

УДК 621.396.67.012.001.5

Е.Д. Прилепский

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

## МАКСИМИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ С ПЛОСКОЙ ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Для линейной антенны получено оптимальное амплитудно-фазовое распределение токов, реализующее максимум коэффициента концентрации мощности излучения в классе максимально плоских диаграмм направленности. Задача оптимизации такого коэффициента решена методом последовательных приближений.

**Ключевые слова:** концентрация мощности излучения, максимально плоская диаграмма направленности, оптимизация.

### Введение

В некоторых случаях к излучающим системам предъявляют требования максимизации коэффициента концентрации, равного отношению мощности, излучаемой в заданный телесный угол,  $P_{\Omega}$  ко всей излучаемой мощности  $P_{\Sigma}$  [1]. Для того чтобы исключить явление сверхнаправленности, часто максимизируется отношение  $P_{\Omega}$  к полной мощности в раскрыве антенны  $P_{\Pi}$ , включающей как  $P_{\Sigma}$ , так и реактивную мощность [1 – 3]. При оптимизации коэффициента концентрации  $K = P_{\Omega} \cdot P_{\Pi}^{-1}$  на диаграмму направленности (ДН) могут быть наложены дополнительные локальные условия [1]. Так, значительное внимание уделяется синтезу антенн с максимально плоской ДН [3], у которой обращаются в нуль первые  $2N$  производных в направлении максимума излучения.

Целью настоящей статьи является решение задачи максимизации коэффициента концентрации (КК) в классе максимально плоских ДН применительно к антеннам с линейным раскрывом.

### Постановка задачи

Выражение для ДН линейного раскрыва изотропных излучателей имеет следующий вид [1]:

$$F(u) = 2^{-1} \int_{-1}^1 A(x) \exp\{iux\} dx, \quad (1)$$

где  $u = \pi L \sin \theta / \lambda$   $L$  – длина антенны;  $A(x)$  – амплитудно-фазовое распределение (АФР) поля;  $x$  – координата в раскрыве. В дальнейшем будем рассматривать вещественные симметричные распределения  $A(x) = A(-x)$ . Применительно к линейной антенне с ДН вида (1) коэффициент концентрации представим в виде [1]

$$K = P_{\Omega} \cdot P_{\Pi}^{-1} = \int_{-u_0}^{u_0} |F(u)|^2 du \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $u_0 = \pi L \sin \theta_0 / \lambda$ ;  $[-u_0, u_0]$  – область значений  $u$ , которой принадлежит главный лепесток ДН. Из

выражения (2) следует, что максимизация  $K$  сводится к минимизации полной мощности  $P_{\Pi}$ , при фиксированной мощности  $P_{\Omega}$ . Сформулируем теперь рассматриваемую задачу: в классе ДН вида (1) найти оптимальную ДН и соответствующее ей АФР, доставляющие минимальное значение полной мощности:

$$P_{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$$

при условиях:

$$P_{\Omega} = \int_{-u_0}^{u_0} |F(u)|^2 du = \text{const}; \quad (3)$$

$$F^{(2k)}(0) = 0, k = 1, 2, \dots, N; \quad (4)$$

$$F^{(0)}(0) = F(0) = 1, \quad (5)$$

где  $(2k)$  – порядок производной. Условия (4), которым удовлетворяют ДН с максимально плоским главным лепестком, известны в теории фильтров как условия Баттерворта [3]. Условие (5) – это условие нормировки ДН, которое выполняется при выборе постоянного множителя у АФР. В соответствии с методом Лагранжа составим функционал:

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du - \lambda \int_{-u_0}^{u_0} |F(u)|^2 du - \sum_{k=1}^N \mu_k F^{(2k)}(0) = \\ &= \text{const} \left\{ \int_{-1}^1 |A(x)|^2 dx - \lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A(x) A(x') K(x, x') dx dx' - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \mu_k \int_{-1}^1 x^{2k} A(x) dx \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где ядро  $K(x, x') = \sin[u_0(x - x')] / u_0(x - x')$ ;  $\lambda$ ,  $\mu_k$  – множители Лагранжа, определяемые из условий (3), (4). При вариации функционала  $\Psi$  получим уравнение для определения оптимального АФР:

$$A(x) - \lambda \int_{-1}^1 A(x') K(x, x') dx' - \sum_{k=1}^N \mu_k x^{2k} = 0. \quad (7)$$

