

УДК 530.1.537.86 + 621.396.96

Р.Э. Пащенко

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

## ВЛИЯНИЕ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ПОМЕХА НА ФОРМУ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА

Показано, что построение фазовых портретов на псевдофазовой плоскости можно использовать для наглядного представления и качественного исследования свойств динамических систем. Проведен анализ влияния отношения сигнал/помеха на форму фазового портрета. Установлено, что форма фазового портрета помехи практически не зависит от величины времени задержки. Показано, что поворот и сжатие фазового портрета при изменении величины времени задержки может служить отличительным признаком наличия гармонического сигнала.

**Ключевые слова:** псевдофазовая плоскость, фазовый портрет, отношение сигнал/помеха.

### Постановка проблемы и анализ литературы

Понятие фазовой плоскости возникло по аналогии с фазовым пространством, используемым в классической и статистической механике. В общем случае фазовое пространство можно определить как абстрактное математическое пространство, в котором осями координат является состояние системы и ее производная [1]. Использование фазовой плоскости позволяет получить решение дифференциального уравнения не интегрированием, а его представлением на плоскости с прямоугольной системой координат. Под фазовой плоскостью имеется в виду плоскость, каждая точка которой однозначно определяет состояние (фазу) системы. Поскольку плоскость имеет два измерения  $x$  и  $y$ , то ясно, что метод фазовой плоскости применим к анализу движения систем, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.

В последнее время для анализа поведения сложных (нелинейных) динамических системы, в которой известен только один параметр (система с одной степенью свободы), используют метод построения псевдофазовой плоскости (ПФП) с временной задержкой [2 – 4], который является одним из основных методов нелинейной динамики. В псевдофазовой плоскости строятся фазовые портреты (ФП), которые могут использоваться для анализа свойств динамических систем [5]. Построение ФП в ПФП не требует большого времени для решения дифференциальных уравнений и вычисления углов наклона изоклин, а использование ЭВМ позволяет строить ФП сложных динамических систем практически в реальном масштабе времени.

Различная сложность динамических систем, к которым можно отнести отраженные сигналы от подстилающих поверхностей и объектов наблюдения, приводит к различным формам фазовых портретов.

Данный факт позволяет использовать форму ФП для анализа сигналов радиолокационных средств. На форму ФП также оказывает влияние воздействие помех. Поэтому представляет практический интерес анализ влияния отношения сигнал/помеха на форму фазового портрета.

**Цель статьи:** оценить влияние отношения сигнал/помеха на форму фазового портрета.

### Метод псевдофазовой плоскости (реконструкции аттрактора)

Для системы, в которой измерена только одна величина, строится зависимость сигнала от этой же величины в другой момент времени, отстающий или опережающий данный момент времени на постоянную величину:  $[x(t), x(t+T)]$  [2, 3]. Плоскость  $[x(t), x(t+T)]$  называется псевдофазовой плоскостью. Сигнал  $x(t+T)$  связан с производной  $\dot{x}(t)$  и результат имеет те же свойства, что и при использовании действительной фазовой плоскости [6].

На рис. 1 показаны ФП гармонического сигнала [5], построенные на ПФП при различных временных задержках ( $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ ). Как видно из рис. 1, в можно подобрать такое значение временной задержки, при котором ФП на ПФП будет отвечать ФП на реальной фазовой плоскости.

Когда в системе более двух переменных, которые описывают состояние (координата, скорость и время или фаза внешней силы), с помощью нескольких задержек можно построить траектории в псевдофазовом пространстве большего числа измерений. Например, трехмерное пространство можно построить с помощью вектора с компонентами  $[x(t), x(t+T), x(t+2T)]$ .

Наиболее трудной задачей при построении ФП в ПФП является выбор правильного времени задержки  $T$ . Подходы к выбору  $T$  описаны [4]. Перво-

начально для выбора задержки использовали качественную идею о том, что если компоненты, образующие вектор, будут “независимы” друг от друга, то реконструированные вектора будут нести в себе “наибольшее количество информации о системе”.

