УДК 621.391

К.С. Васюта

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

ОЦЕНКА УРОВНЯ ШУМА В ЕГО АДДИТИВНОЙ СМЕСИ С ХАОТИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ

В работе обсуждается и моделируется метод оценки уровня шума в аддитивной его смеси с хаотическими сигналами. В его основе лежит зависимость крупнозернистой корреляционной энтропии от дисперсии шума и параметра покрытия ε *аттрактора наблюдаемого сигнала вложенного в псевдофазовое пространство. Результаты моделирования показали, что метод работоспособен для широкого класса хаотических сигналов и шума при значительном его уровне. Алгоритм оценки уровня шума может быть легко реализован современными средствами цифровой обработки данных и использован при построении оптимальных устройств обработки хаотических и других регулярных сигналов, наблюдаемых на фоне шума с неизвестной интенсивностью.*

Ключевые слова*: оценка уровня шума, корреляционная энтропия.*

Введение

Традиционно, при построении устройств обработки сигналов наблюдаемых в присутствии шума, характеристики измерительного шума считают априорно известными [1, 2]. Так, например, при обнаружении сигнала с использованием Критерия Неймана-Пирсона порог обнаружения устанавливают с учетом дисперсии шума. Часто априорная информация о характере шума отсутствует, и непосредственное использование алгоритмов обработки принятых сигналов (оптимальное обнаружение, оценка параметров сигналов и реконструкция динамических систем, формирующих эти сигналы) не представляется возможным.

При обработке сигналов, в ряде случаев, приходится учитывать не только измерительный шум, но и шум, присутствующий в динамических системах при формировании сигналов и который принято называть динамическим шумом.

С точки зрения теории динамических систем сигнал может рассматривать, как одна из компонент её состояния, которая после её погружения в псевдофазовое пространство образует аттрактор. По его “наполняемости” можно проводить классификацию сигналов и шумов. Наличие динамического и измерительного шумов приводит к размытию аттрактора сигнала. Топологические свойства аттрактора сигнала и его сложность изменяются по мере увеличения уровня шумов. Поэтому анализ свойства аттрактора позволяет извлечь информацию об уровне шума.

Первые попытки оценки параметров шума по наблюдению временного ряда, опирающиеся на геометрические свойства аттрактора хаотического процесса, искаженного аддитивным шумом (при его небольшом уровне), были предприняты в работах [3 – 6]. В [3] показано, что присутствие всего 2% шума в наблюдении может существенно влиять на качество оценки его геометрических свойств, характеризуемых, например, корреляционной размерностью.

До настоящего времени решение задачи оценки уровня (дисперсии) шума в наблюдении при неизвестном уровне сигнала были безуспешными. Её решение стало возможным с развитием в последние годы методов нелинейного анализа процессов (достижений нелинейной динамики) [7, 8]. Очевидно, что более полное описание динамических систем должно сочетать динамические и статистические подходы. Наиболее важными характеристиками таких систем являются инварианты: показатели Ляпунова, D – корреляционная размерность и K_2 – корреляционная энтропия. Корреляционной размерностью можно характеризовать структурированность аттрактора, связанного с анализируемым процессом, несущей информацию о степени сложности поведения динамической системы. Корреляционная размерность основана на вычислении “корреляционного интеграла” $C_m(\varepsilon)$, значение которого равно плотности распределения точек на аттракторе в m-мерном фазовом пространстве. K_2-энтропия вычисляет скорости расходимости траекторий в фазовом пространстве. С ее помощью можно определить режим колебаний (хаотический или регулярный). Для периодических и квазипериодических колебаний $K_2 = 0$. Если динамическая система эволюционирует к устойчивой стационарной точке, то $K_2 < 0$. В случае хаотического колебания всегда $K_2 > 0$.

Различия в “наполняемости” (плотности распределения точек аттрактора) фазового пространства аттракторами случайного и хаотического процес-

© К.С. Васюта

сов и, как следствие, в зависимостях корреляционной размерности от размерности пространства вложения [3] подсказывает один из способов различения случайных и хаотических процессов, а так же решения задачи оценки параметров шума.

