

УДК 515.2

І.А. Чуб¹, М.В. Новожилова²¹ Університет цивільного захисту України, Харків² Харківський державний технічний університет будівництва та архітектури, Харків

ФОРМАЛІЗАЦІЯ УМОВ ВЗАЄМНОГО НЕПЕРЕТИНУ ОБ'ЄКТІВ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ БАГАТОКУТНИКІВ В АНІЗОТРОПНІЙ ОБЛАСТІ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Наведені результати побудови аналітичного опису геометричних обмежень взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат.

Ключові слова: оптимальний розподіл, взаємний неперетин, багатокутник, анізотропна область.

Вступ

Постановка проблеми. Велика кількість задач оптимального розподілу ресурсів, енергозбереження, що виникають у практичній діяльності, належать до класу оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів в ізотропній та анізотропній областях. Серед них практичний інтерес викликає оптимізаційна задача розкרוю шкіри, кожна ділянка якої характеризується своїм напрямком найменшої тягучості, який є параметром анізотропії. Теорія та методи розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропних областях не отримали достатнього розвитку, тому актуальним є математичне моделювання цих задач з урахуванням їх специфіки.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Як свідчить аналіз літературних джерел, на цей час є багато робіт, спрямованих на побудову математичних моделей і методів розв'язання оптимізаційних задач розміщення двовимірних геометричних об'єктів в ізотропних областях [1 – 3]. Клас задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області, незважаючи на значну практичну цінність, вивчений у меншому ступені, що обумовлено значною складністю таких задач у постановочному й обчислювальному планах. У роботах [4, 5] виділені властивості області припустимих рішень та конструктивні особливості аналітичного опису геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області. В [6] побудовано аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області.

Метою статті є отримання аналітичного опису обмежень взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат.

Основний матеріал

Постановка завдання. Нехай є двовимірною замкненою неопуклою багатокутною областю R_0 , заданою в полярній системі координат $\rho O \varphi$ упорядкованим

набором координат вершин $\{(\rho_0^k, \varphi_0^k)\}$, $k = \overline{1, K}$. Область R_0 є анізотропною внаслідок наявності в кожній точці області свого напрямку найменшої тягучості *sregion*. Законом розподілу анізотропії є еліпс напружень, а координати довільної точки області в декартовій системі координат визначаються (рис. 1):

$$x = at \cos \varphi, \quad y = bt \sin \varphi, \quad (1)$$

де t – коефіцієнт гомотетії; a , b – довжини півосей базового еліпса [6].

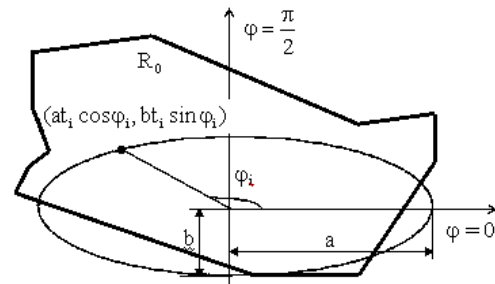


Рис. 1. Область розміщення R_0

Нехай є також скінчений набір опуклих багатокутних об'єктів $R = \{R_i\}$, $i = \overline{1, N}$ (рис. 2). У полярній системі координат об'єкт R_i задається набором $\{(\rho_i^n, \varphi_i^n)\}$, $n = \overline{1, n_i}$ координат його вершин у власній полярній системі координат $\rho_i O_i \varphi_i$, $i = \overline{1, N}$, де ρ_i^n – відстань i -ї вершини багатокутника R_i від полюса O_i ; φ_i^n – кут між полярною віссю й променем, що з'єднує полюс O_i полярної системи координат і i -ту вершину об'єкта R_i , $O_i \in \text{int } R_i$.

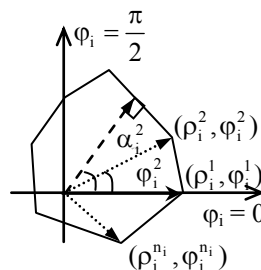


Рис. 2. Об'єкт R_i

Для об'єктів відомий набір $\{(\rho_i^n, \alpha_i^n)\}$, $n = \overline{1, n_i}$ відстаней ρ_i^n і кутів α_i^n між полярною віссю й нормаллю до прямої γ_i^n , що містить n -у сторону бага-

токутника R_i відповідно. При цьому рівняння прямої γ_i^n у власній полярній системі координат $\rho_i O_i \varphi_i$ має вигляд

$$\zeta_i^n \cos(\eta_i^n - \alpha_i^n) = p_i^n, \quad (2)$$

де ζ_i^n, η_i^n – радіус-вектор та кутовий параметр довільної точки прямої γ_i^n відповідно.

