

УДК 626/628:528.574

О.С. Бутенко, С.И. Березина

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

*Предложена методология определения точек максимальной энтропии и на их основе определения точек бифуркации с использованием тензоров для определения зоны перехода из бассейна одного аттрактора в другой. На основе комплексного подхода к построению прогноза возможных изменений состояния аномалии с анализом ее возможного перехода к одному из типов элементарных катастроф, сформулированы аксиомы, выражающие необходимые и достаточные условия возможности измерения или шкалирования предпочтений при построении предиктора в условиях неопределенности*

**Ключевые слова:** признаки, тензор, деформации, сдвиг, анализ, факторы влияния.

### Введение

Как известно, информативные признаки, используемые при классификации процессов, отличаются разнообразием и определяются целью классификации. Поскольку априорный список факторов, оказывающих влияние на отклик, обычно весьма обширен, то при формировании информативного множества признаков его необходимо сократить, т.е. произвести отсев избыточных и отобрать наиболее существенные факторы. Данная задача решается с помощью алгоритма Флойда и построения матрицы максимального влияния [1].

Все наблюдаемые процессы, характеризующие физические явления, в самом общем виде классифицируются по стационарности как детерминированные и случайные [2]. Согласно определениям детерминированный процесс определяется одной единственной реализацией, описываемой заданной функцией времени. Однако, вследствие неизбежного влияния разнообразных внешних и внутренних факторов возмущений по отношению к исследуемой аномалии детерминированный процесс является абстракцией. В отличие от детерминированного процесса, случайный процесс представляется в виде случайной функции  $X(t, \omega)$ , где  $t$  – время,  $\omega \in \Omega$ , а  $\Omega$  – пространство элементарных событий. Функция  $X(t, \omega)$  в любой момент времени может принимать различные значения с известным или неизвестным законом распределения [2].

Рассматриваемые в каждом конкретном случае процессы и явления, характеризующие экологическое состояние анализируемого участка местности и подлежащие прогнозу, представляют собой, как правило, случайные процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем. Однако тот исходный материал, по которому осуществляется прогноз (архив снимков) и данные контактных методов, заданные априори, а также использование вычислительной техники для получения количественных характеристик, приводит к необходимости рассмотрения про-

цессов в дискретные моменты времени.

**Цель статьи:** анализ процессов, характеризующих возможное изменение состояний аномалий экологического происхождения, формулировка аксиом, позволяющих установить взаимосвязь между прескриптивной и дескриптивной моделями при построении предиктора в условиях неопределенности, разработка методологии определения точек максимальной энтропии, и на их основе определения точек бифуркации с использованием тензоров для определения зоны перехода из бассейна одного аттрактора в другой.

### Основная часть

Известно, что исчерпывающей характеристикой случайного процесса является многомерный закон распределения. Вероятностные характеристики стационарных случайных процессов одинаковы во всех сечениях. Условием стационарности в узком смысле является инвариантность  $n$ -мерной плотности вероятности относительно временного сдвига. Условия стационарности в широком смысле ограничиваются требованиями независимости от времени математического ожидания и дисперсии и зависимости корреляционной функции лишь от временного сдвига. Структуру случайного процесса можно установить по корреляционной функции или по известной плотности распределения [2, 3].

Однако, отклонения от классической формы распределения говорит о нестационарности процесса. По одной реализации ограниченной длины трудно с достаточной точностью судить о законе распределения случайного процесса. В этом случае тип процесса либо постулируется, либо функция распределения не учитывается при анализе [2, 3]. Для нестационарных процессов характерно изменение во времени их статистических характеристик. Обычно выделяют процессы, которые имеют переменное во времени среднее значение; переменное во времени среднее значение квадрата, переменные во времени среднее и среднее значение квадрата, пере-

менную по времени частотную структуру. Подобная классификация отражает изменение во времени оценок вероятностных характеристик [2].

Для выявления нестационарных свойств предлагается использовать непараметрические критерии, показатель Херста и нечеткую логику, по результатам применения которых будет формироваться вектор информативных признаков  $R$  [3].

Значительное большинство непараметрических критериев реагируют на изменение оценки математического ожидания. По значению показателя Херста можно судить как о стационарности процесса по математическому ожиданию, так и о виде детерминированной составляющей. Корреляционная функция несет информацию о динамических свойствах исследуемого процесса.