Один из методов визуализации m-мерного фазового пространства основан на его проекции на плоскость $R_{i,j}^{m,\varepsilon} = I\left(\varepsilon - \left\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right\|\right)$, (где $\vec{x}_i \in R^m$, $i, j = 1, 2, ..., N$, N – количество рассматриваемых состояний x_i, ε - размер окрестности точки $\vec{x}$ в момент i, $\|\cdot\|$ – норма и I – функция Хевисайда), которую называют рекуррентной диаграммой [9]. Для шума рекуррентная диаграмма равномерно заполняется точками, а в случае смеси хаотического сигнала (процесса с зависимыми значениями) и шума на рекуррентной диаграмме появляются линии, параллельные главной диагонали. Их порядок определяет меру детерминизма [10]. Линии длиной m определяет корреляционную размерность D_m, которая связана с "корреляционным интегралом" $C_m(\varepsilon)$ (ε – заданный радиус гиперсферы покрытия пространства вложения) и крупнозернистой корреляционной энтропией $K_2(\varepsilon, \sigma_n)$ (σ_n – стандартное отклонение шума). Известно, что при $\varepsilon \to 0$, поведение этих инвариантов динамических систем не зависит от типа используемой нормы. В таком случае значения функции крупнозернистой корреляционной энтропии и параметра покрытия ε должны быть сопоставимы с уровнем (дисперсией) шума.

Цель данной работы предложить новый метод оценки уровня (дисперсии) шума в аддитивной смеси хаотического сигнала и белого гауссовского шума, который основан на зависимости крупнозернистой корреляционной энтропии $K_2(\varepsilon, \sigma_n)$ от параметра покрытия пространства вложения ε и стандартного отклонения шума σ_n.

Основной материал

Пусть наблюдаемая аддитивная смесь хаотического сигнала $\{x_i\}_{i=1}^N$ и белого гауссовского шума $\{n_i\}_{i=1}^N$ описывается вектором $\{y_{i+(m-1)\tau}\}_{i=1}^N$ в m-мерном пространстве вложения, где m – размерность вложения, τ – задержка вложения. "Корреляционный интеграл" в пространстве вложений $\vec{y}_i$ определяет частоту попадания произвольной пары точек фазового пространства в гиперсферы радиуса ε:

$$C_{m,N}(\varepsilon) = \frac{2}{(N-m+1)(N-m)} \sum_{i}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} I\left(\varepsilon - \left\|y_i^m - y_j^m\right\|\right); \quad (1)$$

$$I\ (y_i^m, y_j^m) = \begin{cases} 1, & \left\|y_i^m - y_j^m\right\| \le \varepsilon; \\ 0, & \left\|y_i^m - y_j^m\right\| > \varepsilon, \end{cases}$$

в котором $I(y_i^m, y_j^m)$ – функция Хевисайда для всех пар значений i и j, где $0 \le i \le N$ и $0 \le j \le N$; N – число элементов временного ряда $\{y_i\}_{i=1}^N$. Его значение стремится к определенному пределу по мере уменьшения ε.

"Корреляционный интеграл" $C_m(\varepsilon)$ пропорционален числу $D_m(\varepsilon, \sigma_n)$ длины линий m рекуррентной диаграммы, построенной по набору данных $\{x_i\}_{i=1}^N$ [11]:

$$C_m(\varepsilon) = D_m(\varepsilon, \sigma_n) / N^2 . \quad (2)$$

Корреляционная размерность связана с корреляционной крупнозернистой энтропией [12] как:

$$K_2(\varepsilon, \sigma) \approx -d \ln(D_m(\varepsilon, \sigma_n)) / dm . \quad (3)$$

А связь между энтропией, корреляционной размерностью и корреляционным интегралом определяется известным выражением [13]:

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{1}{N^2} D_m(\varepsilon) = D_m \ln \varepsilon - m\tau K_2 . \quad (4)$$

В работе [5] показано, что

$$D_m(m+1, \varepsilon) \approx D_m(m, \varepsilon) D_{noisy}(\varepsilon, \sigma_n), \quad (5)$$

