

УДК 621.391

О.Ю. Евсева

*Харьковский национальный университет радиотехники, Харьков*

## ДИАКОПТИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕНЗОРНОЙ МОДЕЛИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

*На примере временной тензорной модели телекоммуникационной сети излагается методика ее диакоптического обобщения, использование которой, в конечном итоге, позволяет повысить масштабируемость получаемых решений.*

**Ключевые слова:** диакоптическое обобщение, тензорная модель.

### Введение

Модели и методы, полученные в рамках тензорного анализа телекоммуникационных сетей (ТКС), охватывают достаточно широкий спектр задач: от проектирования ТКС до управления трафиком с гарантированным качеством обслуживания (Quality of Service, QoS) [1 – 4]. При этом для всех тензорных моделей и методов управления в ТКС характерны многопутевой способ маршрутизации; сбалансированное использование канальных ресурсов; отсутствие петель в маршрутах доставки трафика; одновременное выполнение нескольких QoS-ограничений с достижением для одного из QoS-показателей (задержки, джиттера или вероятности потерь) экстремального значения. С другой стороны тензорное описание сопряжено с усложнением процесса анализа ТКС и расчета искомых параметров, что на практике нередко сопровождается невысокой масштабируемостью получаемых решений. Причем этот недостаток характерен для тензорных моделей и методов не только в области телекоммуникаций, но и для других областей: электротехники, энергетики, водоснабжения и др.

Таким образом, с целью расширения области применения существующих тензорных моделей и методов для случая территориально-распределенных телекоммуникационных сетей они подлежат дальнейшей модификации (доработке), направленной на улучшение свойств масштабируемости. Одним из эффективных способов повышения масштабируемости является применение на этапе разработки математической модели различных декомпозиционных методов. На данный момент существует множество методов декомпозиции [5-7], среди которых в контексте тензорных моделей заслуживает внимания метод расчета по частям Г.Крона – диакоптика [7].

### Особенности диакоптики как декомпозиционного метода

Диакоптика была предложена Г.Кроном [7] как развитие тензорного подхода к моделированию систем большой размерности. В современной литерату-

ре диакоптика как математический подход к решению проблемы высокой размерности находит применение в рамках решения систем линейных [7 – 10] и нелинейных [7, 10, 11] уравнений с большим количеством переменных. Причем в обоих случаях может быть получено точное решение [10], в то время как для системы нелинейных уравнений за счет итеративного процесса решения и/или за счет линеаризации отдельных подсистем результат может иметь приближенный характер [7,11]. Идеи диакоптики просматриваются и в других математических методах, например, в методах декомпозиции на области (Domain Decomposition), нацеленных на численное решение систем дифференциальных уравнений в частных производных, краевой задачи, задачи поиска собственных значений [12 – 15].

Развитие диакоптики как способа решения задач большой размерности значительное время сдерживалось успехами алгебраического подхода в решении систем линейных уравнений, основанном на приведении матриц к специальному разреженному, часто блочно-диагональному виду с последующей их декомпозицией [16, 17]. В условиях однопроцессорных вычислительных схем диакоптика действительно дает незначительный выигрыш по времени решения задачи, однако в случае моделирования в реальном масштабе времени и при использовании многопроцессорных вычислительных средств, диакоптика выходит на первый план [18]. Сегодня диакоптика применяется для решения прикладных задач в различных предметных областях: в области схемотехники и электроники [16, 19], при расчете электрических цепей и систем энергоснабжения [18, 20 – 22], в области механики [10], в области систем водоснабжения [11], в области электродинамики и электромагнитной совместимости [23 – 26], при решении экономических задач [27]. Однако наибольшее количество работ, использующих идею диакоптики, посвящено распараллеливанию вычислительных процессов, в том числе и при объектно-ориентированном моделировании [8, 10 – 12, 14, 28 – 30].

В целом, как и другие методы декомпозиции, диакоптика предполагает разбиение исходной задачи на ряд частных подзадач с последующим объединением частных решений [7]. При этом отличительными особенностями диакоптики являются следующие:

1. В рамках диакоптики осуществляется декомпозиция не совокупности уравнений поведения системы в целом, как, например, в работах [5, 6], а топологической модели исследуемой системы с последующим описанием поведения (в виде соответствующих уравнений) каждой из подсистем в отдельности.

2. Для каждой из отдельных подсистем среди всех описывающих ее переменных выделяется набор таких (внешних) переменных, при помощи которых данная подсистема представляется в рамках единой системы. При этом внутренняя структура подсистемы скрывается, она принимает некий эквивалентный вид, связанный только с типом и количеством переменных, выбранных в качестве внешних.

### Тензорная модель ТКС, представленная в базисе контуров и узловых пар

В рамках тензорного анализа телекоммуникационных сетей было получено несколько моделей, среди которых временная тензорная модель ТКС [1 – 3], связывающая в тензорном виде временные показатели качества передачи трафика (средние задержки) с интенсивностью этой передачи для конкретной сети. Основу данной модели составляет тензорное уравнение

$$T = E\Lambda, \quad (1)$$

где  $T$  – одновалентный ковариантный тензор средних задержек в сети;  $\Lambda$  – одновалентный контравариантный тензор интенсивностей передачи трафика в сети;  $E$  – двухвалентный ковариантный метрический тензор.

Уравнением, аналогичным (1), связаны проекции указанных тензоров в рамках одного базиса (системы координат, СК). Например, в рамках СК ветвей, рассматривающей сеть как совокупность отдельных трактов передачи, и СК контуров и узловых пар, представляющей сеть в виде совокупности контуров и узловых пар, выполняются соотношения:

$$T_v = E_v \Lambda_v; \quad T_{\pi\eta} = E_{\pi\eta} \Lambda_{\pi\eta}, \quad (2)$$

где  $T_v$ ,  $\Lambda_v$  – векторы проекций тензоров соответственно средних задержек  $T$  и интенсивностей трафика  $\Lambda$  в базисе ветвей;  $T_{\pi\eta}$ ,  $\Lambda_{\pi\eta}$  – векторы проекций тензоров  $T$  и  $\Lambda$  в базисе контуров ( $\pi$ ) и узловых пар ( $\eta$ );  $E_v$ ,  $E_{\pi\eta}$  – матрицы проекций тензора  $E$  в базисе ветвей и базисе контуров и узловых пар соответственно.

