УДК 519.8(075.8)

А.Ю. Гайдусь, А.П. Руденко

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім.. П. Василенка, Харків

ОПТИМІЗАЦІЯ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ РЕСУРСІВ ПРИ ЗМІННИХ УМОВАХ ЇХ ПОСТАЧАННЯ І СПОЖИВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕЛЕКТРОННОЇ ТАБЛИЦІ EXCEL

У статті розглядаються оптимізаційні моделі управління запасами ресурсів в умовах змінних параметрів постачання, використання і зберігання ресурсів на протязі розрахункового періоду, пропонуються математичні моделі для аналітичного дослідження і обґрунтування оптимальних рішень за допомогою офісних програм комп'ютерної таблиці Excel.

Ключові слова: *електрона таблиця Excel, оптимізаційні моделі управління запасами ресурсів.*

Вступ

Постановка проблеми та аналіз літератури. Важливою умовою ефективної виробничої і господарської діяльності підприємств і економіки в цілому особливо в сучасних умовах є оптимізація забезпечення ресурсів для виробництва і реалізації продукції. Тому дослідження і розв'язування таких задач є досить актуальнім. В роботах [2, 4] при розв'язуванні цих задач вважається що вартість постачання C_{1i} кожної i-ї партії ресурсу не залежить від обсягів постачань S_i кожної партії а проміжки часу t_i між сусідніми i-м і i+1 постачаннями, вартість c_{2i} зберігання одиниці ресурсу а також інтенсивність використання ресурсів q_i підприємством залишаються незмінними на протязі всього розрахункового періоду часу T. Але такі умови суттєво обмежують клас задач які виникають на практиці в діяльності підприємств.

Основна частина

Для реалізації рішення таких задач, виникає потреба знаходження оптимального плану управління запасами при різних проміжках часу t_i і інтенсивностях $q_i(\tau)$ використання ресурсу на кожному з них а вартість постачання кожної партії ресурсу залежить від обсягу i-го постачання ресурсу S_i.

Якщо немає затримки з постачанням кожної чергової партії ресурсу S_i то умови задачі можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)d\tau = Q, \sum_{i=1}^{n} t_i = T\,, \qquad (1)$$

де Q – загальні потреби підприємства на весь розрахунковий період T; t_i – тривалість i-го проміжку часу; $q_i(\tau)$ – інтенсивність витрачання i-ї партії ресурсу S_i; n – кількість партій постачань.

Необхідно знайти такі оптимальні обсяги постачань S_i^o і терміни t_i, при яких загальні витрати на постачання і зберігання ресурсів за весь розрахунковий період часу T будуть мінімальними.

За таких умов загальні витрати на постачання і зберігання ресурсів за весь розрахунковий період часу T можна записати у такому вигляді:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_{1i}S_i + c_{2i}\int_0^{t_i} \left[S_i - \int_0^{\tau} q_i(\tau)\, d\tau \right] d\tau \right\}. \qquad (2)$$

Досліджуючи умови (1) і функцію мети (2) задачу оптимізації постачання і використання ресурсів з метою забезпечення мінімальних загальних витрат Z на постачання і зберігання ресурсів можна ставити по різному.

1. Для заданих значень проміжків часу t_i, вартості постачання $c_{1i}(S_i)$, вартості зберігання $c_{2i}(S,t)$ та інтенсивності $q_i(\tau)$ використання ресурсів на підприємстві знайти оптимальні значення постачань S_i^o (i = 1,2, … , n) і часу постачань τ_i^o.

2. Для заданих значень постачань S_i (i = 1,2, … , n), вартості постачання $c_{1i}(S_i)$, вартості зберігання $c_{2i}(S,t)$ та інтенсивності $q_i(\tau)$ використання ресурсів на підприємстві знайти оптимальні значення проміжків часу t_i (i = 1,2, … , n).

3. Для заданих значень постачань S_i (i = 1,2, … , n), вартості постачання $c_{1i}(S_i)$, вартості зберігання $c_{2i}(S,t)$ та проміжків часу t_j знайти оптимальні значення інтенсивності $q_i(\tau)$ використання ресурсів на підприємстві (i = 1,2, … , n).