где $D_{noisy}(\varepsilon, \sigma_n)$ – корреляционная размерность шума. В [14] модифицируется $D_m(\varepsilon)$ таким способом, чтобы влияние шума на энтропию можно было бы оценить аналитически. Для этого уравнение (1) приводится к эквивалентной форме:

$$D_m(\varepsilon) = \sum_{i}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} I\ \left(\sum_{k=0}^{l} I\ \left(\varepsilon - \left\|x_{i+k}^m - x_{j+k}^m\right\| - n\right)\right), \quad (6)$$

где l – длина рекуррентной линии, начинающейся в точке с координатами $(i; j)$. Понижая порог во внешней функции I до $\beta = 1/\sqrt{\pi}$, имеем:

$$D'_m(\varepsilon) = \sum_{i}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} I\ \left(\sum_{k=0}^{l} \left(\frac{\varepsilon - \left\|x_{i+k}^m - x_{j+k}^m\right\|}{\varepsilon} - \beta n \right)\right). \quad (7)$$

Это выражение может быть использовано для расчета средней длины линии $\langle m \rangle$ рекуррентной диаграммы.

Длина каждой линии рекуррентной диаграммы рассчитывается как максимальное значение параметра m в (7) при условии, что функция $I = 1$.

Имея значение $\langle m \rangle$ можно рассчитать энтропию системы:

$$K_2 \approx \ln \frac{\langle m \rangle - 1}{\langle m \rangle - 2} . \quad (8)$$

Рассмотрим влияние некоррелированного белого гауссовского шума $\{n_i\}$, добавленного к хаотическому сигналу $\{x_i\}$. Уравнение (7), согласно [15] можно заменить на приближенное:

$$D'_m(\varepsilon) =$$
$$= \sum_{i}^{N}\sum_{i\neq j}^{N} I\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\varepsilon - \left\|x_{i+k}^{m} + n_{i+k} - x_{j+k}^{m} - n_{j+k}\right\|}{\varepsilon} - \beta n\right)\right) \cong$$
$$\cong \sum_{i}^{N}\sum_{i\neq j}^{N} I\left(\sum_{k=0}^{l}\left(\frac{\varepsilon - \left\|x_{i+k}^{m} - x_{j+k}^{m}\right\|}{\varepsilon} - n\frac{\sqrt{\alpha^2\varepsilon^2 + 2\sigma_n^{\ 2}} - \alpha\varepsilon}{\varepsilon} - \beta n\right)\right), \quad (9)$$

где $\alpha \le 1$ – константа, зависящая от вида распределения $\left\|x_i - x_j\right\|$. Из сравнения уравнений (6), (7) и (9) видно, что воздействие шума соответствует изменению

$$m \to m\left(1 + \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon^2/3 + 2\sigma_n^{\ 2}} - \varepsilon/\sqrt{3}}{\varepsilon}\right). \quad (10)$$

С учетом этого уравнение (4) можно переписать в виде:

$$-\tau K_2 m \to \tau K_2(\varepsilon) m\left(1 + \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon^2/3 + 2\sigma_n^{\ 2}} - \varepsilon/\sqrt{3}}{\varepsilon}\right). (11)$$

Для малого уровня шума $\sigma_n << \varepsilon$ уравнение (11) можно преобразовать к виду:

$$-\tau K_2 m \to \tau K_2(\varepsilon) m\left(1 + \sqrt{3\pi}\frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}\right), \quad (12)$$

который согласуется с известными результатами [16], и в этом случае справедливо приближенное равенство:

$$K_{noisy} \approx 1/\varepsilon^2. \quad (13)$$

Как показано в [5] с учетом свойства близости значений $\sigma \approx \varepsilon$ для произвольного уровня шума крупнозернистую энтропию аддитивной смеси сигнала и шума можно описать следующей аналитической зависимостью:

$$K_{noisy}(\varepsilon) = -\frac{d\ln\left[D_m(\varepsilon)\right]}{dm} = -\frac{1}{\tau}g\left(\frac{\varepsilon}{2\sigma_n}\right)\ln\varepsilon +$$
$$+K_2(\varepsilon)\left(1 + \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + 2\sigma_n^{\ 2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}{\varepsilon}\right), \quad (14)$$