Здесь проекция  $E_v$  представляет собой диагональную матрицу, на главной диагонали которой находятся элементы  $e_{ii}^{(v)}$ , отражающие метрику  $i$ -го тракта передачи рассматриваемой сети. Данная метрика в общем случае определяется принятой для  $i$ -го тракта передачи моделью обслуживания. Используя результаты теории массового обслуживания и моделируя  $i$ -й тракт передачи системой массового обслуживания, например, М/М/1, имеем

$$e_{ii}^{(v)} = \frac{1}{\lambda_{(v)}^i (\mu_{(v)}^i - \lambda_{(v)}^i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где  $\lambda_{(v)}^i$  – интенсивность трафика, передаваемого вдоль  $i$ -го тракта;  $\mu_{(v)}^i$  – пропускная способность  $i$ -го тракта передачи.

Если для описания  $i$ -го тракта передачи использовать модель М/М/1/Н, то получаем

$$e_{ii}^{(v)} = \frac{\frac{\lambda_{\Sigma(v)}^i}{\mu_{(v)}^i} \left( 1 - \left( \frac{\lambda_{\Sigma(v)}^i}{\mu_{(v)}^i} \right)^{N+1} \right) - (N+1) \left( \frac{\lambda_{\Sigma(v)}^i}{\mu_{(v)}^i} \right)^{N+1}}{\lambda_{(v)}^i \mu_{(v)}^i \left( 1 - \left( \frac{\lambda_{\Sigma(v)}^i}{\mu_{(v)}^i} \right) \right) \left( 1 - \left( \frac{\lambda_{\Sigma(v)}^i}{\mu_{(v)}^i} \right)^{N+1} \right)}, \quad (4)$$

$$i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_{\Sigma(v)}^i$  – суммарная интенсивность трафика, передаваемого в  $i$ -м тракте.

В общем случае для формирования метрики трактов передачи сети может быть использована любая, приемлемая с точки зрения достигаемой адекватности описания, функциональная модель.

Проекции одного и того же тензора, полученные в различных базисах, связаны тензорным законом преобразования. Например, для указанных выше базисов имеем:

$$T_v = A T_{\pi\eta}; \quad \Lambda_v = C \Lambda_{\pi\eta}; \quad (5)$$

$$E_v = A E_{\pi\eta} A^T; \quad E_{\pi\eta} = C^T E_v C, \quad (6)$$

где  $A$ ,  $C$  – матрицы ко- и контравариантного координатного преобразования при переходе от СК контуров и узловых пар к СК ветвей.

Описанная временная тензорная модель ТКС обеспечивает аналитическую взаимосвязь интенсивностей потоков трафика, передаваемого по отдельным трактам передачи (элементы  $\lambda_{(v)}^i$  вектора  $\Lambda_v$ ), с достигаемыми при этом межконцевыми показателями качества обслуживания (элементы векторов  $T_{\pi\eta}$  и  $\Lambda_{\pi\eta}$ ). Указанные величины связаны посредством матрицы проекции  $E_{\pi\eta}$  метрического тензора  $E$ , формирование которой согласно выражению (6)

требует наличия информации о всей сети и соответственно ограничивает масштабируемость тензорной модели (1) и синтезированных на ее основе методов. В сложившихся условиях целесообразным методом повышения масштабируемости является применение диакоптики [7], в рамках которой формирование матрицы проекции  $E_{\pi\eta}$  осуществляется по частям, на основании метрик отдельных подсетей.

**Методика применения диакоптики в рамках тензорных моделей ТКС**

Выражения (5), (6) отражают изменения координат проекций различных тензоров при переходе от базиса ветвей  $\mathcal{E}_v$  к базису контуров и узловых пар  $\mathcal{E}_{\pi\eta}$  в рамках пространства  $\mathcal{S}$ , связываемого с сетью и обладающего размерностью  $n$ , где  $n$  – число трактов передачи в данной сети. Сами базис-

ные элементы при этом связаны следующими соотношениями

$$\mathcal{E}_v = A \mathcal{E}_{\pi\eta}, \quad \mathcal{E}_{\pi\eta} = C \mathcal{E}_v. \quad (7)$$

Покажем, как описывается процесс координатного преобразования  $\mathcal{E}_v \rightarrow \mathcal{E}_{\pi\eta}$  в условиях применения диакоптики [7]. Условимся обозначать системы координат контуров и узловых пар, отнесенные к исходной (недекомпозицированной) сети как  $\mathcal{E}_{\pi\eta}$ , к декомпозицированной сети как  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{dec}$ , к отдельной  $i$ -й подсети как  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)}$ , к соединенной сети как  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{com}$ . Тогда переход  $\mathcal{E}_v \rightarrow \mathcal{E}_{\pi\eta}$  для больших сетей в рамках диакоптики условно можно разделить на четыре этапа (рис. 1), совершаемые при этом над сетью действия на примере продемонстрированы на рис. 2.