В условиях ограниченной априорной информации, а именно при анализе аномалии, вызванной нарушением экологической стабильности, о свойствах исследуемого процесса ее дальнейшего распространения решение о классе процесса следует принимать по результатам применения совокупности критериев. В связи с этим предлагается получить некий обобщенный классификационный признак. Поэтому необходимо четко классифицировать все признаки внутри каждого из фрагментов и сформировать единый класс общих признаков, объединяющих отдельные фрагменты в единое целое. По этому классу признаков определить их влияние на рассматриваемый участок в целом, т.е. выявить по ним причинно-следственные связи при построении зависимостей, объединяющих фрагменты в новый единый временной ряд.

При динамическом прогнозировании необходимо использование моделей, базирующихся на понятиях текущих состояний объекта. В зависимости от факторов, описывающих текущее состояние объекта в конкретный момент времени необходимо принять единственно правильное решение о дальнейшей динамике распространения явления, связанного с рассматриваемым объектом. Необходимо определить каким образом информация об уровнях состояний приводит к выбору решений, связанных с скоростью изменения соответствующих параметров.

Применяя вышесказанное к анализируемой аномалии, следует отметить, что анализ многих проблем, в частности, экологических, затрагивает чрезвычайно сложные системы, содержащие большое число переменных, взаимодействующих друг с другом, реагирующих на изменения каждой другой переменной и т.п. Эти взаимодействия могут быть представлены в виде причинно-следственных отношений, которые можно выразить в виде графовых моделей взаимодействия (критериальных деревьев, гиперграфовых структур), позволяющих дефрагментировать изображение в соответствии с заданными критериями [4]. В качестве заданных критериев могут быть пороговые значения весовых коэффициентов зон вероятного загрязнения, степень однородно-

сти изображения, и пр. Данный подход позволяет не только проследить причинно-следственные отношения, лежащие в основе дальнейшего прогнозирования ситуации, но и выработать степень взаимосвязи всех листьев каждого дерева в отдельности и совокупности всех построенных деревьев, построенных по априори заданным снимкам. Использование понятия нечеткого множества позволяет предположить, что любой элемент лишь в некоторой степени принадлежит данному множеству. Основным способом описания нечеткого множества - определение степени принадлежности его элементов числом интервала  $[0,1]$ : 1 – "принадлежит"; 0 – "не принадлежит" [5]. Однако этот подход дает значительную погрешность, поскольку часть исходных данных при построении прогноза практически сразу отбрасывается.

Для проведения операции динамического прогнозирования строится временной ряд из набора количественных характеристик, полученных из построенных «критериальных деревьев», построенных по имеющимся в наличии снимкам, а также в результате проведения нечетких операций [1, 5] с факторами максимального влияния. Однако, даже внутри каждого листа «критериального дерева» процесс распространения аномалии не может рассматриваться как стационарный. Поэтому весь временной ряд должен рассматриваться как совокупность мгновенных стационарных подрядов с минимизацией интервалов времени. В каждом из полученных подрядов (листьев критериального дерева) рассчитывается значение показателя Херста ( $H$ ). По его значению формируется вектор дополнительных информативных признаков, характеризующий скорость распространения аномалии в рассматриваемый период времени, т.е. состояние динамической системы в целом. Учет предыдущих значений показателя Херста позволяет сделать вывод о том, что тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем. И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, продолжение уменьшения в будущем [5]. Более того, с помощью метода нормированного размаха Херста есть возможность рассчитать показатели Херста не только в области анализируемой аномалии, но и в смежных зонах, установить зависимость между полученными показателями Херста в различных зонах получить некоторую оценку интервалов предсказуемости поведения данного ряда и подрядов в зависимости от коррелированности полученных значений. Границы ареалов различного происхождения будут характеризоваться точками излома статистики Херста, на которых оценка показателя Херста будет существенно изменяться. Случай, когда показатель Херста равен 0,5, определяет предпосылку для проведения дальнейшего анализа с использованием аппарата алгебры нечеткой логики, введением дополнительных условий и переменных, имеющих меньшую степень влияния в матрице при-

оритетов, а также анализа соседних с локализованной на снимке аномалией фрагментов изображения, что позволит сделать вывод о дальнейшем направлении и скорости ее распространении. Усредненные значения полученных показателей Херста являются исходными данными для построения общего предварительного прогноза во всей интересующей зоне с расширенными границами с посредством классического аппарата математической статистики.