У першій постановці задачі (1),(2) аргументами функції мети являються обсяги постачань S_i.

$$Z(S_1...S_i...S_n) = \sum_{i=1}^{n} \{ c_{1i}S_i + \\ + c_{2i}\int_0^{t_i} \left[S_i - \int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau \right] dt \} \to \min. \qquad (3)$$

Записуючи умови екстремуму для (3) з урахуванням обмежень (1)

$$\frac{\partial Z}{\partial S_i} = 0, i = 1...n \tag{4}$$

і розв'язуючи систему з n рівнянь (4) відносно S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) знаходимо оптимальні значення S_i^o усіх постачань ресурсу за весь розрахунковий період часу T.

У другому варіанті задачі (1),(2) аргументами функції мети являються проміжки часу t_i

$$Z(t_1...t_i...t_n) = \sum_{i=1}^{n} \{c_{1i}S_i + \\ +c_{2j}\int_0^{t_i}\left[S_i - \int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau\right]dt\} \to \min. \tag{5}$$

Записуючи умови екстремуму для (5) з врахуванням обмежень (1)

$$\frac{\partial Z}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1...n \tag{6}$$

і розв'язуючи систему з n рівнянь (4) відносно t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) знаходимо оптимальні значення t_i^0 за весь розрахунковий період часу T.

Третій варіант задачі (1),(2) в загальному вигляді являється досить складним тому що треба знаходити оптимальні параметри функцій $q_i^0(\tau)$ на кожному проміжку часу t_i. Але якщо $q_i = \text{const}$, то

$$Z(q_1...q_i...q_n) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}S_i + c_{2j}\int_0^{t_i}[S_i \quad - \\ -\int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau]d\tau \to \min. \tag{7}$$

Записавши умови екстремуму для (7) з урахуванням обмежень (1)

$$\frac{\partial Z}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1...n \tag{8}$$

і розв'язуючи систему з n рівнянь (8) відносно q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можна знайти оптимальні значення q_i за весь розрахунковий період часу T.

Розглянемо знаходження оптимального плану управління запасами для першої задачі. Будемо вважати що на протязі кожного проміжку часу $t_i = S_i/q_i$ інтенсивність $q_i = \text{const}$, вартість постачання пропорціональна обсягу постачання $C_1 = c_{1i}\cdot S_i$ а вартість зберігання пропорціональна обсягам s і тривалості t зберігання ресурсу $C_2 = c_{2i}\cdot S\cdot t$

$$Z(t_1...t_i...t_n) = \sum_{i=1}^{n} \{c_{1i}S_i + \\ +c_{2j}\int_0^{t_i}\left[S_i - \int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau\right]d\tau\} = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}S_i + \frac{c_{2i}S_i^2}{2q_i} \to \min. \tag{9}$$

В даному варіанті задачі маємо n невідомих S_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які пов'язані між собою такими обмеженнями (1):

$$S_k = Q - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} S_i . \tag{10}$$

Записуємо умови екстремуму функції мети (9) враховуючи (10)

$$\frac{\partial Z}{\partial S_k} = \left(c_{1k} + \frac{c_{2k}S_k}{q_k}\right) + \\ + \sum_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{\partial Z}{\partial S_k}\left[c_{1i}\left(Q - \sum_{i=1,i\neq k}^{n} S_i\right) + \\ + \frac{c_{2i}\left[Q - \sum_{i=1,i\neq k}^{n}(Q - S_i)^2\right]}{2q_i} - \right] = 0, \tag{11}$$

$k = 1, 2 \cdots n$.

Розв'язуючи систему рівнянь (11) знаходимо точку екстремуму (S_{1extr}, S_{2extr},… S_{kextr}, …, S_{nextr}) і екстремальне значення функції мети Z_{extr}(S_{1extr}, S_{2extr},… S_{kextr}, …, S_{nextr}). Дослідження точки екстремуму показує що вона дає мінімумом функції Z, тобто є оптимальним розв’язанням задачі.

Приклад 1. Підприємство планує постачання потрібної йому загальної кількості Q ресурсів двічі за розрахунковий період. Інтенсивність використання ресурсу q_1 на першому і q_2 на другому проміжках часу, а також вартість постачання c_{11}, c_{12} одиниці ресурсу і зберігання c_{21}, c_{22} одиниці ресурсу за одиницю часу. на протязі одного проміжку часу залишаються незмінними. Необхідно визначити оптимальні обсяги $S°_1$, $S°_2$ постачань, при яких загальна вартість обох постачань і зберігання ресурсів буде мінімальною.