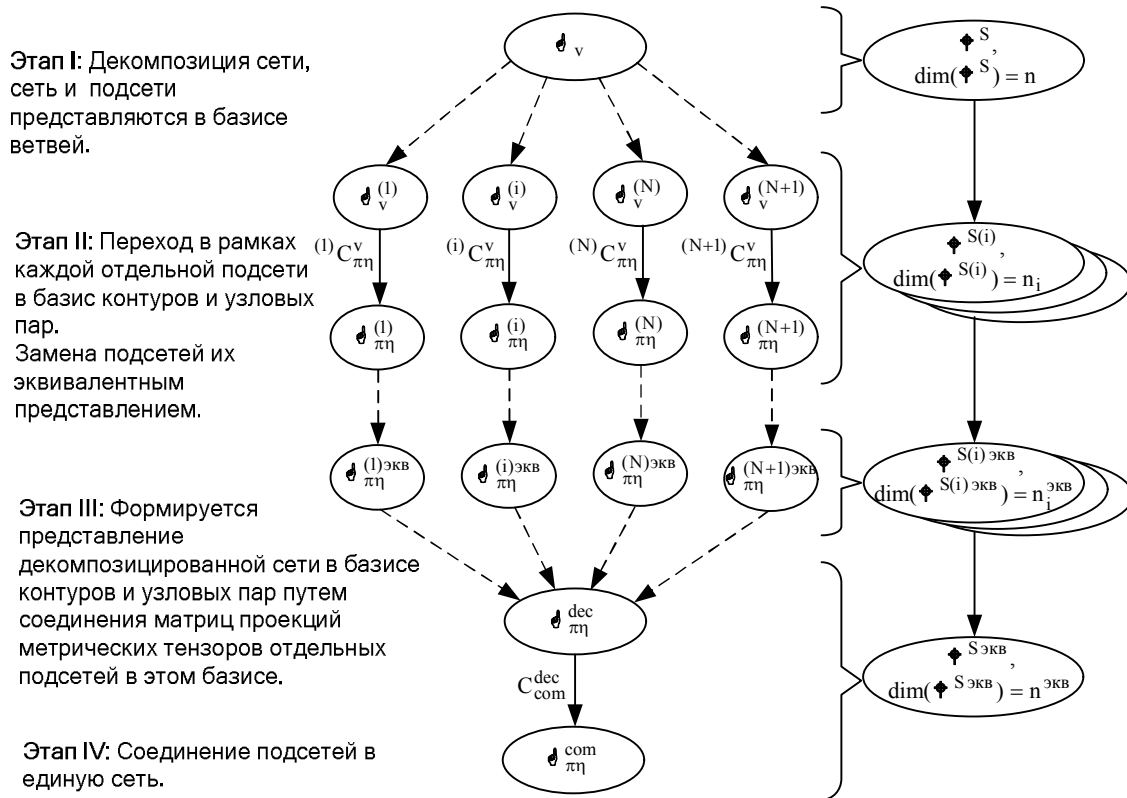


Рис. 1. Процесс координатного преобразования  $\mathcal{E}_v \rightarrow \mathcal{E}_{\pi\eta}$  в рамках диакоптики

**Этап I.** Осуществляется декомпозиция топологической модели ТКС на  $N$  несвязных между собой подсетей, а также выделение  $(N + 1)$ -й подсети – так называемой цепи пересечений, отражающей взаимосвязь основных подсетей между собой. На рис. 2, б число основных подсетей  $N$  равно 2, а цепь пересечений образована двумя ветвями. Размерность подпространства  $\mathcal{S}_i$  пространства  $\mathcal{S}$  связываемого с  $i$ -й подсетью  $S_i$  определяется числом трактов пере-

дачи  $n_i$  этой подсети, где  $\sum_{i=1}^{N+1} n_i = n$ .

Для каждой из подсетей, основных и цепи пересечений, на основании характеристик отдельных трактов передачи формируются проекции в СК ветвей  $\mathcal{E}_v^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N+1}$  метрических тензоров; в контексте временной модели это проекции  $E_v^{(i)}$  тензора  $E$ . Так же как и ранее, матрица  $E_v^{(i)}$  представляет со-

бой диагональную матрицу, теперь размера  $n_1 \times n_1$ , на главной диагонали которой находятся элементы,

отображающие метрики отдельных трактов передачи  $i$ -й подсети  $S_i$ .