При проведении операции причинно-следственных связей, предшествующей построению любого вида прогноза обязательным является этап построения прескриптивной и дескриптивной моделей и установление взаимосвязи между ними. На основании установленной взаимосвязи возможно осуществить динамическое прогнозирование рассматриваемой ситуации, получая тем самым выигрыш по времени в отсутствие новых снимков.

Для установления взаимосвязи между прескриптивной и дескриптивной моделями, которая решается с использованием аппарата нечеткой логики необходимо сформулировать аксиомы, выражающие необходимые и достаточные условия возможности измерения или шкалирования предпочтений, которые должны интерпретироваться как условия "рациональности", причем предпочтения "рациональности" должны удовлетворять правилам, заданным в разработанных аксиомах.

**Аксиома 1.** В случае, когда показатель Херста в смежных зонах исследуемой аномалии принимает значение индифферентности необходимо введение дополнительных переменных, имеющих меньшую степень влияния (в соответствии с приоритетами графа усилений) для увеличения границ зоны при построении новых временных рядов.

**Аксиома 2.** Границы буферных зон будут характеризоваться точками излома статистики Херста, на которых оценка показателя Херста будет существенно изменяться.

**Аксиома 3.** Усреднение значений показателей Херста всех смежных ячеек, имеющих значение больше 0,5 является достаточным для построения предварительного прогноза в общей зоне и необходимым при определении точек максимальной энтропии.

**Аксиома 4.** При прогнозировании процесса времени распространения аномалии с заданными параметрами показатель Херста показывает степень отклонения вероятностных характеристик второго порядка от характеристик классического распределения, т.е. позволяет определить вероятностные границы с большой степенью достоверности, особенно при наличии существенных возмущений.

Одновременно с этим нужно учитывать и предпочтения, исследуемые на основе дескриптивного подхода. Эти условия считаются проверяемыми, и они должны сравниваться с исходными данными (в результате анализа статистической выборки, существовавшей на конкретный фиксированный момент времени) [5].

Текущий временной ряд рассматривается как случайный стационарный процесс. Появляется необходимость развивать различные математические методы количественного анализа с целью извлечения из временных рядов достоверной информации. Таким образом, прогнозирование временного ряда осуществляется на основе гипотезы о том, что существует некий закон, по которому можно определить значение очередного члена ряда как функцию от нескольких предыдущих членов. Наиболее часто, на практике используется полиномиальная модель, но она достаточно условно описывает динамические процессы. Наиболее точных результатов в анализе временных рядов можно добиться с точки зрения теории динамического хаоса. Но прежде, чем на практике использовать элементы теории хаоса, необходимо установить является ли система хаотичной [6]. Для этого вычисляется старший показатель Ляпунова, по знаку которого определяется - является ли система хаосом. Положительное его значение говорит о принадлежности.

Однако, большинство систем, связанных с экологией являются диссипативными, у которых фазовый объем со временем не остается постоянным. Изменение фазового объема приводит к тому, что все решения диссипативной системы будут стягиваться к некоторому подмножеству фазового пространства (аттрактору). Согласно теории динамического хаоса и основ теории управления хаосом [6] самым главным условием для построения краткосрочного прогноза временного ряда является переход от хаотического состояния системы, о котором свидетельствует случайный временной ряд, к регулярному состоянию. Таким образом, необходимо произвести перестройку системы при изменении параметров, от которой она зависит. Изменение внешних условий как раз и приводит к перестройке характеристик динамической системы, свидетельствующих о ее состоянии. Оценка полученного временного ряда и соответствующего ему аттрактора дает возможность построения необходимого горизонта прогноза.

Итак, в качестве исходных данных для построения краткосрочного прогноза рассматривается реальная система динамического хаоса, как совокупность нескольких подсистем (участков временных рядов) котором на определенном участке соответствуют простые аттракторы. Это дает возможность на уровне каждой из подсистем определить значение очередного члена ряда как функцию от нескольких предыдущих членов. При этом для оценки близости бассейнов зон 2-х различных аттракторов целесообразным является использование тензорной алгебры и, как следствие, введение новой системы координат, описывающей изменение траектории фазового пространства для каждого аттрактора путем замены в областях наименьшей сходимости участков возмущенных траекторий на невозмущенные, минимизируя дискретность участков траектории, и увеличивая величину дискретизации участков в зонах максимальной сходимости (тензор деформаций).