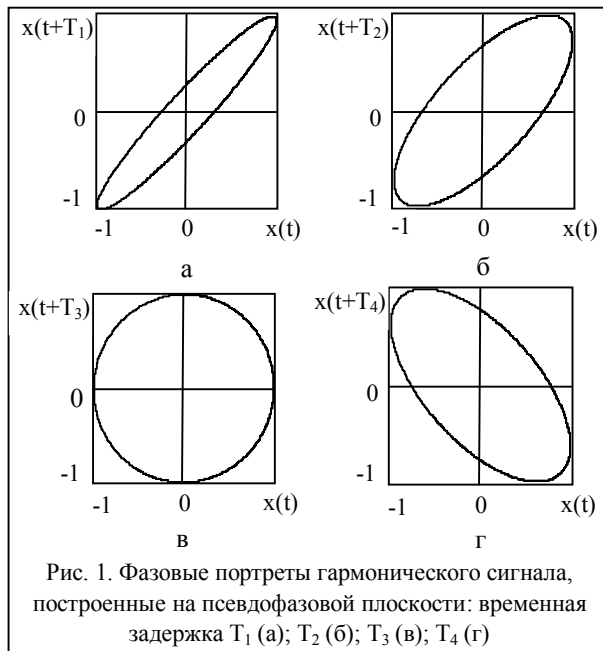


Рис. 1. Фазовые портреты гармонического сигнала, построенные на псевдофазовой плоскости: временная задержка  $T_1$  (а);  $T_2$  (б);  $T_3$  (в);  $T_4$  (г)

Простейший способ добиться такой “линейной” независимости – это выбрать  $T$  близким к первому нулю автокорреляционной функции для ряда  $x_i$ :

$$B(T) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+T} - \bar{x}), \quad m = M - T, \quad (1)$$

где  $\bar{x}$  – среднее значение временного ряда;  $M$  – длина временного ряда.

Второй способ [4] требует вычисления спектра мощности временного ряда, т.е. быстрого преобразования Фурье автокорреляционной функции. Если в спектре мощности присутствуют кратные пики, то задержка  $T$  выбирается равной четверти периода самой высокой из доминирующих частот.

Третий способ [7] основан на вычислении средней взаимной информации между двумя измерениями. Пусть даны два множества измерений  $A$  и  $B$ . Взаимная информация между элементом  $a_i$  множества  $A$  и элементом  $b_j$  множества  $B$  определяется как количество информации, которое имеют измерения  $a_i$  и  $b_j$  по отношению друг к другу

$$I_{a_i b_j} = \ln \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]. \quad (2)$$

Если измерения независимы, то взаимная информация равна нулю. Усредняя по всем измерениям, получаем

$$I_{A,B} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]. \quad (3)$$

Заменяя  $a_i$  и  $b_j$  на  $x_i$  и  $x_{i+T}$  соответственно, получаем среднюю взаимную информацию как функцию временной задержки  $T$ . Задержка  $T$  выбирается равной времени первого минимума во взаимной информации.

Таким образом, построение фазовых портретов на псевдофазовой плоскости можно использовать для наглядного представления и качественного исследования свойств динамических систем, которые невозможно или затруднительно исследовать аналитически.

### Влияние отношения сигнал/помеха на форму фазового портрета

Исследование влияния отношения сигнал/помеха на изменение формы ФП проводилось с помощью компьютерного эксперимента. При оценке влияния отношения сигнал/помеха использовались модельные данные, некоторые из которых показаны на рис. 2: полезный сигнал (а), помеха со среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma = 0,5$  (б), а также аддитивная смесь полезного сигнала и помехи при  $q = 10,5$  дБ (в) и  $q = 4$  дБ (д).

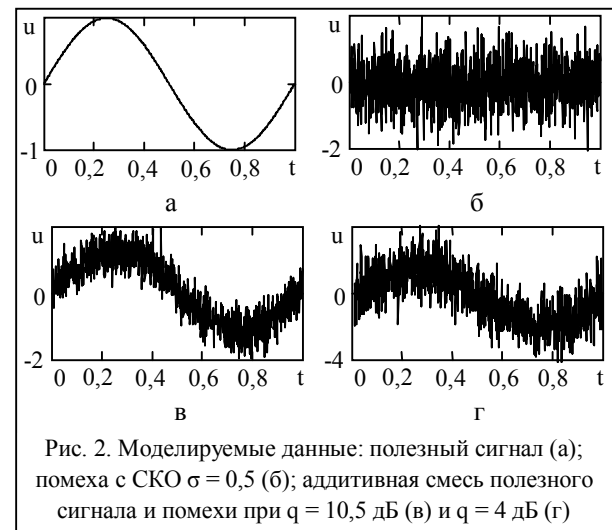


Рис. 2. Моделируемые данные: полезный сигнал (а); помеха с СКО  $\sigma = 0,5$  (б); аддитивная смесь полезного сигнала и помехи при  $q = 10,5$  дБ (в) и  $q = 4$  дБ (г)

