УДК 004.681

Я.В. Дудикевич, І.А. Прокопишин

Національний університет «Львівська політехніка», Львів

ВАРТІСНІ МІРИ РИЗИКУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ІНВЕСТИЦІЙ У СИСТЕМИ ЗАХИСТУ

Для оцінки ефективності інвестицій у системи захисту використано чисту теперішню вартість затрат та випадкових втрат, зумовлених загрозами. Оцінка ризику проводиться на основі дискретної ймовірнісної моделі з використанням мір ризику VaR_α *та* $CVaR_\alpha$. *Дано формулювання задачі оптимізації інвестицій як задачі дискретного програмування на множині профілів захисту.*

Ключові слова: *системи захисту, вартість ризику, інвестиції, оптимізація.*

Вартісні міри ризику

Нехай ξ – випадкова величина економічних втрат за деякий період (рік) з функцією розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$ та щільністю $f(x)$. Вартістю ризику за рівня значущості $0 < \alpha < 1$ називають максимальні можливі з ймовірністю α втрати за цей період [8]:

$$VaR_\alpha = \sup\{x \,|\, F(x) \le \alpha\}. \qquad (1)$$

Легко бачити, що з ймовірністю α втрати за період не перевищать величини VaR_α і лише з ймовірністю $1-\alpha$ вони будуть більшими за цю величину. Рівень довіри α виражає відношення до ризику, зазвичай його приймають рівним 99% або 95%.

Якщо, функція розподілу втрат неперервна і строго монотонна, то величина VaR_α дорівнює квантилю порядку α для цієї функції:

$$VaR_\alpha = x_\alpha = F^{-1}(\alpha). \qquad (2)$$

Детальне дослідження міри ризику VaR_α для випадку, коли функція розподілу випадкової величини втрат є кусково-неперервною, зокрема – кусково-сталою, проведено у роботі авторів [4].

Означена міра ризику є кращою таких класичних мір ризику, як математичне сподівання втрат та дисперсія втрат і знайшла широке використання у сучасному фінансовому ризик-менеджменті [8]. Однак, вона має ряд недоліків [9]. Ця величина не дає інформації про можливі збитки за межами значення VaR_α, що можуть бути значними для втрат, функції розподілу яких мають "важкі хвости". Ця міра ризику також не задовольняє умову субадтитивності, тобто допускає ситуацію коли ризик сумарних втрат перевищує суму окремих ризиків:

$$VaR_\alpha(\xi+\eta) > VaR_\alpha(\xi) + VaR_\alpha(\eta). \qquad (3)$$

Подальшим розвитком міри ризику VaR_α є міра ризику $CVaR_\alpha$ (умовний VaR, або середні неочікувані втрати – mean expected loss) [9]. Цю величину можна означити, як математичне сподівання втрат, рівних або більших VaR_α:

$$CVaR_\alpha = E\{\xi \,|\, \xi \ge VaR_\alpha(\xi)\}. \qquad (4)$$

Така міра ризику задовольняє умови когерентності [9], і зокрема – умову субадитивності.

Розглянемо випадок, коли втрати є неперервно-розподіленою випадковою величино. Нехай подія A полягає у перевищенні втратами деякого значення a, тобто $\xi \ge a$, очевидно, що $P(A) = 1 - F(a)$.

Розглянемо умовну випадкову величину $\xi_A = (\xi \,|\, A) = (\xi \,|\, \xi \ge a)$. Щільність її розподілу за формулою Байєса [3] дорівнює:

$$f_A(x) = \frac{f\ (x)}{P(A)} P(A|x); \; P(A|x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$$

За допомогою цієї формули знаходимо математичне сподівання випадкової величини ξ_A:

$$E(\xi_A) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_A(x)\, dx = \frac{1}{1-F(a)} \int_a^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Отож, для величини $CVaR_\alpha$ отримуємо вираз:

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1-F(VaR_\alpha)} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Враховуючи формулу (2), після заміни змінних у попередньому інтегралі, остаточно знайдемо:

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_y dy. \qquad (5)$$

У роботі [4] показано, що міра ризику VaR_α лінійна в такому сенсі:

$$VaR_\alpha(a\xi + b) = aVaR_\alpha(\xi) + b, \; a > 0. \qquad (6)$$

За попередньою формулою отримуємо аналогічну властивість для міри $CVaR_\alpha$:

$$CVaR_\alpha(a\xi + b) = a\, CVaR_\alpha(\xi) + b, \; a > 0. \qquad (7)$$

Нехай, втрати є дискретно розподіленою випадковою величиною, яка може приймати значення

$x_1 < x_2 < ... < x_n$ з ймовірностями

$$p_1, p_2, ... p_n,\ p_i > 0,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Її функція розподілу записується так:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \qquad (8)$$

Позначимо:

$$F_k = F(x_k),\ k = \overline{1,n},\ F_{n+1} = 1. \qquad (9)$$

Для заданого $0 < \alpha < 1$ існує єдиний індекс $k_\alpha \in \overline{1,n}$, для якого виконується нерівність:

$$F_{k_\alpha} \le \alpha < F_{k_\alpha + 1}. \qquad (10)$$

Як показано у роботі [4]

$$VaR_\alpha = x_{k_\alpha}. \qquad (11)$$

Події $H_i = (\xi = x_i)$, $i = \overline{1,n}$ утворюють повну групу подій. Розглянемо подію $A = (\xi \ge x_k)$, $k \in \overline{1,n}$, яка може відбуватися з однією з подій H_i. За формулою повної ймовірності [3] отримаємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A)P(A \mid H_i) = \sum_{i=k}^{n} p_i.$$

Далі, за формулою Байєса знайдемо

$$P(H_i \mid A) = p_i \left(\sum_{i=k}^{n} p_i \right)^{-1} \begin{Bmatrix} 1,\ x_i \ge x_k \\ 0,\ x_i < x_k \end{Bmatrix},\ i = \overline{1,n}.$$

Тому, для математичного сподівання умовної випадкової величини $\xi_A = (\xi \mid A) = (\xi \mid \xi \ge x_k)$ отримаємо:

$$E(\xi \mid A) = \sum_{i=k}^{n} x_i p_i \left(\sum_{i=k}^{n} p_i \right)^{-1}.$$

Отож, для $CVaR_\alpha$ матимемо

$$CVaR_\alpha = \sum_{i=k_\alpha}^{n} x_i p_i \left(\sum_{i=k_\alpha}^{n} p_i \right)^{-1}. \qquad (12)$$

Отримані формули для розрахунку величин VaR_α та $CVaR_\alpha$ зручні, коли випадкова величина втрат задана деякою емпіричною вибіркою. Легко бачити, що умови лінійності (6) та (7) у дискретному випадку також виконуються.

Оцінка ризику для систем захисту на основі дискретної ймовірнісної моделі

Розглянемо деяку систему захисту, наприклад систему захисту інформації (СЗІ). Для опису можливих економічних втрат, аналогічно до праць [1, 5], побудуємо дискретну ймовірнісну модель.

Припустимо, що на протязі розглядуваного періоду(року) можливе виникнення N загроз $Z_1, Z_2, ..., Z_N$, з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_N$, $0 < p_i \le 1$, $i = \overline{1,N}$. Для кожної загрози Z_i система захисту передбачає захист S_i з ймовірністю спрацювання q_i, $0 \le q_i \le 1$, $i = \overline{1,N}$.

Величину можливих економічних збитків від i-ї загрози при спрацюванні захисту позначимо V_i, а при його провалі – W_i. Оцінку величин p_i, q_i, V_i, W_i, $i = \overline{1,N}$ можна провести експертним шляхом, зокрема, за методикою запропонованою у праці [1]. Для систем захисту інформації важливою є вартісна оцінка інформації [6].

Випадкова величина втрат за період для i-ї загрози $\tilde{L}_i$ є дискретно розподіленою випадковою величиною, яка може приймати значення 0, V_i та W_i з ймовірностями $1 - p_i$, $p_i q_i$ та $p_i(1 - q_i)$ – відповідно. Сумарна величина втрат зумовлена загрозами буде рівна сумі всіх можливих втрат:

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{L}_i. \qquad (13)$$

Це дискретно розподілена випадкова величина, кількість станів якої n може досягати величини 3^N, тобто $n \le 3^N$.