Розміщення об'єкта R_i визначається параметрами (t_i, φ_i) , що задають положення центру власної полярної системи координат $\rho_i O_i \varphi_i$, причому параметри (t_i, φ_i) зв'язані з параметрами трансляції $v_i = (x_i, y_i)$ полюса O_i співвідношеннями виду [6]:

$$x_i = at_i \cos \varphi_i, \quad y_i = bt_i \sin \varphi_i. \quad (3)$$

Властивість анізотропії області R_0 означає, що залежно від координати φ_i полюса O_i об'єкта R_i змінюється орієнтація власної системи координат $\rho_i O_i \varphi_i$ даного об'єкта.

Необхідно розмістити набір $R_i, i = \overline{1, N}$ об'єктів без взаємних перетинів в області R_0 так, щоб кількість N об'єктів розміщення була максимальною.

Геометричні обмеження даної задачі містять обмеження на розміщення об'єктів R_i в області розміщення R_0 :

$$R_i \subset R_0, \quad i = \overline{1, N} \quad (4)$$

і умови взаємного неперетину об'єктів (R_i, R_j) :

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (5)$$

Аналитичний опис умов (3) у полярній системі координат побудовано в [6]. Розглянемо умову взаємного неперетину пари об'єктів (5).

Формалізація умов взаємного неперетину об'єктів. Умова взаємного неперетину пари об'єктів (R_i, R_j) геометрично представляє нелінійну поверхню $\Gamma^4(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j) \subset E^4$. Побудуємо рівняння даної поверхні залежно від типу торкання об'єктів [6].

Торкання I типу. Розглянемо торкання типу: «вершина (ρ_j^n, φ_j^n) об'єкта R_j – сторона $\zeta_i^n \cos(\eta_i^n - \alpha_i^n) = p_i^n$ об'єкта R_i ».

Твердження 1. Умова торкання I типу має вигляд:

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n) = \rho_i \cos \alpha_i^n + p_i^n + \rho_j^n \cos(\varphi_j^n + \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n), \quad (6)$$

де $\alpha_i^n, p_i^n, \rho_j^n, \varphi_j^n$ – константи.

Доведення. Розглянемо деяку точку $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j) \in \Gamma^4$ (рис. 3), яка задає певне розміщення об'єктів R_i та R_j , за якого об'єкти торкаються.

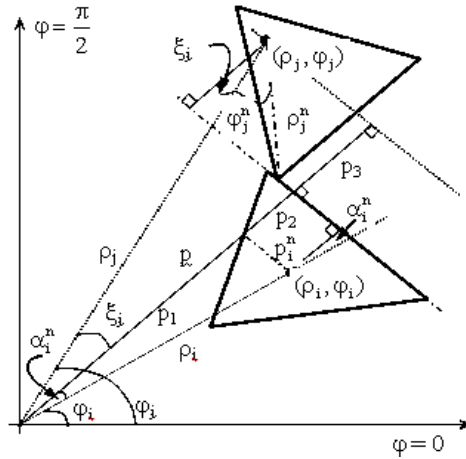


Рис. 3. Торкання I-го типу об'єктів R_i та R_j

Припустимо, що параметри (ρ_i, φ_i) об'єкта R_i є фіксованими. Тоді рівняння торкання I-го типу на основі Твердження 1 [6] (без урахування анізотропії області розміщення) має вигляд

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \alpha_i^n) = p, \quad (7)$$

де напрям p – нормаль до прямої Γ^2 , яка є паралельною стороною $\zeta_i^n \cos(\eta_i^n - \alpha_i^n) = p_i^n$ об'єкта R_i і містить полюс об'єкта R_j за умови торкання – збігається з напрямом p_i^n .

Нормаль p є такою:

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

$p_1 = \rho_i \cos \alpha_i^n$ – постійна величина;

$p_2 = \rho_j^n$ – постійна величина;

$p_3(\varphi_j) = \rho_j^n \cos(\xi_j + \varphi_j^n)$ – перемінна величина;

де $\xi_j = \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n$ – кут між нормаллю p та радіус-вектором ρ_j .