В качестве модели полезного сигнала выбиралась модель простого гармонического колебания единичной амплитуды ( $U = 1$ ) и произвольной частоты, количество точек в периоде было выбрано  $N = 1024$ . Для моделирования случайных величин (помехи) использовалась встроенная функция создания векторов с нормальным законом распределения  $\text{norm}(N, m, \sigma)$  системы математических вычислений Mathcad, при этом число генерируемых случайных величин было равно  $N = 1024$ , математическое ожидание –  $m = 0$ , а СКО изменялось от  $\sigma = 0,15$  до  $\sigma = 1$  с дискретностью  $\Delta\sigma = 0,05$ . Исследуемая выборка формировалась в результате сложения полезного сигнала и помехи. Отношение сигнал/помеха рассчитывалось как  $q = 20 \lg(U/\sigma)$ .

На рис. 3 приведены фазовые портреты полезного сигнала (а), помехи с СКО  $\sigma = 0,5$  (б), а также аддитивной смеси полезного сигнала и помехи при  $q = 16,5$  дБ (в)  $q = 10,5$  дБ (г);  $q = 7$  дБ (д);  $q = 4$  дБ (е);  $q = 2,5$  дБ (ж);  $q = 1$  дБ (з), построенные на ПФП при временной задержке  $T = 128$ , что соответствует четверти периода синусоидального сигнала.

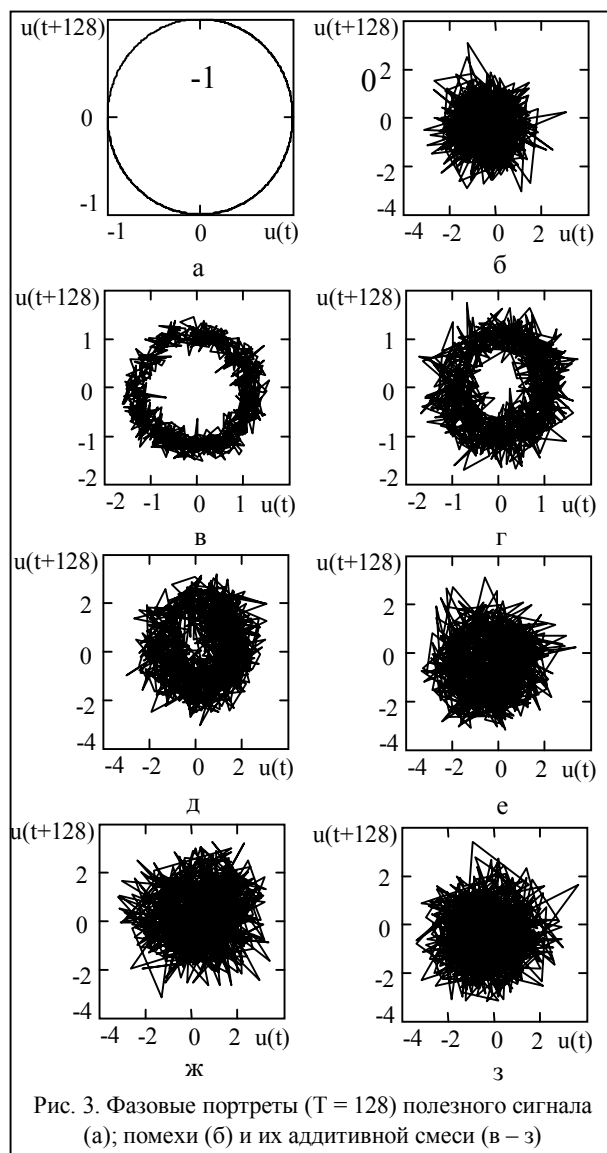


Рис. 3. Фазовые портреты ( $T = 128$ ) полезного сигнала (а); помехи (б) и их аддитивной смеси (в – з)