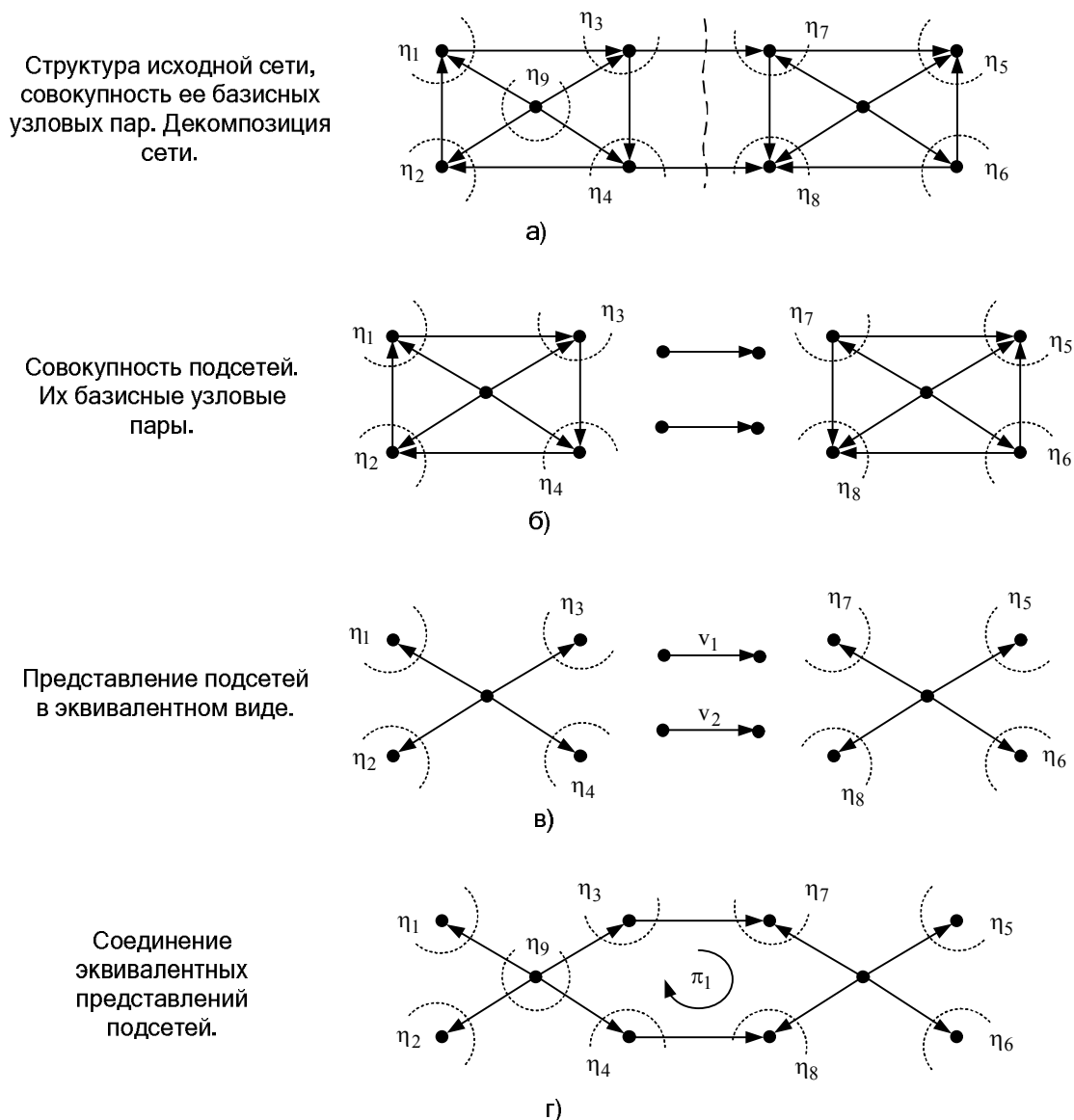


Рис. 2. Процесс декомпозиции и соединения сети в рамках диакоптики

**Этап II.** Независимо для каждой из подсетей осуществляется переход из базиса ветвей  $\mathcal{E}_v^{(i)}$  в базис  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N+1}$ , при помощи известных матриц контравариантного координатного преобразования  ${}^{(i)}C_{\pi\eta}^v$ . Среди базисных элементов  $i$ -й подсети (элементов базиса  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)}$ ) выбирается некоторое их количество  $n_1^{\text{ЭКВ}}$ ,  $n_1^{\text{ЭКВ}} \leq n_i$ , которые будут определять внешние переменные данной подсети и которые в совокупности образуют базис внешних переменных  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)\text{ЭКВ}}$ . Определяются проекции метрических тензоров  $E_{\pi\eta}^{(i)\text{ЭКВ}}$  отдельных подсетей в базисе внешних переменных,  $i = \overline{1, N+1}$ .

Выбор внешних переменных и определение для

них метрик (проекции  $E_{\pi\eta}^{(i)\text{ЭКВ}}$ ) означает замену исходной подсети эквивалентной структурой с числом трактов  $n_1^{\text{ЭКВ}}$ ,  $n_1^{\text{ЭКВ}} \leq n_i$  (рис. 2, в). Тогда переход от исходной подсети  $S_i$  к ее эквивалентному представлению  $S_i^{\text{ЭКВ}}$  ( $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)} \rightarrow \mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)\text{ЭКВ}}$  или напрямую  $\mathcal{E}_v^{(i)} \rightarrow \mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)\text{ЭКВ}}$ ) связан с переходом от пространства  $\mathcal{S}^{(i)}$  размерности  $n_i$  к пространству  $\mathcal{S}^{(i)\text{ЭКВ}}$ , возможно, более низкой размерности  $n_1^{\text{ЭКВ}}$ , базисом которого является базис внешних переменных  $\mathcal{E}_{\pi\eta}^{(i)\text{ЭКВ}}$  (рис. 1).

В случае временной тензорной модели ТКС межконцевые показатели качества обслуживания

для заданной пары адресатов (средняя задержка и интенсивность передачи) являются элементами векторов  $T_{\pi\eta}$  и  $\Lambda_{\pi\eta}$ , относящимися к узловым парам. Это значит, что при переходе к диакоптической модели целесообразно выбрать в качестве элементов базиса  $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв} = \mathcal{B}_{\eta}^{(i)}$ , где размерность базиса  $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв}$  равна рангу  $i$ -й подсети, т.е.  $n_i^{экв} = \rho_i$ . Эквивалентные представления, заменяющие истинные подсети, приведены на рис. 2, в и имеют структуру типа «звезда». В данном случае переход  $\mathcal{B}_v^{(i)} \rightarrow \mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)} \rightarrow \mathcal{B}_{\eta}^{(i)}$  может быть осуществлен напрямую  $\mathcal{B}_v^{(i)} \rightarrow \mathcal{B}_{\eta}^{(i)}$  посредством матриц базисных узловых пар для основных подсетей, тогда для них проекции ковариантного метрического тензора в базисе  $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)}$  определяются как:

$$E_{\eta}^{(i)} = \left(G_{\eta}^{(i)}\right)^{-1}; G_{\eta}^{(i)} = B_{\eta}^{(i)} G_v^{(i)} \left(B_{\eta}^{(i)}\right)^T, \quad i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где  $B_{\eta}^{(i)}$  – матрицы базисных узловых пар;  $G_v^{(i)}$ ,  $G_{\eta}^{(i)}$  – проекции контравариантного метрического тензора  $G$ ,  $G_v^{(i)} = \left(E_v^{(i)}\right)^{-1}$ .