Для определения предельного расстояния между бассейнами двух аттракторов, изменяющегося под воздействием различных возмущений возникает необходимость определения функции-нормы для оценки возможного перехода аномалии в один из типов катастроф. Введение данной функции позволяет сравнивать различные математические объекты одной природы в соответствии с их изображением на числовой оси, а именно ввести числовую характеристику понятия ближе - дальше или больше - меньше (для векторов это будет длина вектора), характеризующего изменение расстояния от начальных условий в окрестности точки, характеризующей аттрактор или от границы бассейнов двух аттракторов. Иначе говоря, определить функцию-норму от математического объекта для его оценки. Введение нормы (руководящего правила) порождает понятие эквивалентности, то есть одному и тому же числовому значению нормы будут соответствовать различные математические объекты. Для трехмерных векторов, наделенных нормой в виде длины, возникнет множество эквивалентных по норме объектов (сфера). То есть понятие эквивалентности подразумевает все множество или сферу, на которой располагаются все возможные вектора с такой длиной [7]. При этом на норму накладывается ограничение - она не должна зависеть от системы координат. Таким образом, ее целесообразно записать через инварианты тензора напряжений или деформаций.

Используя тензорный аппарат, воздействие возмущающих факторов на аномалию и, как следствие, определение степени ее изменения, которое характерно для перехода аномального состояния к катастрофе, можно описать несколькими стадиями. При незначительном воздействии связь между напряжениями и деформацией будет линейной - изменения происходят несущественные, и группируются в окрестности начальных условий в бассейне первого аттрактора. Следует заметить, что точка с начальными условиями является началом системы координат. При увеличении силы воздействия связь становится нелинейной, но остается гладкой. При дальнейшем росте нагрузки на аномалию возникают нарушения гладкости связи напряжений и деформаций. При этом аттракторы двух анализируемых бассейнов рассматриваются как локальные, обладающие взаимным притяжением. Процесс перехода обусловлен увеличением разрывов в производных и, соответственно, характеризует переход аномалии в пограничное состояние между бассейнами двух аттракторов, отдаляясь от начальных условий, граничащее с катастрофой. Окончательный переход в бассейн второго аттрактора возможен только при полной независимости напряжений от деформаций. Первые две стадии (до момента перехода) носят локальный характер (в пределах окрестности первого аттрактора), а третья - глобальный, определяющий переход в другое состояние, т.е. переход в бассейн второго аттрактора.

При таком подходе, анализируемая аномалия с математической точки зрения рассматривается как поверхность, поэтому ее состояние должно быть описано двумя инвариантами тензора напряжений. Т.е. переход с линейных соотношений на гладкие, а затем на разрывные состояния между напряжениями и деформациями строится в двухмерном пространстве [7].

В результате исследований выявлено, что наиболее целесообразным является использование инвариантов по Мору - сжатие и сдвиг, определяемые через шаровую и девиаторную части тензора соответственно [8]. Переход от одной стадии к другой описывается кривыми зависимости деформации от сжатия (изменение аномалии как результат воздействия возмущающих факторов), а продолжение на трехмерное пространство главных напряжений осуществляется вращениями кривой зависимости вокруг оси, связанной с координатой, по которой ожидаются наибольшие смещения или искажения при воздействии различных факторов (из графа усилений).

Двухвалентные тензоры представляются квадратными матрицами [8], которые рассматриваются как линейные операторы, имеющие собственные числа (аналог главных напряжений или деформаций), не зависящие от системы координат и являющиеся таким образом инвариантами тензора. В определенной системе координат, определяемой собственными векторами, согласованными с собственными числами, все диагональные элементы тензора нулевые. Следовательно, в системе координат, определяемой собственными векторами, главные напряжения рассматриваются как координаты трехмерного вектора, полностью определяющего тензор напряжений [7, 8]. Таким образом, в данном случае, тензор - вектор в трехмерной системе координат (системе, связанной с главными векторами) с координатами - главными напряжениями. В качестве главных напряжений используются веса, характеризующие силу максимального влияния на аномалию (из матрицы максимального влияния).

