УДК 681.518.3

В.С. Єременко, В.М. Мокійчук, О.В. Самойліченко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЖОНСОНА ДЛЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ МЕТРОЛОГІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАНДАРТНИХ ЗРАЗКІВ

Запропоновано метод підвищення точності оцінювання розширеної невизначеності сертифікованих значень характеристик як однієї з основних метрологічних характеристик стандартних зразків. Метод ґрунтується на перетворенні Джонсона закону розподілу розширеної невизначеності. Досліджено точність оцінювання квантилів розширеної невизначеності для складових, оцінених як за типом А, так і за типом В, при визначенні параметрів кривої Джонсона методом моментів. Показана можливість застосування запропонованого методу для підвищення точності розрахунку розширеної невизначеності.

Ключові слова: *стандартний зразок, характеризація****,*** *невизначеність, перетворення Джонсона, момент, квантиль.*

Вступ

Одним з важливих засобів забезпечення якості результатів роботи вимірювальних (випробувальних) лабораторій, успішного проходження ними процедури акредитації, отримання позитивних результатів у раундах міжлабораторних порівнянь є застосування стандартних зразків (СЗ). Відповідно, процес характеризації СЗ та методи оцінювання їх метрологічних характеристик – атестованого значення та його невизначеності – мають забезпечувати максимально можливу точність. Враховуючи, що методики атестації стандартизовані, підвищення точності метрологічних характеристик запропоновано досягти підвищенням точності оцінювання розширеної невизначеності.

Існуючі національні нормативні документи з питань атестації СЗ базуються на концепції похибки, міжнародні – на концепції невизначеності. Всі вони передбачають гауссівський закон розподілу сумарної похибки або невизначеності.

В разі невиконання умови гауссовості застосування методів, викладених в рекомендаціях, може призвести до значних похибок при характеризації СЗ. Тому пропонується метод оцінювання розширеної невизначеності, що базується на нормалізуючому перетворенні Джонсона. В [1] розглянуто перетворення Джонсона з квантильним методом обрахування параметрів кривої (вихідними даними є отримана за результатами вимірювань вибірка, тобто наявні складові невизначеності , оцінені за типом А). Показано, що метод має досить високу точність розрахунків значень квантилів, а також його переваги над найбільш розповсюдженим методом – методом заміни результуючого закону гауссівським.

Основною умовою методів оцінювання невизначеності за складовими, визначеними за типом В є наявність апріорної інформації про закони розподілу складових невизначеності та їх параметри. З цієї інформації можна визначити моменти розподілу кожної складової. Методи оцінювання складових за типом В водночас можуть бути використані також для складових, оцінених за типом А, якщо оцінити відповідні моменти розподілу.

Враховуючи легкість та точність перетворення Джонсона для оцінювання складових за типом А, запропоновано дослідити це ж перетворення для складових, оцінених за типом В, використовуючи моментний метод оцінювання параметрів перетворення Джонсона (вихідними даними є моменти розподілів складових невизначеності).

Аналіз існуючих методів оцінювання невизначеності за типом В

Обрахування розширеної невизначеності для найбільш розповсюджених методів оцінювання базується на загальному принципі: в залежності від апріорної інформації та математичних можливостей кожного методу оцінюють симетричні квантилі розподілу $x(\alpha/2)$ та $x(1-\alpha/2)$, $\left(x(\alpha/2)=-x(1-\alpha/2)\right)$ на основі яких і розраховують розширену невизначеність. Для оцінки інтервальної міри невизначеності з $\alpha = 0,1$ (P = 0,9) знаходять квантилі рівня 0,05 та 0,95, для $\alpha = 0,05$ (P = 0,95) – 0,025 та 0,975.

Найбільш розповсюджені методи та необхідна апріорна інформація представлені в табл. 1.

Кожен метод має свої переваги та недоліки: аналітичний метод характеризується максимальною точністю, однак потребує використання складного математичного апарату і багатьох кроків, оскільки одночасно процедура згортки застосовується тільки для двох функцій. Чисельний метод згортки має відносну простоту реалізації, однак використовується для усічених розподілів. Його точність визначається кількістю відліків функцій f_i (багатокрокова процедура).

Таблиця 1

Методи оцінювання
розширеної невизначеності за типом В

Метод	Необхідна апріорна інформація
Аналітичний метод (неперервна згортка функцій розподілу)	Аналітичне рівняння функцій законів розподілу складових сумарної невизначеності $f_j(x)$.
Чисельний метод дискретної згортки	Вихідні щільності $f_j(x_i)$ задані в дискретному вигляді
Метод кумулянтного аналізу	Складові $f_j(x)$ сумарної невизначеності задані аналітично за допомогою характеристичних функцій $\Theta_j(u)$.
Метод статистичного моделювання (Монте-Карло)	Модель вимірюваної величини $X = g(X_1, X_2, X_j ... X_m)$, де $X_1, X_2, ... X_j ... X_m$, $j = 1 ... m$ - складові невизначеності. Псевдовипадкові послідовності з n значень $x_{j,i}$, $i = 1...n$, із заданими законами розподілу.