Запишемо обмеження

$$S_1 + S_2 = Q, \quad t_1 + t_2 = \frac{S_1}{q_1} + \frac{S_2}{q_2} = T$$

і функцію мети

$$Z = \sum_{i=1}^{2}\left\{c_{1i}S_i + c_{2i}\int_0^{t_i}\left[S_i - \int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau\right]d\tau\right\} = \\ = c_{11}S_1 + \frac{c_{21}S_1^2}{2q_1} + c_{12}S_2 + \frac{c_{22}S_2^2}{2q_2} = \\ = \left(c_{11} - c_{12} - \frac{c_{22}Q}{q_2}\right)S_1 + \left(\frac{c_{21}}{2q_1} + \frac{c_{22}}{2q_2}\right)S_1^2 + \\ + c_{12}Q + \frac{c_{22}Q^2}{2q_2} \to \min. \tag{12}$$

Позначивши

$$a = \frac{c_{21}}{q_1} + \frac{c_{22}}{q_2}; \quad b_1 = c_{11} - c_{12} - \frac{c_{22}Q}{q_2}; \\ d_1 = c_{12}Q + \frac{c_{22}Q^2}{2q_2}, \tag{13}$$

записуємо формулу (12) у більш зручному вигляді

$$Z = 0,5aS_1^2 + b_1S_1 + d_1 .$$

Записуємо умови екстремуму

$$\frac{\partial Z}{\partial S_1} = aS_1 + b_1 = 0, S_{1extr} = -\frac{b_1}{a};$$
$$Z_{extr} = d_1 - \frac{b_1^2}{2a}. \tag{14}$$

Аналогічно знаходимо екстремальне значення S_{2extr}

$$Z = \left(c_{12} - c_{11} - \frac{c_{21}Q}{q_1}\right)S_2 +$$
$$+\left(\frac{c_{21}}{2q_2} + \frac{c_{22}}{2q_2}\right)S_2^2 + \frac{c_{21}Q^2}{2q_1} \to \min;$$
$$a = \frac{c_{21}}{q_1} + \frac{c_{22}}{q_2};\;\; b_2 = c_{12} - c_{11} - \frac{c_{21}Q}{q_1};$$
$$d_2 = c_{11}Q + \frac{c_{21}Q^2}{2q_1};$$
$$Z = 0,5aS_2^2 + b_2S_2 + d_2;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial S_2} = aS_2 + b_2 = 0;\;\; S_{2extr} = -\frac{b_2}{a};$$
$$Z_{extr} = -\frac{b_2^2}{2a} + d_2. \tag{15}$$

Дослідивши екстремальну точку (S_{1extr}, S_{2extr}) можна впевнитись, що у ній досягається Z_{min}, тобто знайдені постачання є оптимальними.

Для прикладу обчислимо оптимальний план для таких даних:

$Q = 100$; $q_1 = 5$; $q_2 = 10$;
$c_{11} = 20$; $c_{12} = 15$; $c_{21}=5$; $c_{22} = 10$.

Обчислюємо коефіцієнти:

$a = 2$; $b_1 = –95$; $d_1 = 6500$; $b_2 = –105$;
$d_2 = 7000$; $S_{1opt} = 42,5$; $S_{2opt} =57,5$; $Z_{min} = 424$.

Приклад 2. Знайти оптимальний план управління запасами для $n = 3$, $Q = 300$, $q_1 = 10$, $q_2 = 20$, $q_3 = 30$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 8$, $c_{21} =.6$, $c_{22} = 7$, $c_{23} = 4$.

Запишемо функцію мети

$$Z(S_1, S_2, S_3) = \sum_{i=1}^{3}\left(c_{1i}S_i + \frac{c_{2i}S_i^2}{2q_i}\right) =$$
$$= c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 + \frac{c_{21}S_1^2}{2q_1} +$$
$$+\frac{c_{22}S_2^2}{2q_2} + \frac{c_{23}S_3^2}{2q_3}.$$

Весь ресурс Q повністю використовується тому

$$Q = S_1 + S_2 + S_3;\quad S_2 = Q - S_1 - S;$$
$$S_1 = Q - S_2 - S_3;\quad S_2 = Q - S_1 - S; \tag{16}$$
$$S_3 = Q - S_1 - S_2.$$