Отже, $p_3(\varphi_j) = \rho_j^n \cos(\varphi_j^n + \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n)$.

У загальному випадку параметри (ρ_i, φ_i) об'єкта R_i є змінними, тому ліва та права частини рівняння (7) ускладнюються, стаючи також функціями кутového параметра φ_i . При цьому складова $p_1 = \rho_i \cos \alpha_i^n$ правої частини рівняння також стає змінною величиною завдяки параметру ρ_i .

У підсумку умова торкання першого типу має вигляд:

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n) = \rho_i \cos \alpha_i^n + p_i^n + \rho_j^n \cos(\varphi_j^n + \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n).$$

Торкання II типу. Розглянемо торкання типу: «вершина (ρ_i^n, φ_i^n) об'єкта R_i – сторона $\zeta_j^n \cos(\eta_j^n - \alpha_j^n) = p_j^n$ об'єкта R_j » (рис. 4).

Твердження 2. Умова торкання II типу має вигляд:

$$\rho_j \cos(\alpha_j^n) = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^n) + \rho_i^n \cos(\varphi_j - \varphi_i + \varphi_i^n + \alpha_j^n) + p_j^n. \quad (8)$$

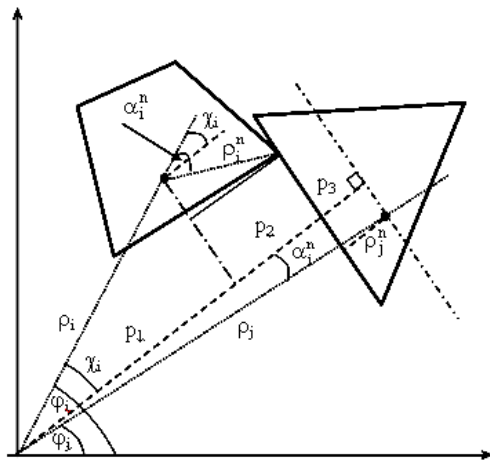


Рис. 4. Умова торкання II типу

Доведення. Аналогічно доведенню Твердження 1 припустимо, що параметри (ρ_i, φ_i) об'єкта R_i є фіксованими.

При незмінній орієнтації системи $\rho_j O_j \varphi_j$ умова торкання має вигляд (рис. 4):

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \alpha_j^n) = p, \quad (9)$$

де напрям p (p – нормаль до прямої Γ^2 , яка є паралельною стороною $\zeta_j^n \cos(\eta_j^n - \alpha_j^n) = \rho_j^n$ об'єкта R_j і містить полюс об'єкта R_j за умови торкання) збігається з напрямом p_j^n .

Довжина нормалі p є сумою трьох доданків:

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

$p_1 = \rho_i \cos \chi_i$, де $\chi_i = \varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^n$ – кут між нормаллю p та радіус-вектором ρ_i ;

$p_2 = \rho_i^n \cos(-\chi_i + \varphi_i^n)$, тобто, враховуючи χ_i ,

$p_2 = \rho_i^n \cos(\varphi_i^n + \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^n)$;

$p_3 = \rho_j^n$ – постійна величина.

Отже, нормаль p у загальному випадку є функцією параметрів розміщення пари об'єктів, R_i та R_j , що розглядаються.

Проведемо аналіз лівої частини рівняння (9), беручи до уваги властивість анізотропії області R_0 . Параметри ρ_j, φ_j задають положення полюсу об'єкту R_j , причому кут φ_j визначає орієнтацію власної системи координат об'єкта R_j , що спричиняє відповідне перевизначення кута α_j^n як кута між полярною віссю загальної системи координат та напрямом p , який збігається з напрямом p_j^n . Отже, при кожному значенні куту повороту φ_j $\alpha_j^n = \alpha_j^n + \varphi_j$. Таким чином, ліва частина рівняння (9) приймає вигляд $\rho_j \cos(\alpha_j^n)$.

Отже, умова торкання II типу має вигляд (6). Аналіз отриманих залежностей на множині діапазо-

нів можливих значень кутів (ця множина є скінченною) дозволив сформулювати таке

Твердження 3. Умови (5), (6), (7), (8) мають місце при всіх можливих значеннях кутів $\alpha_i^n, \varphi_i^n, \alpha_j^n, \varphi_j^n$.