Збільшення кількості відліків приводить до збільшення кроків згортки, тобто часу обробки. Перевагою методу кумулянтного нализу є можливість об’єднання одночасно декількох складових сумарної невизначеності одночасно, однак в загальному випадку зворотнє перетворення Фур’є $F^{-1}(y)$ сумарної характеристичної функції $\Theta(u)_\Sigma$, дає комплексний вигляд сумарного розподілу [2] $f_\Sigma(x)$.

Загальний недолік розглянутих методів – шукані квантилі знаходять вирішенням кінцевого інтегрального рівняння відносно $x(\alpha/2)$. Для методу аналітичної згортки та кумулянтного аналізу кінцевий вираз має вигляд $\int\limits_{-\infty}^{x(\alpha/2)} f_\Sigma(x)dx = \alpha/2$, для методу дискретної згортки $\sum\limits_{i=-\infty}^{\hat{x}(\alpha/2)} f_{\Sigma i} = \alpha/2$.

Чисельний метод Монте-Карло дає можливість підсумовування складових, оцінених як за типом В так і за типом А, якщо для останнього є достатній обсяг даних. Якщо даних за типом А, недостатньо, то застосування методу Монте-Карло можливе при встановленні з високою довірчою ймовірністю відповідності між емпіричними даними та теоретичною кривою, що описує ці дані. За відомою теоретичною кривою можливо отримати послідовність псевдовипадкових чисел великого обсягу. Приклади реалізації такого генератора розглянуті в [3].

Запропонований метод нормалізуючого перетворення не потребує використання спеціальних генераторів псевдовипадкових чисел з заданим законом розподілу. Окрім того, метод з вико ристанням кривих Джонсона не потребує вирішення інтегрального рівняння відносно $x(\alpha/2)$, оскільки відомий функціональний зв'язок між моментами та квантилями, що дозволяє розраховувати шукані квантилі безпосередньо.

Оцінювання параметрів кривої Джонсона

Нехай випадкова величина z має нормований гаусівський розподіл $N(0,1)$ з одиничною дисперсією та нульовим математичним сподіванням.

Перетворення Джонсона – це чотирипараметрове перетворення виду:

$$z = \gamma + \eta\varphi(y);\ y = (x - \xi)/\lambda, \quad (1)$$

де η, γ, ξ, λ – параметри, що описують функцію, φ - монотонна функція, яка в загальному випадку також залежить від постійних параметрів і як випадкова величина має гаусівський розподіл $N(a, \sigma)$, $a = -\gamma/\eta$, $\sigma = -1/\eta$.

Параметр $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $\eta > 0$ характеризує форму розподілу змінної x, $\xi \in (-\infty, \infty)$ визначає положення функції щільності відносно початку відліку змінної (параметр зсуву), $\lambda > 0$ – масштабний параметр. Кожний вид функції $\varphi(y)$ буде визначати певну функцію щільності розподілу ймовірності змінної x. Отже, підбір аналітичної кривої зводиться до розрахунку параметрів η, γ, ξ, λ.

В роботі [4] запропоновано три основні види перетворення (1):

а) $z = \gamma + \eta \ln y$ – розподіл типу S_L (логарифмічний нормальний);

б) $z = \gamma + \eta \ln(y/1 - y) = \gamma + 2\eta \mathrm{arcth}(2y - 1)$ – (2) розподіл типу S_B (bounded - обмежений, найчастіше використовується для реальних даних);

в) $z = \gamma + \eta \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = \gamma + \eta \mathrm{arcth}(y)$ – розподіл типу S_U (unbounded - необмежений).

Вибір певного перетворення визначається показниками $\hat{\beta}1$, $\hat{\beta}2$, розрахованими за емпіричними даними або на основі сумарних моментів ($\hat{\beta}1$ – квадрат нормованого показника асиметрії, $\hat{\beta}2$ – нормований показник гостровершинності).

Зручність розглядуваних розподілів як апроксимуючих моделей для емпіричних даних в тому, що при їх незначній кількості вони дозволяють апроксимувати розподіли з різноманітними показниками асиметрії та ексцесу за допомогою введення оберненого до нормального розподілу.

Суть оцінювання параметрів розподілу методом моментів полягає у прирівнюванні виразів моментів розподілу як функцій їх параметрів до вибіркових значень відповідних моментів. Розв'язок отриманої таким чином системи моментних рівнянь і буде моментними оцінками шуканих значень параметрів розподілу.

Метод моментів ґрунтується на використанні наступних числових характеристик випадкової величини x за відомої щільності розподілу: моменту першого порядку (математичного сподівання) μ, моменту другого порядку (дисперсії) σ^2, асиметрії sk (вираженої через момент третього порядку), ексцесу ex (вираженого через момент четвертого порядку).