«Естественный» путь решения уравнения (7) – разложение  $A(x)$  в ряд, по собственным функциям

ядра  $K(x, x')$ , т. е. по сфероидальным функциям [1]. Однако необходимость согласовать решение с условиями Баттерворта (4) приводит при этом к сложной системе уравнений для величин  $\lambda$ ,  $\mu_k$ . Поэтому рассмотрим сначала частные случаи, а затем построим решение для общего случая с помощью метода последовательных приближений.

**Решение задачи оптимизации**

Прежде всего отметим, что при  $N = 0$  задача сводится к максимизации функционала  $K$  (2) без дополнительного условия (4). Оптимальное АФР в этом случае удовлетворяет уравнению

$$A(x) - \lambda \int_{-1}^1 A(x')K(x, x')dx' = 0 \tag{8}$$

и записывается через нулевую сфероидальную функцию  $S_{00}(u_0, x)$  [1, 2]. Оптимальная ДН в этом случае также записывается через нулевую сфероидальную функцию [1, 2].

Рассмотрим теперь уравнение (7) в предельном случае  $u_0 \rightarrow 0$ . При этом из (7) следует, что  $A(x)$  является полиномом четной степени  $2N$  от  $x^2$ . Из условий (4) получим

$$\int_{-1}^1 x^{2k} A(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{9}$$

т.е. полином  $A(x)$  должен быть ортогонален степеням  $x$ . Система уравнений (9) при  $N = 1, 2, \dots$  однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяет систему полиномов четных степеней, ортогональных на интервале  $[-1, 1]$  с весом  $x^2$ :

$$\int_{-1}^1 A_N(x)A_{N'}(x)x^2 dx = 0, \quad N \neq N'.$$

Поэтому

$$A_N(x) = \text{const} \cdot x^{-1} P_{2N+1}(x), \tag{10}$$

где  $P_{2N+1}(x)$  – полином Лежандра [4]. Удобно выбрать постоянный множитель в (10) в виде  $\text{const} = P_{2N+1}^{(1)}(0)$ . Тогда, пользуясь формулой Кристоффеля–Дарбу [4], получим

$$A_N(x) = x^{-1} P_{2N+1}^{(1)}(0) \cdot P_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^N (4n+1) \cdot P_{2n}(0) \cdot P_{2n}(x). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (1) и учитывая условие (5), находим оптимальную ДН:

$$F_N(u) = \sum_{n=0}^N -1^n (4n+1) \cdot P_{2n}(0) \cdot j_{2n}(u), \tag{12}$$

где  $j_{2n}(u)$  – сферическая функция Бесселя [4]. При использовании оптимальных функций  $A_N(x)$  и  $F_N(u)$  полностью решаем задачу при  $u_0 = 0$ .

Соотношения (12) показывают, что ДН  $F_N(u)$  вблизи начала координат имеет плато и область сре-

за вблизи первого максимума функций  $j_{2N+1}(u)$ . Максимальную крутизну диаграммы  $F_N(u)$  в области среза получаем при  $u = u_c$  первого максимума функции  $j_{2N+1}(u)$ . С увеличением  $N$  плато расширяется. Диаграммы  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$  показаны сплошными линиями на рисунке. Перейдем теперь к решению задачи при  $u_0 > 0$ . Для того чтобы удовлетворить условиям (4) и (5), представим оптимальные АФР и ДН в виде разложений:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_{2n}(x); \tag{13}$$