Приклад. На закінчення побудуємо систему рівнянь, що описує точку $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j) \in \Gamma^4$, зображену на рис. 5.

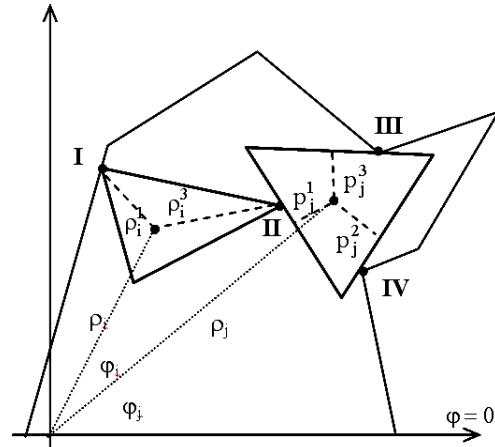


Рис. 5. Розміщення об'єктів

На рис. 5 римськими цифрами позначені торкання об'єктів області та між собою. Об'єкти R_i та R_j задаються такими параметрами (табл. 1):

Таблиця 1

Параметри об'єктів

n	R_i				R_j			
	ρ_i^n	φ_i^n	ρ_j^n	α_i^n	ρ_j^n	φ_j^n	ρ_j^n	α_j^n
1	5	1,33	1,79	2,54	6,4	2,46	2,68	0,13
2	3,16	-2,76	2,1	-1,21	6	-1,57	2,68	-1,06
3	6,08	-0,71	2,84	0,37	6,4	0,67	4	0,97

Область R_0 задається такими параметрами (вказані тільки необхідні) (табл. 2):

Таблиця 2

Параметри області

	Опис елемента		
I	$\rho \cos(\varphi - \alpha_0^1) = p_0^1$	2,68	0,89
III	(ρ_0^4, φ_0^4)	27,02	0,68
IV	(ρ_0^6, φ_0^6)	21,93	0,42

I – Торкання області I типу «Вершина (ρ_i^1, φ_i^1) об'єкту R_i – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_0^1) = p_0^1$ області R_0 ». У нашому випадку $(\rho_i^1, \varphi_i^1) = (5; 1,34)$,

$$\rho \cos(\varphi - \alpha_0^1) = p_0^1 \leftrightarrow \rho \cos(\varphi - 2,68) = 0,894.$$

Згідно Твердження 1 [6] аналітичний опис торкання області I типу має вигляд:

$$\rho_i \cos(\varphi_i - \alpha_0^1) = p_0^1 - \rho_i^1 \cos(\varphi_i^1 - \alpha_0^1 + \varphi_i).$$

Тому $\rho_i \cos(\varphi_i - 2,68) = 0,894 - 5 \cos(1,34 - 2,68 + \varphi_i)$
 або $\rho_i \cos(\varphi_i - 2,68) = 0,894 - 5 \cos(-1,34 + \varphi_i)$.

II – Умова взаємного неперетину об'єктів – торкання II типу «Вершина (ρ_i^3, α_i^3) об'єкта R_i – сторона $\zeta_j^1 \cos(\eta_j^1 - \alpha_j^1) = p_j^1$ об'єкта R_j », а точніше «вершина $(6,08; -0,711)$ об'єкта R_i – сторона $\zeta_j^1 \cos(\eta_j^1 - 0,13) = 2,68$ об'єкта R_j » згідно Твердження 2 поточної статті має вигляд:

$$\rho_j \cos \alpha_j^1 = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^1) +$$

$$+ \rho_i^3 \cos(\varphi_j - \varphi_i + \varphi_i^3 + \alpha_j^1) + p_j^1.$$

або

$$\rho_j \cos \alpha_j^1 = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^1) +$$

$$+ \rho_i^3 \cos(\varphi_j - \varphi_i + \varphi_i^3 + \alpha_j^1) + p_j^1.$$

III Торкання об'єкта R_j та області R_0 II типу: «Вершина (ρ_0^4, φ_0^4) області R_0 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_j^3) = p_j^3$ об'єкта R_j » згідно Твердження 2 [6] має вигляд:

$$\rho_0^4 \cos(\varphi_0^4 - \alpha_j^3 - \varphi_j) = \rho_j \cos \alpha_j^4 + p_j^4 \leftrightarrow$$