Анализ данных на рис. 3, а и б показывает, что форма ФП периодического сигнала имеет вид окружности, а ФП помехи – случайно заполненную область ПФП, ФП аддитивной смеси сигнала и помехи является суммой ФП чистого сигнала и ФП помехи (рис. 3, в – з). Уменьшение отношения сигнал/помеха (увеличение СКО помехи) приводит к тому, что ФП аддитивной смеси сигнала и помехи стремится к ФП чистой помехи. Различия в формах ФП наблюдаются до величины отношения сигнал/помеха равной 7 дБ (рис. 3, д), после чего ФП аддитивной смеси и ФП помехи не отличаются.

Рассмотрим влияние величины временной задержки  $T$  при построении ФП синусоидального сигнала, помехи и их аддитивной смеси.

На рис. 4 показаны ФП сигнала (а), помехи с СКО  $\sigma = 0,5$  (б), а также аддитивной смеси сигнала и помехи при  $q = 10,5$  дБ (в) и  $q = 4$  дБ (г), построенные на ПФП при временной задержке  $T = 64$  (левые рисунки) и  $T = 256$  (правые рисунки).

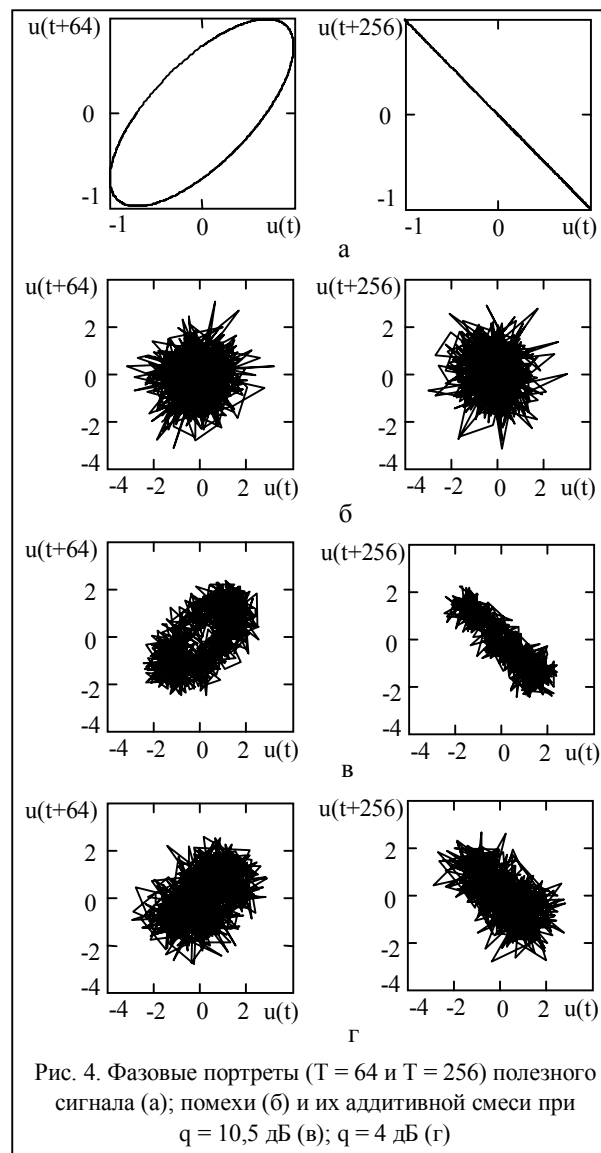


Рис. 4. Фазовые портреты ( $T = 64$  и  $T = 256$ ) полезного сигнала (а); помехи (б) и их аддитивной смеси при  $q = 10,5$  дБ (в);  $q = 4$  дБ (г)

Как видно из рис. 3, б и рис. 4, б форма ФП помехи практически не зависит от величины времени задержки  $T$ , т.е. фазовая траектория помехи заполняет определенную область ПФП.