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n j_{2n}(u), \tag{14}$$

где  $P_{2n}(x)$  – четные полиномы Лежандра;  $j_{2n}(u)$  – сферические функции Бесселя. В разложениях (13), (14) первые  $N$  членов должны быть равны соответственно  $A_N(x)$  и  $F_N(u)$  и, следовательно, удовлетворять условиям (4), (5). С учетом сказанного представим АФР и ДН в виде:

$$A(x) = A_N(x) + a(x); \tag{15}$$

$$F(u) = F_N(u) + f(u). \tag{16}$$

ДН  $f(u)$  в (16) автоматически удовлетворяет условиям (4), так как вблизи  $u = 0$  сферические функции Бесселя имеют разложение  $j_{2n}(u) \approx u^{2n}$ . Поэтому в области плато функции  $F_N(u)$  добавка  $f(u)$  мала и ее роль состоит в подавлении боковых лепестков ДН  $F_N(u)$ . Используя выражение для ДН (16), вычислим  $P_{\Omega}$  и  $P_{\Pi}$ , входящие в коэффициент концентрации  $K$  (2), и, максимизируя  $K$  по  $\alpha_n$ , находим:

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_n} = P_{\Pi}^{-1} \left[ \frac{\partial P_{\Omega}}{\partial \alpha_n} - P_{\Omega} \cdot P_{\Pi}^{-1} \frac{\partial P_{\Pi}}{\partial \alpha_n} \right] = 0. \tag{17}$$

Откуда получаем систему уравнений для  $a_n$ :

$$a_n = K^{-1} \left[ L_n + \sum_{m=1}^{\infty} L_{nm} a_m \right], \tag{18}$$

где введены обозначения:

$$L_n = q_n^{-1/2} \int_0^{u_0} F_N(u) j_{2(N+n)}(u) du;$$

$$L_{nm} = (q_n q_m)^{-1/2} \int_0^{u_0} j_{2(N+n)}(u) j_{2(N+m)}(u) du;$$

$$q_n = \pi [8(N+n) + 2]^{-1}; \quad a_n = (-1)^{N+n} q_n^{1/2} \alpha_{N+n}. \tag{19}$$

Как видно из (19), при  $n, m \rightarrow \infty$  величины  $L_n, L_{nm} \rightarrow 0$ , так что в сумме (18) фактически следует ограничиться конечным числом членов. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$a_n = K^{-1} \left[ L_n + \sum_{m=1}^M L_{nm} a_m \right], \quad n = 1, 2, \dots, M. \tag{20}$$

Решение системы уравнений (20) может быть получено методом последовательных приближений.

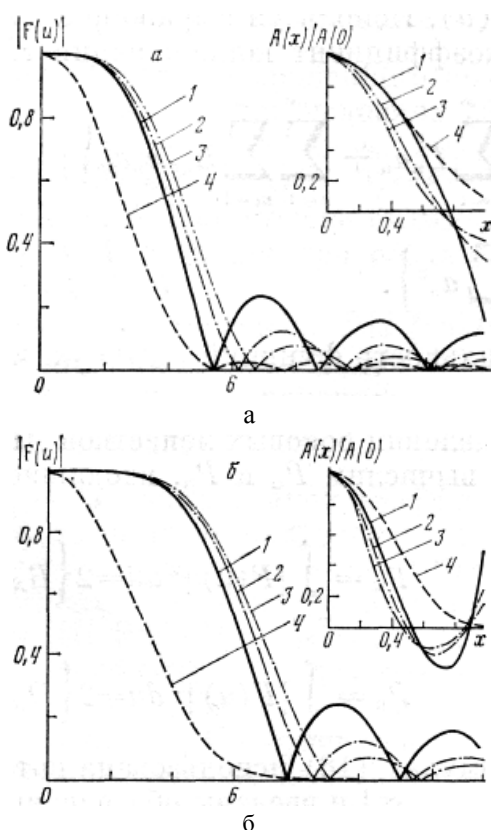


Рис. 1. Диаграммы направленности и нормированные амплитудно-фазовые распределения линейной антенны с максимальным коэффициентом концентрации при  $N = 1$  (а) и 2 (б): 1 – ДН  $F_N(u)$  и АФР  $A_N(x)/A_N(0)$  при  $u_0 = 0$ ; 2 и 3 – ДН  $F(u)$  и АФР  $A(x)/A(0)$  при  $u_0 = u_c = 4,51$  (а) и 6,76 (б) и  $u_0 = u_1 = 5,4485$  (а) и 7,6766 (б); 4 – нулевая сфероидальная функция при  $u_0 = 4,51$  (а) и 6,76 (б);  $u_1$  – первый нуль ДН  $F_N(u)$