$$27,02 \cos(0,68 - 0,97 - \varphi_j) = \rho_j \cos(0,97) + 4.$$

IV Торкання об'єкта R_j та R_0 області II типу: «Вершина (ρ_0^6, φ_0^6) області R_0 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_j^2) = p_j^2$ об'єкта R_j » згідно Твердження 2 [6] має вигляд:

$$\rho_0^4 \cos(\varphi_0^4 - \alpha_j^2 - \varphi_j) = \rho_j \cos \alpha_j^2 + p_j^2 \leftrightarrow$$

$$21,93 \cos(1,48 - \varphi_i) = 0,48\rho_i + 2,68.$$

Система рівнянь, яка визначає точку $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j)$, що розглядається, має вигляд:

$$\begin{cases} \rho_i \cos(\varphi_i - \alpha_0^1) = \rho_0^1 - \rho_i^1 \cos(\varphi_i^1 - \alpha_0^1 + \varphi_i); \\ \rho_j \cos \alpha_j^1 = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^1) + \\ + \rho_i^3 \cos(\alpha_i^3 - \varphi_j - \alpha_j^1 + \varphi_i) + p_j^1; \\ \rho_0^3 \cos(\varphi_0^3 - \alpha_j^3 - \varphi_j) = \rho_j \cos \alpha_j^3 + p_j^3; \\ \rho_0^4 \cos(\varphi_0^4 - \alpha_j^2 - \varphi_j) = \rho_j \cos \alpha_j^2 + p_j^2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \rho_i \cos(\varphi_i - 2,68) = 0,894 - 5 \cos(\varphi_i - 1,34); \\ 0,136\rho_j = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - 0,136) + \\ + 6,08 \cos(\varphi_i - \varphi_j + 0,247) + 2,68; \\ 27,02 \cos(-0,29 - \varphi_j) = 0,56\rho_j + 4; \\ 21,93 \cos(1,48 - \varphi_j) = 0,48\rho_j + 2,68. \end{cases}$$

Розв'язком побудованої системи є вектор $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j) = (15,62; 0,8761; 23,02; 0,6001)$.

Висновки та напрями подальших досліджень

Розроблений аналітичний опис геометричних обмежень взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат є базою для розробки алгоритмічного й спеціалізованого програмного забезпечення розв'язання задач цього класу.

Список літератури

1. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. Milenkovic V. Placement and contraction of nonconvex polygons for clothing manufacture / V. Milenkovic, K. Daniels, Z. Li // 4-th Canadian Conf. On CG., St. John's, 1992.
3. Stoyan Yu.G. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation problem / Yu.G. Stoyan, M.V. Novozhilova, A.V. Kartashov // European Journal of Operation Research. – 1996. – № 92. – P. 193-210.
4. Новожилова М.В. Комп'ютерне моделювання умови неперетину в завданнях розміщення в анізотропній області / М.В. Новожилова, Є.А. Астахов // Системи обробки інформації. – 2003. – № 6. – P. 138-143.
5. Чуб І.А. Конструктивні особливості задачі розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області / І.А. Чуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 80. – С. 139-143.
6. Чуб І.А. Аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат / І.А. Чуб, М.В. Новожилова // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Х.: ХДУХТ, 2010. – Вип. 26. – С. 47-52.

Надійшла до редакції 1.12.2009

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Н.Д. Сизова, Харківський технічний університет будівництва та архітектури, Харків.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ВЗАИМНОГО НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В АНИЗОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

И.А. Чуб, М.В. Новожилова

Приведены результаты построения аналитического описания геометрических ограничений взаимного непересечения объектов задачи размещения многоугольников в анизотропной области в полярной системе координат.

Ключевые слова: оптимальное деление, взаимное непересечение, многоугольник, анизотропная область.

THE FORMALIZATION OF THE CONDITIONS OF MUTUAL NONINTERSECTION FACILITIES LOCATION PROBLEM OF POLYGONS IN THE ANISOTROPIC FIELD IN THE POLAR COORDINATE SYSTEM

I.A. Chub, M.V. Novozhilova

The results of constructing an analytic description of geometric constraint mutual nonintersection facilities location problem of polygons in the anisotropic field in the polar coordinate system is offered.

Keywords: optimum division, mutual uncrossing, polygons, anisotropic area.