Исключение составляет  $(N+1)$ -я подсеть – цепь пересечений, метрический тензор которой в базисе  $\mathcal{B}_{\eta}^{(N+1)}$  имеет диагональный вид и состоит из метрик удаленных на этапе декомпозиции ветвей:

$$E_{\eta}^{(N+1)} = E_v^{(N+1)} = \begin{pmatrix} e_{11}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{22}^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{ss}^v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $s$  – количество ветвей в  $(N+1)$ -й подсети.

В целом заметим, что переход от исходной подсети к ее эквивалентному представлению, осуществляемый на втором этапе, в зависимости от типа базиса и количества выбранных в качестве внешних переменных может быть тождественным или с понижением размерности. В первом случае исходная подсеть  $S_i$  и ее эквивалентное представление  $S_i^{экв}$  совпадают; все переменные, описывающие  $S_i$ , являются одновременно и ее внешними переменными, например,  $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв} \equiv \mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)}$ . Пример эквивалентного представления с понижением размерности описан выше ( $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв} = \mathcal{B}_{\eta}^{(i)}$ ) и приведен на рис. 2.

Второе замечание связано со способом декомпозиции исходной сети на подсети. Использование

для эквивалентного представления подсетей базисных элементов одного типа,  $n_i^{экв} < n_i$ , например, только контуров  $\pi$  или узловых пар  $\eta$ , не допускает произвольного сочетания способа декомпозиции и типа базиса эквивалентного представления  $\mathcal{B}^{(i)экв}$ . Так в случае  $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв} = \mathcal{B}_{\eta}^{(i)}$  декомпозиция может быть осуществлена с поперечным рассечением ветвей (рис. 2, а). Если бы предполагалось эквивалентное описание подсетей через совокупности их базисных контуров ( $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв} = \mathcal{B}_{\pi}^{(i)}$ ), то декомпозиция должна была бы осуществляться вдоль ветвей топологической модели.

**Этап III.** Проекция метрических тензоров  $E_{\eta}^{(i)}$ , полученные на предыдущем этапе, объединяются в единую матрицу. Это матрица проекции  $E_{\eta}^{Sdec}$  метрического тензора в базисе  $\mathcal{B}_{\eta}^{dec}$ . По сути, данный этап является подготовительным и предшествует объединению отделенных друг от друга подсетей в единую сеть.

Матрица проекции  $E^{Sdec}$  имеет блочную или диагонально-блочную структуру в зависимости от типа базиса  $\mathcal{B}^{dec}$  и выбранных внешних переменных. В случае эквивалентного описания подсетей с использованием только базиса узловых пар  $\mathcal{B}_{\pi\eta}^{(i)экв} = \mathcal{B}_{\eta}^{(i)}$ , базис  $\mathcal{B}^{dec}$ , отнесенный к декомпозированной сети, так же будет содержать только узловые пары в качестве базисных элементов,  $\mathcal{B}^{dec} = \mathcal{B}_{\eta}^{dec}$ . Размерность базиса  $\mathcal{B}_{\eta}^{dec}$  равна  $n^{экв} = \sum_{i=1}^{N+1} n_i^{экв} = \sum_{i=1}^{N+1} \rho_i$ . Проекция метрического тензора сети в базисе  $\mathcal{B}_{\eta}^{dec}$  формируется согласно следующему правилу:

$$E_{\eta}^{dec} = \begin{pmatrix} E_{\eta}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\eta}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\eta}^{(N+1)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

**Этап IV.** Осуществляется переход от совокупности отдельных эквивалентных подсетей  $S_i^{экв}, i = \overline{1, N+1}$ , к соединенной сети  $S^{com}$ . Соединенная сеть  $S^{com}$  представляет собой объединение эквивалентных представлений отдельных подсетей  $S_i^{экв}$  с восстановлением всех декомпозированных на первом этапе связей между ними. Как результат

система  $S^{com}$  структурно может не совпадать с исходной сетью  $S$  (рис. 2, г), тем не менее, функциональные особенности исходной сети заложены в метриках соединенной сети, в частности в проекции  $E_{\pi\eta}^{com}$ .

Процесс соединения в рамках диакоптики трактуется как координатное преобразование базиса  $\mathcal{E}^{dec}$  в базис  $\mathcal{E}^{com}$  (в данном случае  $\mathcal{E}_\eta^{dec} \rightarrow \mathcal{E}_{\pi\eta}^{com}$ ), формализованное матрицей контравариантного координатного преобразования  $C_{com}^{dec}$ . Преобразование осуществляется в рамках пространства  $\mathcal{S}^{эКВ} \subseteq \mathcal{S}$  размерности  $n^{эКВ}$ ,  $n^{эКВ} \leq n$ . Для рассматриваемой модели по известной проекции метрического тензора  $E_\eta^{dec}$  в базисе  $\mathcal{E}_\eta^{dec}$  при помощи матрицы преобразования  $C_{com}^{dec}$  может быть найдена проекция метрического тензора  $E_{\pi\eta}^{com}$  соединенной сети  $S^{com}$ :

$$E_{\pi\eta}^{com} = (C_{com}^{dec})^T E_\eta^{dec} C_{com}^{dec}. \quad (11)$$

Проекция метрического тензора  $E_{\pi\eta}^{com}$  соединенной сети  $S^{com}$  (11) несет в себе информацию о метрических свойствах всей сети и является эквивалентом проекции  $E_{\pi\eta}$ , фигурирующей в выражениях (2) и (6), а соответственно может быть использована для решения практических задач.

### Диакоптическая тензорная модель ТКС

В соответствии с описанными выше этапами и сопровождающими их действиями диакоптическая тензорная модель ТКС может быть представлена алгебраической диаграммой (рис. 3), в рамках которой для эквивалентного представления подсетей предполагается использование множества узловых пар.