где $g(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{ze^{-z^2}}{\operatorname{erf}(z)}$ – соответствует влиянию шума на корреляционную размерность, а второе слагаемое может быть разделено на крупнозернистую энтропию полезного сигнала и ее линейный рост, связанный с присутствием шумов

$$\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\varepsilon^2/3 + 2\sigma_n^{\ 2}} - \varepsilon/\sqrt{3}\right)K_2(\varepsilon).$$

В [14] предложена аналитическая зависимость корреляционной энтропии как функция от параметра покрытия ε:

$$K_{noisy}(\varepsilon) = -cg\left(\frac{\varepsilon}{2\sigma_n}\right)\ln\varepsilon + \left[k + b\ln(1 - a\varepsilon)\right]\times$$
$$\times\left(1 + \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon^2/3 + 2\sigma_n^{\ 2}} - \varepsilon/\sqrt{3}}{\varepsilon}\right), \quad (15)$$

где $c = 0,5 \div 0,7$, $a, b, k = \text{const}$, введенные в соответствии с [16]. Авторами подбором значений ε определялся максимум функции (15), соответствующий оценке значения стандартного отклонения шума σ в наблюдении.

Следует отметить, что в работе [14] искомая оценка $\hat{\sigma}_n = \varepsilon_{max}$ выбиралась равной значению покрытия ε, для которого выражение (15) достигало максимума при его изменении. Предлагаемый нами алгоритм оценки σ_n основан на минимизации (15) непосредственно по σ_n при фиксированном значении ε:

$$\hat{\sigma}_n = \min_{\sigma_n}\left[K_{noisy}(\varepsilon, \sigma_n)\right]. \quad (16)$$

На рис. 1 показаны результаты численного моделирования зависимости $K_{noisy}(\varepsilon, \sigma_n)$ для аддитивной смеси хаотического сигнала с кусочно-линейным отображением и белого гауссовского шума (рис. 2), полученные при $\sigma_{ист} = 0,03$, $\varepsilon = \gamma\sigma_y$ (где σ_y – среднеквадратическое отклонение процесса $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, $\gamma = 0,5$ – выбирается согласно рекомендаций [17]), $c = 0,7$, $k = 1$, $a = 0,5$, $b = 0,7$.

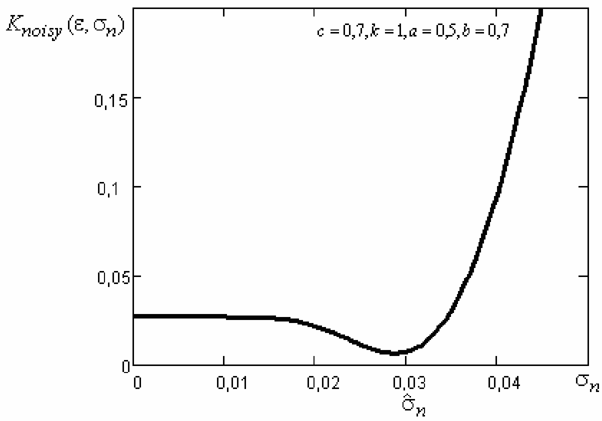

Рис. 1. Зависимость корреляционной энтропии от СКО белого гауссовского шума

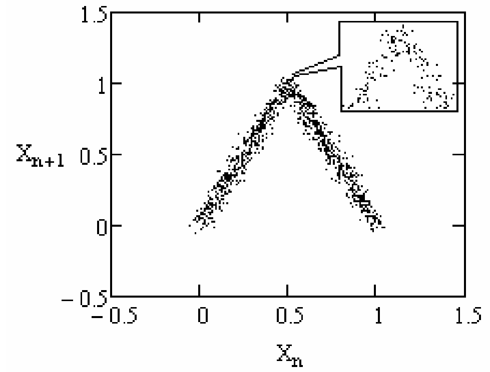

Рис. 2. Фазовый портрет аддитивной смеси кусочно-линейного хаотического отображения и белого шума