Згідно з (11) записуємо умови екстремуму

$$\frac{\partial Z}{\partial S_1} = c_{11} + \frac{c_{21}S_1}{q_1} + \frac{\partial z_1}{\partial S_1}\Big[c_{13}(Q - S_1 - S_3) +$$
$$+\frac{c_{22}(Q - S_1 - S_3)^2}{2q_2}\Big] + \frac{\partial Z_2}{\partial S_2}\Big[c_{13}(Q - S_1 - S_2) +$$
$$+\frac{c_{23}(Q - S_1 - S_2)^2}{2q_3}\Big] = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S_2} = c_{12} + \frac{c_{22}S_2}{q_2} + \frac{\partial z_1}{\partial S_2}\Big[c_{11}(Q - S_2 - S_3) +$$
$$+\frac{c_{21}(Q - S_2 - S_3)^2}{2q_1}\Big] + \frac{\partial Z_3}{\partial S_2}\Big[c_{13}(Q - S_1 - S_2) +$$
$$+\frac{c_{23}(Q - S_1 - S_2)^2}{2q_3}\Big] = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S_3} = c_{13} + \frac{c_{23}S_{31}}{q_3} + \frac{\partial z_1}{\partial S_3}\Big[c_{11}(Q - S_2 - S_3) +$$
$$+\frac{c_{21}(Q - S_1 - S_3)^2}{2q_1}\Big] = 0$$

і отримуємо систему таких рівнянь

$$c_{12} - c_{11} - c_{13} + S_1c_{23} / q_3 + S_2(c_{22} / q_2 + c_{21} / q_1 +$$
$$+c_{23} / q_3) + S_3q_{21} / q_1 - Q(c_{21} / q_1 + c_{23} / q_3) = 0;$$

$$c_{13} - c_{11} - c_{12} + S_1c_{22} / q_2 + S_2c_{21} / q_1 +$$
$$S_3(c_{21} / q_1 + S_3(c_{21} / q_1 + c_{22} / q_2 + c_{23} / q_3) -$$
$$-Q(c_{21} / q_1 + c_{23} / q_3) = 0;$$

$$c_{11} - c_{12} - c_{13} + S_1(c_{21} / q_1) + c_{22} / q_2 + c_{23} / q_3) +$$
$$+S_2c_{23} / q_3) + S_3c_{22} / q_2 - Q(c_{22} / q_2 + c_{23} / q_3) = 0,$$

з якої після підстановки заданих значень параметрів знаходимо оптимальні значення постачань $S°_1 = 46,68$, $S°_2 = 65,74$, $S°_3 = 187,57$ і мінімум загальних витрат $Z_{min} = 6147,2$.

Наведені приклади свідчать про те, що розрахунок оптимального управління запасами при великій кількості постачань є досить громіздкою процедурою. Користуючись електронною таблицею Excel можна просто і швидко знаходити оптимальне рішення не вдаючись до складних аналітичних досліджень.

Розглянемо приклад знаходження оптимального рішення такої задачі в системі Excel для $Q = 500$, $n = 4$, $c_{11} = 10$, $c_{12} = 15$, $c_{13} = 12$, $c_{14} = 8$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = 6$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 5$, $q_1 = 20$, $q_2 = 30$, $q_3 = 25$, $q_4 = 18$. Запишемо для цього прикладу обмеження

$$S_1 + S_2 + S_3 = Q$$

і функцію мети

$$Z(S_1, S_2, S_3, S_4) = c_{11}S_1 + \frac{c_{21}S_1^2}{2q_1} + c_{12}S_2 + \frac{c_{22}S_2^2}{2q_2} +$$
$$+c_{13}S_3 + \frac{c_{23}S_3^2}{2q_3} + c_{14}S_4 + \frac{c_{24}S_4^2}{2q_4} \to \min.$$

Записуємо умови і функцію мети задачі на аркуші таблиці Excel. У клітинках **B3:N3** записуємо задані значення параметрів задачі Q, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, q_1, q_2, q_3, q_4, у клітинках **C5:F5** записуємо початкові значення S_1, S_2, S_3, S_4 рівні 0 а у клітинках **C6:F6** записуємо вирази для обчислення складових функції мети Z:

у клітинку **C6** **=C3*C5+0,5*G3*C5^2/K3;**

у клітинку **D6** **=D3*D5+0,5*H3*D5^2/L3;**

у клітинку **E6** **=E3*E5+0,5*I3*E5^2/M3;**

у клітинку **F6** **=F3*F5+0,5*J3*F5^2/N3.**

У клітинку **G5** записуємо суму усіх постачань **=СУММ(C5:F5)** а у клітинку **G6 –** загальну суму функції Z **= СУММ(C6:F6).** В головному меню аркушу Excel відкриваємо **Сервис →Поиск решения.** У діалоговому вікні **Поиск решения** вказуємо на клітинку функції мети **G6,** на клітинки **C5:F5** для зміни значень S_1, S_2, S_3, S_4 і на клітинку **G5** для обмеженя Q. Клацнувши на кнопці **Параметры** відкриваємо діалогове вікно вибору параметрів, в якому потрібно виділити **Неотрицательные значения,** клацнути на кнопці **Ок** і повернутись до вікна **Поиск решения**, в якому клацнути на кнопці **Выполнить.** На аркуші Excel зявляються оптимальні значення постачань у клітинках **C5:F5** ($S_1 = 289{,}42$; $S_2 = 47{,}36{,}8$; $S_3 = 103{,}93$; $S_4 = 59{,}3$) і мінімальне значення функції Z_{min}=2763 у клітинці **G6** і її складових у клітинках **C6:F6.**

Якщо вартість постачання C_{1i} кожної партії ресурсу не залежить від кількості S_i ресурсу, тоді

$$Z(S_1 ... S_i ... S_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[C_{1i} + c_{2i}\int_0^{t_i}\left(S_i - \int_0^{\tau} q_i\, d\tau\right)d\tau\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(C_{1i} + \frac{c_{2i}S_i^2}{2q_i}\right)$$

і умови екстремуму

$$\frac{\partial Z}{\partial S_k} = \frac{c_{2k}S_k}{q_k} + \sum_{i=1, i\neq k}^{n}\frac{c_{2i}\left(Q - \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} S_i^2\right)}{2q_i} = 0. \quad (17)$$

Розглянемо приклад з двома постачаннями:

$$Z(S_1, S_2) = c_{11} + 0{,}5c_{21}S_1^2 / q_1 + c_{12} + 0{,}5c_{22}S_2^2 / q_2 =$$
$$= c_{11} + c_{12} + 0{,}5\left[c_{21}S_1^2 + c_{22}(Q - S_1)^2 / q_2\right] \to \min.$$

Записуємо умови екстремуму:

$$\partial Z / \partial S_1 = S_1 c_{21} / q_1 - c_{22}(Q - S_1) / q_2 = 0;$$
$$\partial Z / \partial S_2 = -c_{21}(Q - S_2) / q_1 + c_{22}S_2 / q_2 = 0,$$

розв'язавши які, знаходимо

$$S_1^0 = \frac{Q}{1 + \dfrac{c_{21}q_2}{c_{22}q_1}}; \quad S_2^0 = \frac{Q}{1 + \dfrac{c_{22}q_1}{c_{21}q_2}}.$$

Приклад. Q = 100, $q_1 = 5$, $q_2 = 10$, $c_{11} = 20$, $c_{12} = 15$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 10$.

$$S_1^0 = \frac{100}{1 + \dfrac{5\times 10}{10\times 5}} = 50; \quad S_2^0 = \frac{100}{1 + \dfrac{10\times 5}{5\times 10}} = 50.$$

Розглянемо тепер задачу управління запасами в умовах незадоволеного попиту. У такій задачі загальні потреби Q підприємства в ресурсі на весь розрахунковий період T складаються з суми потреб V_i, які воно споживає з інтенсивністю $q_i(\tau)$ на кожному проміжку часу t_i, але обсяги S_i постачань не задовольняють потреб Vi, які може споживати підприємство за час t_i, тому на протязі кожного t_{i2} підприємство несе збитки в розмірі $c_{iн}$ від кожної одиниці недопостачання ресурсу за одиницю часу. Обмеження задачі можна записати у такому вигляді

$$Q = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n}\left[S_i + \int_0^{t_{i2}} q_i(\tau)\tau d\tau\right];$$
$$\sum_{i=1}^{n} t_i = T,\ t_i = \varphi_i\left[V_i, q_i(\tau)\right]. \quad (18)$$