### Выводы

Для проверки изложенного выше метода максимизации коэффициента концентрации (2) при условиях (4), (5) были проведены расчеты для различных значений  $N$  и  $u_0$ . Результаты расчетов ДН и АФР для  $N = 1$  ( $F^{(2)}(0) = 0$ ) и  $N = 2$  ( $F^{(2)}(0) = F^{(4)}(0) = 0$ ) представлены соответственно на рис. 1, а, б. При поиске оптимальных ДН и АФР по формуле (20) требуется 3 – 4 итерации при различных значениях  $N$  и  $u_0$ , для всех случаев величина  $M = 5$ .

### МАКСИМІЗАЦІЯ КОЕФІЦІЄНТА КОНЦЕНТРАЦІЇ ПОТУЖНОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АНТЕНИ З ПЛОСКОЮ ДІАГРАМОЮ СПРЯМОВАНОСТІ

Є.Д. Прилепський

Для лінійної антени отриманий оптимальний амплитудно-фазовий розподіл струмів, що реалізує максимум коефіцієнта концентрації потужності випромінювання в класі максимально плоских діаграм спрямованості. Задача оптимізації такого коефіцієнта вирішена методом послідовних наближень.

**Ключові слова:** концентрація потужності випромінювання, максимально плоска діаграма спрямованості, оптимізація.

### MAXIMIZATION CONCENTRATION FACTOR OF POWER RADIATION FROM LINEAR ANTENNA WITH PLANE DIRECTIONAL PATTERN

E.D. Prilepskiy

For linear aerial the optimum gain-phase distributing of currents, realizing a maximum of coefficient of concentration of power of radiation in the class of maximally flat diagrams of orientation is got. The task of optimization of such coefficient is decided the method of progressive approximations.

**Keywords:** concentration of power of radiation, maximally flat diagram of orientation, optimization.

Как уже отмечалось, ДН  $f(u)$  из выражения (16) будет подавлять боковые лепестки у ДН  $F_N(u)$ . Проведенные расчеты показывают, что такое подавление при сохранении достаточно крутого среза главного лепестка осуществляется при  $u_0 \sim u_c$ . Действительно, при  $u_0 \ll u_c$  добавка  $f(u)$  в (16) оказывается очень малой и не может заметно изменить ДН  $F_N(u)$ . Оптимальная ДН оказывается жестко заданной условиями в начале координат – условиями Баттерворта (4). При  $u_0 \gg u_c$  добавка  $f(u)$  может заметно перестроить ДН  $F_N(u)$  в области  $u_0 \geq u \geq u_c$ . Однако в этом случае необходимость подавления боковых лепестков становится сомнительной, так как ДН  $F_N(u)$  при  $u_0 \gg u_c$  имеет коэффициент концентрации, очень близкий к максимально возможному:  $K = 1$ .

Отметим, что предлагаемый метод оптимизации коэффициента концентрации достаточно просто может быть применен и для антенн с круглым раскрытием. В этом случае АФР записывается через полиномы  $A_N(\rho)$ , ортогональные на интервале  $[0, 1]$  с весом  $\rho^3$ , где  $\rho$  – координата в круглом раскрытии. Это есть полиномы Якоби [4], которые могут быть выражены и через полиномы Лежандра от аргумента  $1 - 2\rho^2$ , соответствующая ДН при этом сводится к сумме функций Бесселя нечетных порядков, деленных на аргумент.

### Список литературы

1. Бахрах Л.Д. Синтез излучающих систем / Л.Д. Бахрах, С.Д. Кременецкий. – М.: Сов. радио, 1974. – 232 с.
2. Зелкин Е.Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности / Е.Г. Зелкин. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 272 с.
3. Минц М.Я. Оптимизация коэффициента концентрации мощности излучения линейной антенны с максимально плоской диаграммой направленности / М.Я. Минц, Е.Д. Прилепский // Радиотехника и электроника. – 1987. – Вып. 10, т. 32. – С. 2046-2051.
4. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1966. – 295 с.

Поступила в редколлегию 2.09.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Стрелков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.