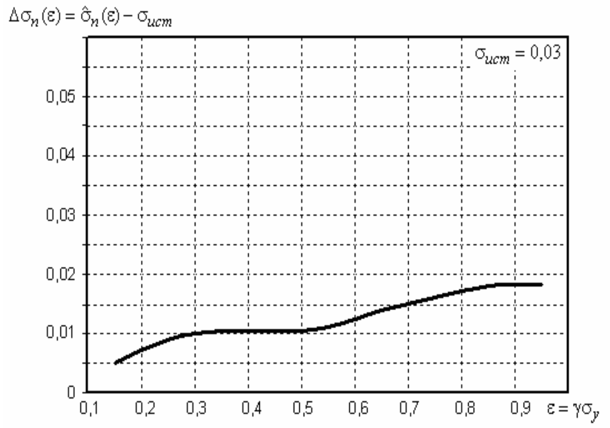

Рис. 3. Зависимость ошибки оценки уровня шума от величины ε

Минимальное значение функции $K_{noisy}(\varepsilon, \sigma_n)$ на рис. 1 соответствует истинному значению σ и рассчитывается как $\sigma_n = \hat{\sigma}_n / \gamma$.

На рис. 3 приведена зависимость ошибки оценки уровня шума $\Delta\sigma_n(\varepsilon) = \hat{\sigma}_n(\varepsilon) - \sigma_{ист}$ от величины ε, полученная при истинном его значении $\sigma_{ист} = 0,03$. Из рисунка видно, что ошибка оценки $\Delta\sigma_n(\varepsilon)$ слабо зависит от параметра ε при допустимых его вариациях. А при значениях покрытия из интервала $\varepsilon \in (0,25\sigma_y; 0,5\sigma_y)$ ошибка $\Delta\sigma_n(\varepsilon)$ не меняется, что соответствует рекомендациям работы [17] по выбору значений ε.

В табл. 1 приведены результаты численного моделирования оценивания значений СКО гауссовского белого шума $\hat{\sigma}_n$ в аддитивной смеси с хаотическими сигналами, заданными различными отображениями, полученными при $\varepsilon = 0,5\sigma_y$. Из таблицы видно, что данный алгоритм оценки уровня шума не имеет ограничений для хаотических сигналов с различными отображениями и применим для произвольного уровня шума. Однако при вкладе шума в наблюдении более 50% ошибка оценки не значительно возрастает. Это связно с подбором четырех констант, входящих в аналитическое выражение (15).

Таблица 1

Результаты численного моделирования оценивания значений СКО гауссовского белого шума в аддитивной смеси с хаотическими сигналами, заданными различными отображениями

Исследуемые одномерные хаотические отображения	СКО наблюдения (аддитивной смеси)	Истинное значение СКО шума $\sigma_{ист}$	Оценка значения СКО шума $\hat{\sigma}$	% шума в наблюдении $\left(\sigma\ /\ \sigma_y\right)\cdot 100\%$	Ошибка оценки СКО шума $\Delta = \hat{\sigma} - \sigma_{ист}$
Кусочно-линейное $x_{n+1} = \tau\left(1 - 2\left\|\frac{1}{2} - x_n\right\|\right)$ $\tau = 0,9999$	0,283	0,010	0,014	3,534	0,004
	0,286	0,030	0,026	10,490	0,004
	0,310	0,100	0,110	32,258	0,010
	0,420	0,300	0,320	71,429	0,020
Энона $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ $\lambda = 3,99$	0,695	0,010	0,013	1,439	0,003
	0,696	0,030	0,052	4,310	0,022
	0,699	0,100	0,120	14,306	0,020
	0,762	0,300	0,320	39,370	0,020
Полиномом Чебышева 3-го порядка $x_{n+1} = 4(x_n)^3 - 3x_n$	0,702	0,010	0,019	1,425	0,009
	0,703	0,030	0,051	4,267	0,021
	0,707	0,100	0,122	14,144	0,022
	0,775	0,300	0,610	38,710	0,310

Выводы

В работе обсуждается и моделируется метод оценки уровня шума в аддитивной его смеси с хаотическими сигналами. В его основе лежит зависимость крупнозернистой корреляционной энтропии от дисперсии шума и параметра покрытия ε аттрактора наблюдаемого сигнала вложенного в псевдофазовое пространство.

Результаты моделирования показали, что метод работоспособен для широкого класса хаотических сигналов и шума при значительном его уровне.