В рамках диакоптической тензорной модели межконцевые показатели качества являются координатами проекций  $T_{\pi\eta}^{com}$  и  $\Lambda_{\pi\eta}^{com}$ , которые могут быть представлены в терминологии Г. Крона [7] в виде компаунд-тензоров следующим образом

$$T_{\pi\eta}^{com} = \begin{vmatrix} T_\eta^{com} \\ \dots \\ T_\pi^{com} \end{vmatrix}; \quad \Lambda_{\pi\eta}^{com} = \begin{vmatrix} \Lambda_\eta^{com} \\ \dots \\ \Lambda_\pi^{com} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

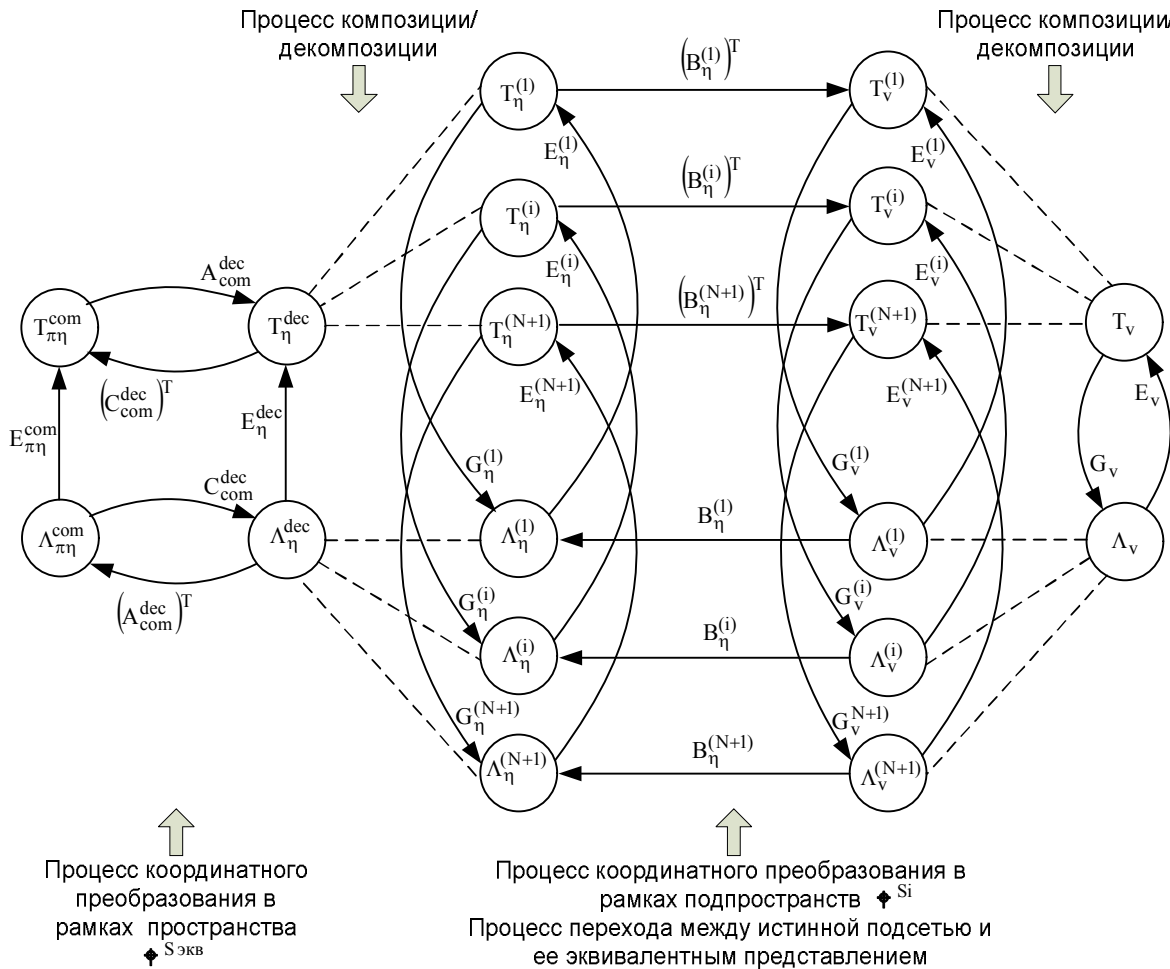


Рис. 3. Алгебраическая диаграмма диакоптической тензорной модели ТКС

Тогда требования к межконцевым значениям временных задержек представляют собой элементы вектора  $T_{\eta}^{com}$ , а интенсивности передачи трафика между заданной парой адресатов – элементы вектора  $\Lambda_{\eta}^{com}$ :

$$T_{\eta}^{com} = T_{\eta \text{ трб}}^{com}; \quad \Lambda_{\eta}^{com} = \Lambda_{\eta \text{ трб}}^{com}. \quad (13)$$

Ковариантный метрический тензор в СК  $\clubsuit_{\pi\eta}^{com}$  также может быть представлен компаунд-тензором, блоки которого соответствуют базисным элементам разных типов:

$$E_{\pi\eta}^{com} = \left\| \begin{array}{c|c} E_{\pi\eta}^{com\langle 1 \rangle} & E_{\pi\eta}^{com\langle 2 \rangle} \\ \hline E_{\pi\eta}^{com\langle 3 \rangle} & E_{\pi\eta}^{com\langle 4 \rangle} \end{array} \right\|. \quad (14)$$

Подставляя в тензорное уравнение вида (1) проекции (12) и (14), получим

$$\left\| \begin{array}{c} T_{\eta}^{com} \\ \hline T_{\pi}^{com} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} E_{\pi\eta}^{com\langle 1 \rangle} & E_{\pi\eta}^{com\langle 2 \rangle} \\ \hline E_{\pi\eta}^{com\langle 3 \rangle} & E_{\pi\eta}^{com\langle 4 \rangle} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \Lambda_{\eta}^{com} \\ \hline \Lambda_{\pi}^{com} \end{array} \right\|. \quad (15)$$