Совершенно очевидно, что объекты разной геометрической формы под влиянием различных возмущений деформируются по-разному. Однако установлено [8], что малая окрестность любой точки деформируется по одному и тому же закону (т.е. имеют место систематические сдвиги). В таком случае, внутри бассейна первого аттрактора вблизи начальных условий резкого изменения траектории не ожидается, и как следствие, скачка в бассейн второго аттрактора не будет.

Для получения значения функции-нормы и, соответственно, для определения момента перехода аномалии в один из типов элементарных катастроф, на первом этапе определяются точки максимальной энтропии, которые наиболее подвержены изменениям, и в которых переход наиболее вероятен. Определение таких точек проводится на основе совместного анализа топологических характеристик объекта, градиентов яркости и результатов проведения метода историче-

ской аналогии. Особое внимание уделялось топологическим особенностям выявленной аномалии и градиенту изменения показателей соответствующих дешифровочным характеристикам аномалии. В частности, в примере, рассмотренном на соответствующих рисунках – это градиент изменения уровня загрязнений на поверхности моря, вызванного разливом нефти.

На рис. 1 представлен график изменения длины радиус-вектора граничных точек аномалии относительно центра тяжести фигуры. В качестве аномалии рассматривалось нефтяное пятно – как результат разлива нефти в акватории Черного моря. Сплошная линия на графике соответствует стабильному состоянию объекта (форма аномалии – круг).

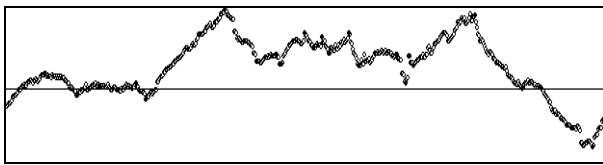
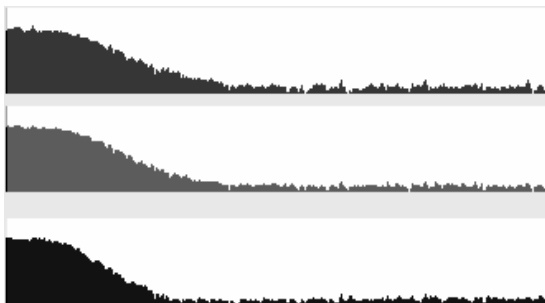
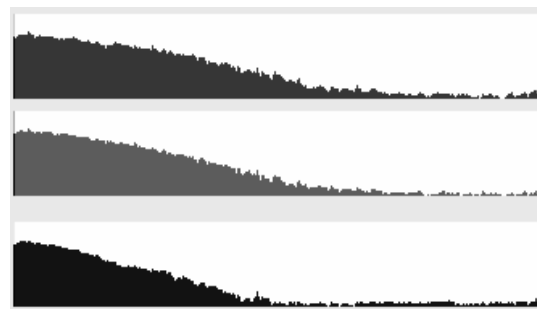


Рис. 1. График изменения длины радиус-вектора граничных точек аномалии относительно центра тяжести фигуры

Точки находящиеся ниже линии стабильного состояния будут иметь тенденцию к дальнейшему распространению аномалии. Точки, находящиеся выше линии стабильного состояния характеризуют процесс уменьшения геометрических размеров анализируемого



а



б

Рис. 2. Графики изменения уровня загрязнения вдоль радиус-вектора

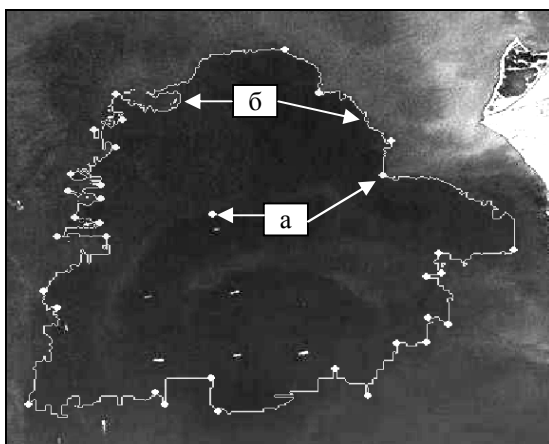


Рис. 3. Результат анализа неоднородности на наличие точек с максимальной энтропией – а (б – точки эволюции)

объекта. Однако, данный алгоритм является несовершенным, поскольку при анализе не проводится учет градиента концентрации уровня загрязнения, а тенденция и направление возможного распространения аномалии определяется только на основе топологии объекта. В данном случае уровень загрязнений для снимков характеризуется яркостью пикселей. На рис. 2 приведены графики изменения уровня загрязнения вдоль радиус-вектора. При этом, рис. 2, а соответствует более резкому изменению концентрации.