Вважаючи незмінними вартість постачання c_{1i}, зберігання c_{2i} одиниці продукції а також збитків $c_{нi}$ від одиниці незадоволеного попиту на ресурс на кожному проміжку часу t_i, запишемо вартість загальних витрат

$$Z(S_1, S_2, ..., S_i, ..., S_n, V_1, V_2, ..., V_i, ..., V_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{c_{1i}S_i + c_{2i}\int_0^{t_i}\left[S_i - \int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau\right]d\tau\right\} + \quad (19)$$
$$+ c_{нi}\int_0^{t_{2i}} q_i(\tau)d\tau \to \min.$$

Проведемо дослідження даної математичної моделі для випадку, коли $q_i(\tau) = q_i = \mathrm{const}$ в межах проміжку часу t_i. За таких умов обмеження (18) і функцію мети (19) можна записати так

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i t_i; \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = T; \quad t_i = V_i / q_i;$$
$$t_{2i} / t_i = (V_i - S_i) / V_i; \quad t_{1i} / t_i = S_i / V_i; \quad (20)$$
$$Z(S_1, ..., S_i, ..., S_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[c_{1i}S_i + 0{,}5q_i(c_{2i}t_{1i}^2 + c_{нi}t_{i2})\right] \to \min.$$

Приймаючи до уваги (18), отримуємо

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\left\{c_{1i}S_i + \frac{0{,}5\left[c_{2i}S_i^2 + c_{нi}(V_i - S)^2\right]}{q_i}\right\}. \quad (21)$$

Записуємо умови екстремуму функції (21) з врахуванням обмежень (20), згідно з якими усі змінні S_i,V_i пов'язані між собою, тобто кожна з них являються функцією інших:

$$\frac{\partial Z}{\partial S_k} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial V_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Розв'язуючи систему з 2n рівнянь (22) можна знайти оптимальний план управління запасами з врахуванням незадоволеного попиту.

Методика знаходження оптимального рішення даної задачі подібна до попередніх задач (9) – (11). Розглянемо її на прикладі для $n = 2$, $q_1 = 10$, $q_2 = 20$, $c_{11} = 3$, $c_{21} = 4$, $c_{н1} = 20$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 6$, $c_н = 3$, $Q = 200$.

Запишемо функцію мети і обмеження

$$Z(S_1,S_2) = c_{11}S_1 + \frac{0,5\left[c_{21}S_i^2 + c_{н1}(V_i - S_1)^2\right]}{q_1} + \\ + c_{12}S_2 + \frac{0,5\left[c_{22}S_2^2 + c_{н2}(V_i - S_i)^2\right]}{q_i}; \tag{23}$$

$$V_1 + V_2 = Q; \quad S_1 \le V_1; \quad S_2 \le V_2. \tag{24}$$

Записуємо умови екстремуму для (23) з врахуванням обмежень (24)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial V_1} &= \frac{c_{н1}(V_1 - S_1)}{q_1} - \frac{c_{н2}(Q - V_1 - S_2)}{q_2} = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial V_2} &= \frac{-c_{н1}(Q - V_2 - S_1)}{q_1} + \frac{c_{н2}(V_2 - S_1)}{q_2} = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial S_1} &= c_{11} + \frac{c_{21}S_1 - c_{н1}(V_1 - S_1)}{q_1} = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial S_2} &= c_{12} + \frac{c_{22}S_1 - c_{н2}(V_2 - S_2)}{q_2} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Підставляючи в (25) значення заданих параметрів, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2V_1 - S_1 + S_2 &= 200; \\ 2V_2 + S_1 - S_2 &= 200; \\ 3 + 2,4S_1 - 2V_1 &= 0; \\ 5 + 2,4S_2 - 2V_2 &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

розв'язуючи яку з врахуванням обмежень (24) отримуємо оптимальний план $V_1 = 102$, $V_2 = 98$, $S_1 = 83$, $S_2 = 80$, $Z_{min} = 3966$.

Цей приклад показує, що для знаходження оптимального плану шляхом дослідження умов екстремуму (23) потрібно виконати досить громіздкі обчислення навіть для такого простого прикладу. Електронна таблиці Excel дозволяє нам просто і швидко знайти оптимальне рішення цієї задачі практично для будь-яких значень n.