Алгоритм оценки уровня шума может быть легко реализован современными средствами цифровой обработки данных и использован при построении оптимальных устройств обработки хаотических и других регулярных сигналов, наблюдаемых на фоне шума с неизвестной интенсивностью.

Список литературы

1. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационных сигналов на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М: Сов. радио, 1981. – 416 с.

2. Фалькович С.Е. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / С.Е. Фалькович, В.И. Пономарев, Ю.В. Шкварко. – М.: Радио и связь, 1989. – 295 с.

3. Schreiber T. // Phys. Rev. E 48. – 13. – 1993.

4. Dejin Yu, Small M., Harrison R.G., Diks C. // Phys. Rev. E 61, 3750. – 2000.

5. Cawley R. and Guan-Hsong Hsu, // Phys. Rev. A 46, 3057. – 1992.

6. Oltmans H., Verheijen P.J.T. // Phys. Rev. E 56, 1160. –1997.

7. Kantz H., Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis. (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

8. Abarbanel H.D.I. Analysis of Observed Chaotic Data. (Springer, New York, 1996).

9. Eckmann J-P., Kamphorst S., Ruelle D. Europhys. Lett. 4, 973. – 1987.

10. Васюта К.С. Рекуррентный анализ процессов в телекоммуникационных системах / К.С. Васюта // Наукові записки УНДІЗ. – К., 2008. – № 6 (8). – С. 90-96.

11. Faure P., Korn H. Physica D 122, 265. – 1998.

12. Grassberger P., Procaccia I. Phys. Rev. A 28, 2591. – 1983.

13. Grassberger P., Procaccia I. Phys. Rev. Lett. 50, 346. – 1983.

14. Krzysztof Urbanowicz and Janusz A. Hołyst. Noise-level estimation of time series using coarse-grained entropy.- Phys. Rev . E 67, 046218. – 2003.

15. Ghez J.-M., Vaienti S. Nonlinear Opt. 5, 777. – 1992.

16. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C.-Cambridge University Press, Cambridge. – 1992.

17. Kanzler L. Very Fast and Correctly Sized Estimation of the BDS Statistic / Ludwig Kanzler // Christ Church and Department of Economics University of Oxford. – 1999. – 95 p.

Поступила в редколлегию 15.03.2010

Рецензент: д-р техн. наук, доц. О.В. Лемешко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОЦІНКА РІВНЯ ШУМУ В ЙОГО АДИТИВНІЙ СУМІШІ З ХАОТИЧНИМ СИГНАЛОМ З ВИКОРИСТАННЯМ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ЕНТРОПІЇ

К.С. Васюта

У роботі обговорюється і моделюється метод оцінки рівня шуму в адитивній його суміші з хаотичними сигналами. У його основі лежить залежність кореляційної ентропії від дисперсії шуму і параметра покриття атрактору спостережуваного сигналу вкладеного в псевдо фазовий простір. Результати моделювання показали, що метод працездатний для широкого класу хаотичних сигналів і шуму при значному його рівні. Алгоритм оцінки рівня шуму може бути легко реалізовано сучасними засобами цифрової обробки даних і використано при побудові оптимальних пристроїв обробки хаотичних і інших регулярних сигналів, що спостерігаються на фоні шуму з невідомою інтенсивністю.

Ключові слова: *оцінка рівня шуму, кореляційна ентропія.*

ESTIMATION OF NOISE-LEVEL IN HIS ADDITIVE NOISE WITH A CHAOTIC SIGNAL WITH THE USE OF CROSS-CORRELATION ENTROPY

C.S. Vasuta

In-process comes into question and is designed method of estimation of sound-level in additive his mixture with chaotic signals. His the dependence of coarse-grained cross-correlation entropy underlies on dispersion of noise and parameter of coverage of attractor of the looked after signal of inlaid in phase space. The results of design retimed that a method is capable of working for the wide class of chaotic signals and noise at considerable his level. The algorithm of estimation of sound-level can be easily realized by modern facilities of the digital data processing and used for construction of optimum devices of the chaotic and other regular signal looked after on a background noise with unknown intensity processing.

Keywords*: estimation of noise-level, cross-correlation entropy.*