Говоря о дифференциале яркостных характеристик вдоль радиус-вектора необходимо заметить, что он определяет скорость изменения уровня загрязнения и должен дополнительно учитываться при выборе точек максимальной энтропии. Результат совместного анализа приведен на рис. 3.

Очевидно, что для получения величин, характеризующих степень деформации и область их распространения в окрестности этих точек необходимо знать изменение длины и углов направлений после деформации. Как только форма аномалии претерпевает изменения в этих точках, не соответствующие системным сдвигам, сразу же возникает угроза перехода в бассейн второго аттрактора. Для этого используются шесть величин, являющихся компонентами тензора деформаций [7, 8] – это три деформации изменения длины вектора:  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$  и три деформации сдвига:  $\epsilon_{yx} = \epsilon_{xy}$ ;  $\epsilon_{zy} = \epsilon_{yz}$ ;  $\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}$ .

Таким образом, компоненты деформации в виде тензора в Декартовой системе координат OXYZ описываются матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

а тензор деформаций в другой системе координат OX'Y'Z', имеющей тоже начало в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \epsilon'_{xx} & \epsilon'_{xy} & \epsilon'_{xz} \\ \epsilon'_{yx} & \epsilon'_{yy} & \epsilon'_{yz} \\ \epsilon'_{zx} & \epsilon'_{zy} & \epsilon'_{zz} \end{pmatrix}.$$

Направляющие косинусы, характеризующие связь между системой координат OXYZ и OX'Y'Z', представлены в табл. 1.

Таблица 1  
Направляющие косинусы

Координатные оси	X	Y	Z
X'	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	c <sub>1</sub>
Y'	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	c <sub>2</sub>
Z'	a <sub>3</sub>	b <sub>3</sub>	c <sub>3</sub>

В табл. 1 a<sub>1</sub>, ..., c<sub>3</sub> – косинусы углов между старой и новой системами координат.

Формулы взаимосвязи компонент тензора в новых осях системы OX'Y'Z' – (ε'xx, ..., ε'xy, ...) через компоненты тензора деформаций в старых осях системы OXYZ – (εxx, ..., εxy, ...) следующие [8]:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= \epsilon_{xx}a_1^2 + \epsilon_{yy}b_1^2 + \epsilon_{zz}c_1^2 + \epsilon_{yz}b_1c_1 + \\ &\quad + \epsilon_{zx}c_1a_1 + \epsilon_{xy}a_1b_1; \\ \epsilon'_{yz} &= 2(\epsilon_{xx}a_2a_3 + \epsilon_{yy}b_2b_3 + \epsilon_{zz}c_2c_3) + \\ &\quad + \epsilon_{yz}(b_2c_3 + b_3c_2) + \epsilon_{zx}(c_2a_3 + c_3a_2) + \\ &\quad + \epsilon_{xy}(a_2b_3 + a_3b_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Формулы (1) являются формулами преобразования компонент тензора второго ранга к новой системе координат.

Началом системы координат являются аттракторы, расположенные в точках максимальной энтропии. Однако, для того чтобы понять какой из видов аттрактора расположен в каждой из точек и для определения границ его бассейна необходимо провести дополнительный анализ, показывающий направление возможного изменения границ объекта по соответствующим координатам. На рис. 4 представлены наиболее вероятные направления изменения аномалии в целом, анализ которых совместно с данными контактных методов зондирования позволяет определить предполагаемые границы прогнозируемого изменения объекта и оценить скорость его изменения.