Для невеликих N варіаційний ряд значень сумарної величини втрат легко знайти прямим перебором варіантів з подальшим впорядкуванням за зростанням. За його допомогою будуємо функцію розподілу (8) та обчислюємо міри ризику $VaR_\alpha(\tilde{L})$ та $CVaR_\alpha(\tilde{L})$ за формулами (11) та (12).

Оптимізація інвестицій в системи захисту

Впровадження чи модернізацію систем захисту будемо розглядати як інвестиційний проект на T років [5, 7].

Впровадження захисту S_i проти загрози Z_i, $i = \overline{1,N}$, вимагає капітальних вкладень у сумі P_i та річних витрат на обслуговування – C_i, а випадкова величина річних збитків дорівнює $\tilde{L}_i$. Величини C_i та $\tilde{L}_i$ вважаємо сталими для усіх часових періодів. Зауважимо також, що величини C_i повинні включати втрати, викликані можливим зменшенням продуктивності об’єкта захисту при впровадженні захисту S_i.

Отож, окрема загроза визначається двійкою $Z_i = (p_i, W_i)$, а захист від неї – четвіркою $S_i = (P_i, C_i, q_i, V_i)$, $i = \overline{1,N}$.

Нехай вектор загроз $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_N)$ – фіксований. Профіль захисту для нього визначається набором $S = (S_1, S_2, ..., S_N)$. Множину можливих стандартних функціональних профілів захисту

(СФПЗ) для заданого вектора загроз позначимо Ω .

Сумарні капітальні затрати та річні витрати на обслуговування для деякого профілю захисту $S = (S_1, S_2, ..., S_N)$ позначимо так:

$$P(S) = \sum_{i=1}^{N} P_i(S_i), \quad C(S) = \sum_{i=1}^{N} C_i(S_i). \qquad (14)$$

Для оцінки ефективності інвестицій у системи захисту використаємо чисту теперішню вартість [2] затрат та випадкових втрат, яка буде випадковою величиною:

$$NPV = P(S) + \sum_{t=1}^{T} C(S)(1+i)^{-t} + \sum_{t=1}^{T} \tilde{L}(S)(1+i)^{-t}, \quad (15)$$

де i – необхідна процентна ставка.

Тоді, за формулою (6) або (7) вартість ризику для цієї величини буде дорівнювати:

$$NPV_\alpha = PVIFA_{i,T}\left(R(S) + C(S) + V_\alpha\left(\tilde{L}(S)\right)\right), \quad (16)$$

де

$$R(S) = P(S) \big/ PVIFA_{i,T}; \qquad (17)$$

$PVIFA_{i,T} = \left(1 - (1+i)^{-T}\right) \Big/ i$ – процентний фактор теперішньої вартості ренти, а $V_\alpha\left(\tilde{L}(S)\right)$ відповідно дорівнює $VaR_\alpha\left(\tilde{L}(S)\right)$ або $CVaR_\alpha\left(\tilde{L}(S)\right)$.

Легко бачити, що для випадку, коли початкові інвестиції здійснювати за рахунок кредиту на T років з процентною ставкою k вираз для NPV_α записується аналогічно, але величина $R(S)$ в цьому випадку буде рівна річній платі по погашенню кредиту:

$$R(S) = P(S) \big/ PVIFA_{k,T}. \qquad (18)$$

Величина NPV_α є абсолютною оцінкою ефективності інвестицій у системи захисту. На її основі, з урахуванням математичного сподівання втрат, а також прибутків від об'єкту захисту, можна побудувати різні відносні показники ефективності.

У роботі [1] дано формулювання задачі оптимізації СЗІ як задачі мінімізації математичного сподівання втрат на множині СФПЗ з обмеженням на вартість захисту.