Запишемо засобами системи Excel формули які потрібно ввести у відповідні клітинки аркуша таблиці для виконання усіх необхідних обчислень для нашого прикладу. У клітинки **B3:J3** записуємо усі задані значення параметрів задачі, а у клітинки **B4:D5** - початкові значення S_1, S_2, V_1, V_2 рівні нулю. У клітинках **B6:C6** записуємо формули для обчислення значень функції мети $Z(S_1,S_2,V1,V2)$:

у клітинку B6**: = B3*B4 + 0,5*(C3*B4^2 + D3*(B5–B4)^2)/H3**;

у клітинку C6: **= E3*C4 + 0,5*(F3*C4^2 + G3*(C5–C4)^2)/H3**;

у клітинку D6: **= СУММ(B6:C6)**,

а у клітинкуD5: **= СУММ(B5:C5)**.

Викликаємо сервісну програму **Поиск решения** (у пункті **Сервис** меню таблиці) і виконуємо необхідні дії у діалоговому вікні **Поиск решения**:

1.У полі **Установить целевую** мишкою вказати на клітинку **D6**;

2. У полі **Изменяя ячейки** мишкою виділити клітинки **B4:C5**,

3. Вказати мишкою в поле **Ограничения** і за допомогою кнопки **Добавить** ввести такі обмеження **D5 = 200, B4 <= B5, C4 <= C5**.

4. Мишкою клацнути на кнопці **Параметри** і у діалоговому вікні параметрів мишкою поставити "прапорець" на полі "неотрицательные значения". Клацнувши на кнопці **Ок** вернутись в діалогове вікно **Поиск решения,** в якому клацнути на кнопці **Выполнить**. На аркуші таблиці з'являться результати рішення:

$V_1° = 102,5$; $V_2° = 92,5$; $S_1° = 84,16$;
$S_2° = 79,17$; $Z_{min} = 3990,84$.

Якщо у вартості виготовлення продукції основними складовими є витрати на постачання, зберігання запасів ресурсу а також збитки від незадоволеного попиту на обсяги ресурсу тоді підприємству важливо досягти не мінімальних витрат на постачання і зберігання ресурсу, а максимальної різниці між загальною вартістю продукції, яку здатне виготовити підприємство з усього поставленого йому ресурсу, і загальними витратами на постачання, зберігання ресурсу і збитків від незадоволених потреб підприємства на ресурс.

Якщо p_i – це вартість продукції виготовленої з одиниці ресурсу на кожному проміжку часу t_i між сусідніми постачаннями ресурсу то функцію мети можна записати так:

$$Z\left(S_1,...,S_i,...,S_n,V_1,...,V_i,...,V_n\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left\{(p_i - c_{1i})S_i - c_{2i}\int_0^{t_{1i}}\left[S_i - \right.\right. \\ \left.\left. - \int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau - c_{нi}\int_0^{t_{2i}}\int_0^{\tau} q_i(\tau)d\tau d\tau\right\} \to \min. \tag{27}$$

У випадку, коли $q_i = \text{const}$, отримуємо

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\left\{p_iS_i - \left[c_{1i}S_i + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{c_{2i}S_1^2 + c_{нi}(V_i - S_i)^2}{2q_i}\right]\right\} \to \max. \tag{28}$$

Методика знаходження оптимального плану цієї задачі на максимум така ж як і для задачі на мінімум.

Приклад. $n = 2$, $q_1 = 10$, $q_2 = 15$, $c_{11} = 3$, $c_{21} = 4$, $c_{н1} = 20$, $c_{12} = 5$, $c_{22} = 6$, $c_{н2} = 30$, $p_1 = 40$, $p_2 = 30$, $Q = 200$.

Запишемо функцію мети

$$Z(S_1, S_2, V_1, V_2) = (p_1 - c_{11})S_1 + \\ +(p_2 - c_{12})S_2 - \frac{c_{21}S_1^2 + c_{н1}(V_1 - S_1)^2}{2q_1} - \\ - \frac{c_{22}S_2 + c_{н2}(V_2 - S_2)^2}{2q_2} \to \max; \\ V_1 + V_2 = Q. \quad (29)$$