Откуда имеем два векторно-матричных уравнения:

$$T_{\eta}^{com} = E_{\pi\eta}^{com\langle 1 \rangle} \Lambda_{\eta}^{com} + E_{\pi\eta}^{com\langle 2 \rangle} \Lambda_{\pi}^{com}; \quad (16)$$

$$T_{\pi}^{com} = E_{\pi\eta}^{com\langle 3 \rangle} \Lambda_{\eta}^{com} + E_{\pi\eta}^{com\langle 4 \rangle} \Lambda_{\pi}^{com}. \quad (17)$$

Приравнявая уравнение (17) к нулю и обеспечивая тем самым равенство нулю контурных задержек  $T_{\pi}^{com} = 0$ , имеем

$$\Lambda_{\pi}^{com} = - \left( E_{\pi\eta}^{com\langle 4 \rangle} \right)^{-1} E_{\pi\eta}^{com\langle 3 \rangle} \Lambda_{\eta}^{com}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), окончательно получаем выражение, которое связывает интенсивности передачи трафика между заданной парой адресатов с межконцевыми значениями средних задержек:

$$T_{\eta}^{com} = \left[ E_{\pi\eta}^{com\langle 1 \rangle} - E_{\pi\eta}^{com\langle 2 \rangle} \left( E_{\pi\eta}^{com\langle 4 \rangle} \right)^{-1} E_{\pi\eta}^{com\langle 3 \rangle} \right] \Lambda_{\eta}^{com}. \quad (19)$$

Переходя от равенства (19) к форме неравенства и с учетом (13), получаем:

$$T_{\eta \text{ трб}}^{com} \geq \left[ \begin{array}{c} E_{\pi\eta}^{com\langle 1 \rangle} - \\ - E_{\pi\eta}^{com\langle 2 \rangle} \left( E_{\pi\eta}^{com\langle 4 \rangle} \right)^{-1} E_{\pi\eta}^{com\langle 3 \rangle} \end{array} \right] \Lambda_{\eta \text{ трб}}^{com}. \quad (20)$$

В результате имеем формализацию одного из QoS-ограничений, отражающего требования к качеству обслуживания в терминах межконцевой задержки. Хотя форма записи условия (20) в рамках диакоптической тензорной модели внешне совпадает с формой, полученной в рамках тензорной модели [1 – 3], правила нахождения проекции метрического тензора для сети принципиально отличаются.

Эти отличия заключаются в следующем.

Во-первых, в рамках диакоптических моделей проекция метрического тензора  $E_{\pi\eta}^{com}$  вычисляется на основании блочно-диагональной матрицы проекции  $E_{\pi\eta}^{dec}$ , каждый блок которой относится к отдельной подсети и формируется независимо, что дает возможность реализации параллельных вычислений.

Тот факт, что в рамках диакоптики можно оперировать с метрическими тензорами подсетей в отдельности, значительно расширяет возможности относительно правил формирования этих тензоров.

Во-вторых, проекция метрического тензора  $E_{\pi\eta}^{com}$  представляет собой матрицу размера  $n^{экр} < n$ , так как соответствуют пространству  $\clubsuit^{S_{экр}} \subset \clubsuit^S$ , в отличие от проекций метрических тензоров в простых тензорных (без диакоптики) моделях, которые определены для пространства  $\clubsuit^S$  размерности  $n$ . Тем самым достигается снижение требований к объемам хранящихся данных на уровне всей сети.

В-третьих, на уровне отдельных подсетей снижение требований к объемам хранящихся данных происходит за счет использования вместо матрицы преобразования  ${}^{(i)}C_{\pi\eta}^v$  базисных матриц  $B_{\eta}^{(i)}$  меньшего размера. Кроме того, совокупность базисных матриц всех отдельных подсетей обладает меньшими объемами, чем матрица координатного преобразования для всей сети  $A$  (или  $C$ ).

С другой стороны, в ходе моделирования было выявлено полное совпадение результатов, полученных в рамках различных моделей: диакоптической тензорной (8) – (20) и простой тензорной (1) – (6).

## Выводы

Таким образом, применение диакоптики в рамках тензорных моделей при решении различных сетевых задач, например, задачи многопутевой маршрутизации в сети с гарантированным качеством обслуживания, позволяет повысить масштабируемость получаемых решений. Это достигается благодаря возможности в условиях диакоптических моделей организации в ТКС распределенного управления, в рамках которого решение части задач возлагается на подсети, а управление всей сетью заключается лишь в безитерационном объединении решений, полученных на уровне подсетей. В целом реализация такого управления способствует повышению оперативности процесса расчета управляющего воздействия и пропорциональному снижению объемов служебного трафика о состоянии ТКС, а также повышению устойчивости функционирования сети в целом.