Форма фазового портрета синусоидального сигнала при изменении  $T$  изменяется существенно, окружность (см. рис. 3, а) преобразуется в эллипс (см. рис. 4, а, слева) и даже вырождается в прямую (см. рис. 4, а, справа). При этом поворот (влево или вправо) и величина малой полуоси эллипса (расширение или сжатие) зависит от времени задержки.

Так как ФП аддитивной смеси сигнала и помехи является суммой ФП сигнала и ФП помехи, то его форма изменяется при уменьшении (увеличении) времени задержки. Характер изменения формы ФП (см. рис. 4, в и рис. 4, г) обусловлен, прежде всего, изменением ФП синусоидального сигнала (поворот (влево или вправо) и изменение величины малой полуоси эллипса (расширение или сжатие)). При малом отношении сигнал/помеха равном  $q = 4$  дБ и временной задержке  $T = 128$  (см. рис. 3, е) ФП аддитивной смеси сигнала и помехи не отличается от ФП помехи (см. рис. 3, б), однако при других временах задержки, например,  $T = 64$  или  $T = 256$  (см. рис. 4, г), ФП сужаются и поворачиваются вправо или влево, что обусловлено наличием в смеси полезного сигнала. В то же время, как уже отмечалось выше, форма ФП помехи при изменении времени задержки не изменяется.

Таким образом, поворот (влево или вправо) и изменение величины малой полуоси эллипса (расширение или сжатие) фазового портрета при изменении величины времени задержки может служить отличительным признаком наличия полезного сигнала. Характер изменения ФП сохраняется при малых отношениях сигнал/помеха.

### Выводы

1. Построение фазовых портретов на псевдофазовой плоскости можно использовать для наглядного представления и качественного исследования свойств динамических систем, которые невозможно или затруднительно исследовать аналитически.

2. Форма фазового портрета помехи практически не зависит от величины времени задержки.

3. Поворот (влево или вправо) и изменение величины малой полуоси эллипса (расширение или сжатие) фазового портрета при изменении величины времени задержки может служить отличительным признаком наличия гармонического сигнала.

4. При проведении дальнейших исследований целесообразно оценить возможность использования сечений Пуанкаре для анализа характеристик сигналов радиолокационных средств.

### Список литературы

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. – М.: Сов. радио, 1986. – 512 с.
2. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
3. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Ф. Мун. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
4. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 360 с.
5. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов: Коллективная монография / [Доля Г.Н., Иванов В.К., Пащенко Р.Э., Стадник А.М. и др.]; под ред. Р.Э. Пащенко. – Х.: ХООО “НЭО “ЭкоПерспектива”, 2006. – 348 с.
6. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*, edited by D.A. Rand L.S. Young. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1981. – P. 366-381.
7. Fraser A.M. Independent coordinates for strange attractors from mutual information / A.M. Fraser, H.L. Swinney // *Phys. Rev.* – 1986. – A 33. – P. 1134-1140.

Поступила в редколлегию 16.09.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Полярус, Харьковский автомобильный университет, Харьков.

### ВПЛИВ ВІДНОШЕННЯ СИГНАЛ/ЗАВАДА НА ФОРМУ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА

Р.Е. Пащенко

Показано, що побудова фазових портретів на псевдофазовій площині можна використовувати для наочного уявлення та якісного дослідження властивостей динамічних систем. Проведений аналіз впливу відношення сигнал/завада на форму фазового портрету. Встановлено, що форма фазового портрета завади практично не залежить від величини часу затримки. Показано, що поворот і стиснення фазового портрета при зміні величини часу затримки може служити відмінною ознакою наявності гармонійного сигналу.

**Ключові слова:** псевдофазова площина, фазовий портрет, відношення сигнал/завада.

### INFLUENCING RELATION SIGNAL/HINDRANCE ON THE FORM OF PHASE PORTRAIT

R.E. Paschenko

It is shown that construction portraits of phases on a pseudophase plane it is possible to use for evident presentation and high-quality research of properties the dynamic systems. The analysis influencing relation is conducted signal/hindrance on the form portrait of phase. It is set that the form portrait of phase hindrance practically does not depend on the size time of delay. It is shown that a turn and compression portrait of phase at the change size time of delay can serve as a distinctive presence of harmonic signal bit.

**Keywords:** pseudophase plane, portrait of phase, conducted signal/hindrance.