Записуємо умови екстремуму для (29)

$$\frac{\partial Z}{\partial V_1} = \frac{c_{н1}(V_1 - S_1)}{q_1} + \frac{c_{н2}(V_1 + S_2 - Q)}{q_2} = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial V_2} = \frac{c_{н1}(V_2 + S_1 - Q)}{q_1} + \frac{c_{н2}(V_2 - S_2)}{q_2} = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial S_1} = p_1 - c_{11} - \frac{c_{21}S_1 + c_{н1}(V_2 - S_2)}{q_1} = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial S_2} = p_2 - c_{12} + \frac{c_{22}S_2 + c_{н2}(V_2 - S_2)}{q_2} = 0. \quad (30)$$

Підставляємо значення заданих параметрів в (30) і отримуємо:

$$Z = 37S_1 + 25S_2 - 0,2S_1^2 - \\ (V_1 - S_1)^2 - 0,2S_2^2 \to \max, \quad (31)$$

$$2V_1 - S_1 + S_2 - 200 = 0, \\ 2V_2 + S_1 - S_2 - 200 = 0, \\ 37 - 2,4S_1 + 2V_1 = 0, \\ 25 - 2,4S_2 + 2V_2 = 0. \quad (32)$$

Після розв'язування системи рівнянь (32) знаходимо $S°_1$= 111,25, $S°_2$= 81,25,$V°_1$= 115, $V°_2$= 85.

Підставивши знайдені оптимальні $S°_1$, $S°_2$,$V°_1$, $V°_2$ в (31) отримуємо Z_{max} = 2323.

Якщо вартість постачання c_{11} і c_{12} кожної партії ресурсу не залежить від кількості ресурсу в партії, тоді

$$Z = \sum_{i=1}^{2} p_i S_i - c_{1i} - \frac{c_{2i}S_i^2 + c_{нi}(V_i - S_i)^2}{2q_i} = \\ = p_1S_1 + p_2S_2 - c_{1i} - c_{2i} - \\ - \frac{c_{21}S_1^2 + c_{нi}(V_1 - S_1)^2}{2q_1} - \\ - \frac{c_{22}S_2^2 + c_{нi}(V_2 - S_2)^2}{2q_2} \to \max. \quad (33)$$

Змінюючи задані параметри задачі в аркуші Excel можна дослідити вплив кожного з них на показники ефективності управління запасами.

Висновки

Запропоновані у даній роботі моделі теоретичного дослідження і розрахункова методика розв'язування практичних задач у Microsoft Excel дають можливість приймати науково обґрунтовані оптимальні рішення по управлінню постачаннями, зберіганням и використанням ресурсів з метою підвищення ефективності роботи підприємств.

Список літератури

1. *Зімін А.М. Управління запасами при різних умовах постачання / А.М. Зімін // Управління розвитком: зб. наук. статей. – Х.: ХНЕУ, 2009. – С. 31-32.*
2. *Ульянченко О.В. Сучасні моделі дослідження операцій в економіці / О.В. Ульянченко. – Х.: ХДТУ, 2000. – 140 с.*
3. *Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць Excel / І.Ю. Леснікова, Н.В. Халіпова, М.В. Терещенко, С.М. Харченко, Н.М. Єршова. – К., 2007. – 184 с.*
4. *Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах / Е.М. Кудрявцев. – М.: Радио и связь, 1984. – 181 с.*

Надійшла до редколегії 15.12.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.О. Фурман, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка, Харків.

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ РЕСУРСОВ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ ИХ ПОСТАВОК И ПОТРЕБЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННОЙ ТАБЛИЦЫ EXCEL

А.Ю. Гайдусь, А.П. Руденко

В статье рассматриваются оптимизационные модели управления запасами ресурсов в условиях изменяющихся параметров снабжения, использования и хранения ресурсов в течение расчетного периода, предлагаются математические модели для аналитического исследования и обоснования оптимальных решений с помощью офисных программ компьютерной таблицы Excel.

Ключевые слова: *электрона таблица Excel, оптимизационные модели управления запасами ресурсов.*

OPTIMIZATION OF STOREKEEPING OF RESOURCES UNDER VARIABLE CONDITIONS OF THEIR DELIVERIES AND CONSUMPTION IN EXCEL ENVIRONMENT

A.Y. Gaidus , A.P. Rudenko

In article are considered optimization models of storekeeping of resources in conditions of changing parameters of supply of use and storage of resources during the settlement period, mathematical models for analytical research and a substantiation of optimum decisions with the help of office programs of computer table Excel are offered.

Keywords: *electron table of Excel, case the supplies of resources frames of optimizations.*