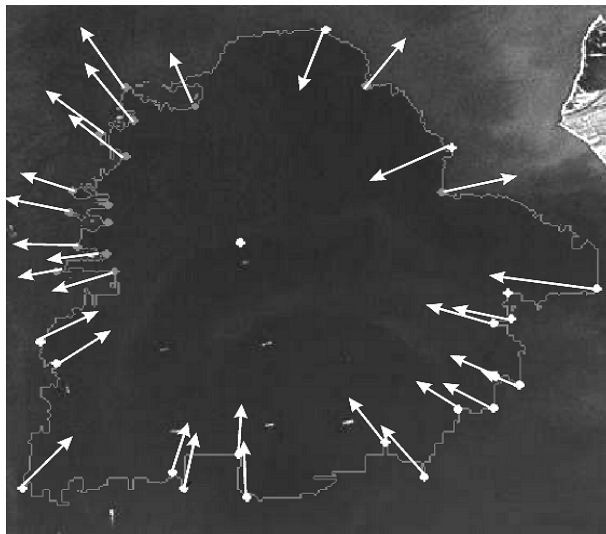


Рис. 4. Наиболее вероятные направления изменения аномалии

Как видно из рисунка, точки, направление изменения в которых направлено строго внутрь аномалии, удовлетворяют условию максимальности и могут рассматриваться как максимальные аттракторы. Иными словами, для аномалии, рассматриваемой в качестве для динамической системы, задана область U, которая переводится строго внутрь себя динамикой:  $\overline{f(U)} \subset U$ . При этом максимальным аттрактором данной системы [6] в ограничении на U будет являться пересечение всех его образов под действием динамики:  $A_{\max} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ . В точках

являющихся максимальными аттракторами определение смещения координат при построении предиктора возможно с помощью классических методов прогнозирования при использовании уравнений с частными производными [6].

В результате выше изложенного можно сформулировать еще одну аксиому.

**Аксиома 5.** Формирование множества контрольных точек для определения поправок прогнозируемых границ вероятного смещения аномалии осуществляется на основе точек максимальной энтропии, не являющихся максимальными аттракторами.

Таким образом, особое внимание следует уделить точкам, которые не являются максимальными аттракторами, а ожидаемые возможные изменения аномалии на рис. 4 представлены направлениями, исходящими из объекта. При этом среднее значение деформации, связанной с изменением длины во всех этих точках должна быть одинакова в любой системе координат, т.е.

$$\frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = \frac{1}{3}(\epsilon'_{xx} + \epsilon'_{yy} + \epsilon'_{zz}).$$

Таким образом, при переходе к любой другой системе координат при системных сдвигах изменяются все компоненты тензора, а их сумма не изменяется, т.е. является инвариантом. При этом происходит изменение объема аномалии на величину ΔV [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}; \\ \Theta &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}. \end{aligned}$$

В случае, когда  $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 0$ , деформация происходит без изменения объема. Таким образом, можно сделать вывод о том, что наличие инварианта тензора также свидетельствует о стабильности аномалии в бассейне первого аттрактора. Об этом свидетельствует и инвариантность среднеквадратичной деформации ε<sub>u</sub>, определяемой по формуле:

$$\epsilon_u = \sqrt{\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + 2(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2)}. \quad (2)$$

Свойство тензоров, заключающееся в том, что суммой матриц тензоров является матрица-тензор, элементы которой представляют собой сумму соответствующих элементов слагаемых, позволяет разделить итоговый тензор деформаций на шаровую

(объемную) и девиаторную (сдвиговую), при которой объем части не изменяется.

Анализ полученных шаровой и девиаторной частей позволяет сделать вывод о возможном переходе в бассейн второго аттрактора, вызванного тем, что при воздействии определенных возмущений деформации перестают быть системными сдвигами. Таким образом, может быть сформулирована итоговая аксиома.

**Аксиома 6.** Контрольные точки, в которых деформации перестают быть системными сдвигами (согласно тензора деформаций) являются точками бифуркации и характеризуют переход аномалии в один из типов элементарных катастроф.

Значения для вычислений по указанным формулам определяются из временных рядов, построенных по снимкам и в результате проведения различных оверлейных операций с фрагментами соответствующих «критериальных деревьев» с учетом результатов использования метода исторической аналогии.

### Выводы

1. Разработан механизм описания результата воздействия возмущающих факторов на аномалию с использованием тензорного аппарата, определены стадии, характеризующие степень ее изменения при переходе к одному из типов элементарных катастроф.