З урахуванням ризику випадкових втрат, задачу оптимізації систем захисту сформулюємо як задачу мінімізації величини NPV_α на множині стандартних функціональних профілів захисту:

$$\min_{S \in G} NPV_\alpha(S) \qquad (19)$$

за додаткових обмежень:
на капіталовкладення

$$R(S) \le R^+; \qquad (20)$$

поточні витрати на обслуговування

$$C(S) \le C^+; \qquad (21)$$

кошти на ліквідацію наслідків загроз

$$V_\alpha(\tilde{L}(S)) \le V^+; \qquad (22)$$

на сумарні витрати

$$R(S) + C(S) + V_\alpha(\tilde{L}(S)) \le S^+, \qquad (23)$$

де величини R^+, C^+, V^+ та S^+ позначають відповідні обмеження.

Сформульована задача мінімізації є задачею дискретної оптимізації. Її розв'язок існує, якщо множина векторів СФПЗ, які задовольняють обмеження задачі – не пуста. Найпростішим способом розв'язування задачі (19) – (23) є прямий перебір функціональних профілів захисту.

Список літератури

1. *Задача оптимального выбора функционального профиля защищенности / А.А. Антонюк, Д.С. Берестов, С.Н. Пустовит, В.П. Шилин // Захист інформації. – 2005. – Спец. вип. – С. 11-14.*
2. *Бакаєв Л.О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями / Л.О. Бакаєв. – К.: КНЕУ, 2000. – 151 с.*
3. *Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Вища шк., 1988. – 439 с.*
4. *Дудикевич Я.В. Вартість ризику для систем захисту інформації / Я.В. Дудикевич, І.А. Прокопишин // Захист інформації. – 2009. – № 2. – С. 81-85.*
5. *Дудикевич Я.В. Економічна ефективність та оптимізація систем захисту інформації з урахуванням вартості ризику втрати інформації // Інформаційна безпека / Я.В. Дудикевич, І.А. Прокопишин // Матеріали науково-практичної конференції, Київ, 26-27 березня 2009 р. – К.: ДУІКТ, 2009. – С. 80-84.*
6. *Кавун С.В. Методы стоимостной оценки информации / С.В. Кавун // Защита информации. – К.: НАУ, 2008. – С. 244-251.*
7. *Петренко С.А. Обоснование инвестиций в безопасность / С.А. Петренко, Е.М. Терехова // Научно-технический журнал "Защита информации. INSIDE". – 2005. – № 1. – С. 49-53.*
8. *Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А.А.Лобанова и А.В.Чугунова. – 3-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 878 с.*
9. *Acerbi C. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk [Електронний ресурс] / C. Acerbi, D. Tasche. – May 9, 2001. – 9 p. – Режим доступу до док.: http://www.gloriamundi.org.*
10. *Coherent measures of risk / P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath // Math. Fin. – 1999. – **9** (3). – P. 203-228.*

Надійшла до редколегії 24.03.2010

Рецензент: д-р техн. наук, доцент О.В. Потій, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

СТОИМОСТНЫЕ МЕРЫ РИСКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИЙ В СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ

Я.В. Дудыкевич, И.А. Прокопишин

Для оценки эффективности инвестиций в системы защиты использована чистая настоящая стоимость затрат и случайных потерь, предопределенных угрозами. Оценка риска проводится на основе дискретной вероятностной модели с использованием мер риска VaR_α *и* CVaR_α. *Дана формулировка задачи оптимизации инвестиций как задачи дискретного программирования на множественном числе профилей защиты.*

Ключевые слова: *системы защиты, стоимость риска, инвестиции, оптимизация.*

MEASURES OF COSTS OF RISK AND THEIR APPLICATION TO OPTIMIZATION OF INVESTMENTS IN SYSTEMS OF DEFENCE

Ya.V. Dudykevich, I.A. Prokopishin

For the estimation of efficiency of investments the net real cost of expenses and casual losses, predefined threats is used in the systems of defence. A risk estimation is conducted on the basis of discrete probabilistic model with the use of measures of risk VaR_α *and* CVaR_α. *Problem of optimization of investments definition as tasks of the discrete programming is given on the plural of types of defence.*

Keywords: *systems of defence, risk cost, investments, optimization.*