## Список литературы

1. Лемешко А.В. Тензорная модель многопутевой маршрутизации агрегированных потоков с резервированием сетевых ресурсов, представленная в пространстве с кривизной / А.В. Лемешко // Праці УНДІРТ. – 2004. – № 4 (40). – С. 12-18.
2. Лемешко А.В. Модель многопутевой QoS-маршрутизации в мультисервисной телекоммуникационной сети / А.В. Лемешко, О.А. Дробот // Радиотехника: Всеукр. міжвед. науч.-техн. сб. – 2006. – Вып. 144. – С. 16-22.
3. Лемешко А.В. Категориально-тензорное представление телекоммуникационной системы / А.В. Лемешко, О.Ю. Евсеева, А.В. Чечуй // Наукові записки УНДІЗ. – 2008. – № 2 (4). – С. 3-15.
4. Евсеева О.Ю. Тензорная модель гарантированного обеспечения нормированных показателей качества обслуживания в ТКС / О.Ю. Евсеева // Наукові записки УНДІЗ. – 2008. – № 3 (5). – С. 71-81.
5. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности / В.И. Цурков. – М.: Наука, 1981. – 352 с.
6. Сингх М. Системы: декомпозиция, оптимизация и управление / М. Сингх, А. Тупли. – М.: Машиностроение, 1986. – 494 с.
7. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика / Г. Крон. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
8. Dowell L.J. On Solving Nearly-Singular, Sparse Systems of Linear Equations: Diakoptics Techniques for Parallel Computing / L.J. Dowell, D.J. Roberts, D.B. Henderson // Los Alamos National Laboratory, Technical Rep. No. LAUR-00-2175.
9. Aitchison P.W. Diakoptics as a general approach in engineering / P.W. Aitchison // Journal of Engineering Mathematics. – 1987. – Vol. 21. – P. 47-58.
10. Elmqvist H. Methods For Tearing Systems of Equations in Object-Oriented Modeling / H. Elmqvist, M. Otter // Proc. ESM. June 1-3, 1994. – Barcelona, 1994. – P. 326-332.
11. Bargiela A. Nonlinear network tearing algorithm for transputer system implementation / A. Bargiela // Proc. of Int. Conf. TAPA '92. – Melbourne, November 1992. – P. 19-24.
12. Lai C.H. Diakoptics, domain decomposition and parallel computing / C.H. Lai // The Computer Journal. – 1994. – Vol. 37, No 10. – P. 840-846.
13. Lui S.H. Kron's method for symmetric eigenvalue problems / S.H. Lui // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1998. – Vol. 98. – P. 35-48.
14. Bowden K. Kron's Method of Tearing on a Transputer Array / K. Bowden // The Computer Journal. – 1990. – Vol. 33, No 5. – P. 453-459.
15. Brameller A. The application of diakoptics and the escalator method to the solution of very large eigenvalue problems / A. Brameller, K.L. Lo // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1970. – Vol. 2. – P. 535-549.
16. Слипченко В.Г. Методы диакоптики в электронике / В.Г. Слипченко, Г.Н. Елизаренко. – К.: Вища школа, 1981. – 208 с.
17. Ruji H. Unification of generalized hybrid analysis and generalized diakoptics / H. Ruji // Journal of electronics. – 1986. – Vol. 3, N. 2. – P. 98-110.
18. OVNI: Integrated software/hardware solution for real-time simulation of large power systems / J.R. Martí, L.R. Linares, J.A. Hollman, F.A. Moreira // Proc. Power Systems Computation Conf., 2002. – Seville, 2002. – Session 33, P. 4.
19. Шакиров М.А. Теоретические основы электротехники. Новые идеи и принципы. Схеманализ и диакоптика / М.А. Шакиров. – СПб.: СПбГТУ, 2001. – 212 с.
20. Brameller A. Practical diakoptics for electrical networks / A. Brameller, M.N. John, M.R. Scott. – London: Chapman & Hall, 1969. – 242 p.
21. Sangiovanni-Vincentelli A. Node-Tearing Nodal Analysis / A. Sangiovanni-Vincentelli, L.K. Chen, L.O. Chua // Technical Report ERL-M582, Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley, October, 1976
22. Гераскин О.Т. Разработка методов диакоптики для расчета режимов больших электроэнергетических систем: методическая разработка / О.Т. Гераскин, П.П. Кутлер. – М.: ИПКгосслужбы, 1998. – 15 с.
23. Geyi W. A network model decomposition method for the calculation of cut-off frequencies of an arbitrary shaped waveguide with arbitrary filling / W. Geyi // Journal of electronics. – 1991. – Vol. 8, N. 1. – P. 123-126.
24. Ney M.M. Diakoptics: an efficient technique for EMC applications / M.M. Ney, S. Le Maguer // Proc. of 13EMC Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility, Feb. 16-18, 1999. – Zurich, 1999. – P. 339-342.
25. Johns P.B. Time domain approximations in the solution of fields by time domain diakoptics / P.B. Johns, K. Akhtarzad // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1982. – Vol. 18. – P. 1361-1373.
26. Waveguide bandpass filter analysis and design using multimode parallel FDTD diakoptics / D. Su, J. Park, Y. Qian, B. Houshmand, T. Itoh // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1999. – Vol. 47. – P. 867-876
27. Кочура А.Е. Диакоптика в анализе многомерных балансовых моделей больших экономических систем / А.Е. Кочура // Инструмент и технологи. – 2000. – № 11, 12. – С. 14-24.
28. Bracewell R.H. From Embodiment Generation To Virtual Prototyping / R.H. Bracewell, A.L. Johnson // Proc. of the 12th International Conference On Engineering Design (ICED 99). – Munich, 24-26 August, 1999.
29. Hartley J. Parallel State Estimation with Confidence Limit Analysis / J. Hartley, A. Bargiela // Parallel Algorithms and Applications. – 1997. – Vol. 11, No.1-2. – P. 155-167.
30. Кулагин В.П. Моделирование структур параллельных вычислительных систем на основе сетевых моделей / В.П. Кулагин. – М.: МГИЭМ (технический университет), 1998. – 102 с.

Поступила в редколлегию 24.03.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, доц. А.В. Лемешко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## ДІАКОПТИЧНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕНЗОРНОЇ МОДЕЛІ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ

О.Ю. Євсєєва

На прикладі тимчасової тензорної моделі телекомунікаційної мережі висловлюється методика її діакоптичного узагальнення, використання якої, зрештою, дозволяє підвищити масштабованість отримуваних рішень.

**Ключові слова:** діакоптичне узагальнення, тензорна модель.

## DIACOPTIC GENERALIZATION OF tensor MODEL OF TELECOMMUNICATION NETWORK

O.Yu. Evseeva

On the example of temporal tensor model of telecommunication network the method of her is expounded diacoptic generalizations, the use of which, in the end, allows to promote scaled of the got decisions.

**Keywords:** diacoptic generalization, tensor model.