, 2007. – № 2, т. 2. – С. 121-125.
4. Володарський Є.Т. Статистична обробка даних: навч. посібник / Є.Т. Володарський, Л.О. Кошева. – К.: НАУ, 2008. – 308 с.

Надійшла до редколегії 11.09.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.Т. Кононов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ КОНТРОЛЯ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КАНАЛА

О.Н. Литвиненко

Исследованы адаптивные алгоритмы контроля на основе последовательной процедуры при условии влияния погрешности измерительного канала (ИК), распределенной по нормальному закону. Установлено, что при нормальном законе распределения погрешности ИК, в отличие от равномерного, на принятие достоверного решения о годности или негодности объекта, вносится дополнительная неопределенность. Оценено влияние соотношения между параметрами законов распределения возможных значений контролируемой величины, случайной погрешности ИК и длиной допускового интервала на вероятность ошибочных решений при проведении последовательной процедуры контроля при условии нормального закона распределения погрешности ИК. Оценена эффективность применения разработанных адаптивных алгоритмов контроля на основе последовательной процедуры.

Ключевые слова: алгоритм контроля, измерительный канал, нормальный закон распределения.

FEATURES OF APPLICATION OF SEQUENTIAL ALGORITHMS OF THE CONTROL AT THE NORMAL LAW OF DISTRIBUTION OF AN ERROR OF THE MEASURING CHANNEL

O.N. Lytvynenko

Adaptive algorithms of the control on the basis of sequential procedure under condition of influence of an error of the measuring channel (MCh) distributed under the normal law are investigated. It is established, that at the normal law of distribution of an error of the measuring channel, as against uniform, on acceptance of the authentic decision on the validity or unsuitability of object, additional uncertainty is brought. Influence of a ratio between parameters of laws of distribution of probable values of controllable size, casual error MCh and length admissible an interval on probability of erroneous decisions is appreciated at carrying out consecutive procedure the control over the normal law of distribution of error MCh. Efficiency of application of the developed adaptive algorithms of the control over consecutive procedure is appreciated.

Keywords: control algorithm, measuring channel, normal law of distributing.