2. Получены зависимости, характеризующие изменения длины радиус-вектора граничных точек аномалии относительно центра тяжести фигуры, описывающей аномалию и на их основе разработана методика определения скорости изменения уровня загрязнения вдоль радиус-вектора на основе анализа дифференциала яркостных характеристик

3. Представлен алгоритм выбора точек максимальной энтропии, характеризующих процесс распространения аномалии. При этом получены точки, характеризующие процесс распространения аномалии как инволюционный, так эволюционный.

4. Разработан метод определения точек бифуркации с использованием тензоров для определения зоны перехода из бассейна одного аттрактора в другой.

5. Сформулированы аксиомы, выражающие необходимые и достаточные условия возможности измерения или шкалирования предпочтений при построении предиктора в условиях неопределенности.

### Список литературы

1. Бутенко О.С. Механизм определения факторов максимального влияния на распространение нефтяной пленки / О.С. Бутенко, С.И. Березина, С.С. Красницкий // Проблемы розробки і впровадження сучасних інформаційних технологій моніторингу навколишнього середовища та управління екологічною і інформаційною безпекою в регіонах: зб. наук. праць VIII Міжн. НПК Нац. аэрокосм. ун-та „ХАИ”. – Крим-Київ-Харків, 2009. – С. 162-171.
2. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: монография / А.Е. Алтунин., М.В. Семухин. – Тюмень: ТГУ, 2000. – 352 с.
3. Бутенко О.С. Анализ возможности прогнозирования распространения аномалий по данным космического мониторинга. / О.С. Бутенко // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 5 (72). – С. 38-44.
4. Бутенко О.С. Анализ данных космического мониторинга при прогнозировании распространения выявленных аномалий / О.С. Бутенко, С.И. Березина, Г.Я. Красовский // Екологічна безпека та природокористування: зб. наук. пр. – К., 2009. – Вип. 2. – С. 23-41.
5. Соколов А.Ю. Применение нечетких множеств в экспертных системах и системах управления: учеб. пособие / А.Ю. Соколов. – Х.: ГАКУ «ХАИ», 1999. – 64 с.
6. Дмитриев А.С. Прикладной динамический хаос / А.С. Дмитриев. – Ярославль: ЯрГУ, 1999. – 102 с.
7. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к док.: <http://www.exponenta.ru/soft/Mathemat/pinega/a12/a12.asp>.
8. Илюкович Б.М. Введение в теорию пластичности / Б.М. Илюкович. – К.: Вища школа, 1983. – 160 с.

Поступила в редколлегию 22.03.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Г.Я. Красовский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

### ВИКОРИСТАННЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧОК БІФУРКАЦІЇ В ПРОЦЕСІ ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ НЕСТАБІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ЕКОЛОГІЧНОГО ПОХОДЖЕННЯ

О.С. Бутенко, С.І. Березіна

*Запропонована методологія визначення точок максимальної ентропії і на їх основі методика визначення точок бифуркації з використанням тензорів для визначення зони переходу з басейну одного аттрактора у інший. На основі комплексного підходу до побудови прогнозу можливих змін стану аномалії з аналізом її можливого переходу до одного з типів елементарних катастроф, були сформовані аксіоми, що виражають необхідні і достатні умови можливості вимірювання або шкалювання переваг при побудові предиктора в умовах невизначеності.*

**Ключові слова:** ознаки, тензор, деформації, зрушення, аналіз, фактори впливу.

### USE OF TENSOR ANALYSIS FOR DETERMINATION OF POINTS OF BIFURCATION IN THE PROCESS OF PROGNOSTICATION OF THE STATE OF UNSTABLE SYSTEM OF ECOLOGICAL ORIGIN

O.S. Butenko, S.I. Berezina

*Methodology for determination of maximum entropy points was proposed and on its base technique for detection of bifurcation points with the use of tensors for determination of transition zone from one attractor basin to another. Based on complex approach for forecasting definition of possible changes of anomaly state with the analysis of its possible transition into one of the primary disasters types, axioms which express necessary and sufficient conditions for measuring possibilities or scaling preferences during predictor definition in the term of ambiguity were developed.*

**Keywords:** signs, tensor, deformations, change, analysis, factors of influence.