Математично, суть методу моментів описується наступною системою рівнянь, яку отримують виходячи з визначення моментів:

$$\begin{cases} \int\limits_{\xi}^{\xi+\lambda} x\cdot f\left(x;\xi,\lambda,\eta,\gamma\right)=\hat{\mu}; \\ \int\limits_{\xi}^{\xi+\lambda} \left(x-m_x\right)^2\cdot f\left(x;\xi,\lambda,\eta,\gamma\right)=\hat{\sigma}^2; \\ \int\limits_{\xi}^{\xi+\lambda} \left(x-m_x\right)^3\cdot f\left(x;\xi,\lambda,\eta,\gamma\right)=\hat{s}k; \\ \int\limits_{\xi}^{\xi+\lambda} \left(x-m_x\right)^4\cdot f\left(x;\xi,\lambda,\eta,\gamma\right)=\hat{e}x. \end{cases}$$

При характеризації стандартних зразків мають справу з усіченими симетричними розподілами з нульовим математичним сподіванням ($\hat{\mu}=0$), оскільки вважаємо, що всі систематичні впливи були скомпенсовані згідно стандартизованих методик. Межі інтегрування визначаються областю визначення функції від ξ до $\xi+\lambda$ [5].

Розв'язком цієї системи рівнянь є шукані значення η, γ, ξ, λ. Чисельні методи вирішення системи розглянуті в [6], вони передбачають використання ітераційних методів рішення, що досить складно реалізуються на практиці і передбачають індивідуальний підхід в залежності від різних початкових умов.

Загальна методика знаходження розширеної невизначеності на основі методу моментів

1. Для кожної складової, що характеризується своїм розподілом, визначають значення перших чотирьох моментів.

2. Згідно правил підсумовування моментів розраховують відповідні сумарні моменти.

3. Розраховують значення параметрів нормалізуючого перетворення Джонсона, використовуючи зв'язок між ними та відповідними моментами сумарного закону розподілу.

4. Для нормального розподілу визначають значення необхідних квантилів $z(\alpha/2)$.

5. На основі оберненої до нормалізуючого перетворення функції оцінюють квантилі емпіричного розподілу $x(\alpha/2)$, $x(1-\alpha/2)$ на основі яких розраховують розширену невизначеність

$$U=\left(x\left(1-\alpha/2\right)-x\left(\alpha/2\right)\right)/2.$$

Оскільки реальні результати вимірювань представлені усіченими симетричними розподілами, для досліджуваних даних обирали тип розподілу S_B^s (симетричний S_B розподіл, $\gamma=0$). В роботі [4] представлені функціональні залежності між параметрами розподілів та моментами даних, що реалізують розв'язання приведеної системи при означених обмеженнях.

Оцінювання параметрів розподілу S_B^s методом моментів

1) за вибірковими значеннями показників асиметрії та ексцесу $\hat{\beta}1$, $\hat{\beta}2$ визначають параметр форми η : функціональна залежність $\eta(\beta_2)$ для симетричного розподілу з якої виведена моментна оцінка параметра наведено в [4]:

$$\eta(\hat{\beta}_2)\approx\begin{cases} \dfrac{\left(0,62\hat{\beta}_2-0,804\right)}{\left(3-\hat{\beta}_2\right)^{0,749}} & \text{ÿêù î } \hat{\beta}_2\geq 1,8; \\ 0,8\left(\hat{\beta}_2-1\right) & \text{ÿêù î } \hat{\beta}_2<1,8; \end{cases}$$

2) розраховують відповідне середнє My та дисперсію Dy як функції від γ та и η :

$$My=\mu_1\left(\gamma,\eta\right)=\exp\left(\frac{1}{2\eta^2}-\frac{\gamma}{\eta}\right)\left\{1,k\right\};$$

$$Dy=\mu_2=\exp\left(\frac{2}{\eta^2}-\frac{2\gamma}{\eta}\right)\left(\left\{2,k\right\}-\omega^{-1}\left\{1,k\right\}^2\right),$$

де $\omega=\exp(1/\eta^2)$, k – рівень кванти ля;

3) за вибірковими значеннями середнього $\overline{x}$ і дисперсії s^2 визначають параметри зсуву ξ та масштабу λ :

$$\lambda=\frac{s}{\sqrt{Dy}};\ \xi=\overline{x}-\frac{\lambda}{2}.$$

Оцінені за наведеною методикою параметри підставляють у вираз, який є оберненим до (2):

$$x_{\alpha/2}=\frac{\varepsilon+(\varepsilon+\lambda)\cdot e^{\left(\frac{z_{\alpha/2}-\gamma}{\eta}\right)}}{1+e^{\left(\frac{z_{\alpha/2}-\gamma}{\eta}\right)}} \qquad (3)$$

і розраховують шуканий квантиль заданого рівня.

Дослідження нормалізуючого перетворення Джонсона при оцінюванні розширеної невизначеності

При проведенні дослідження ставилися такі задачі:

1. Визначити точність оцінювання параметрів кривої Джонсона методом моментів та варіацію оцінок параметрів.

2. Визначити точність оцінювання квантилів при оцінюванні розширеної невизначеності запропонованим методом для генеральної підсукупності (імітації генеральної сукупності при експериментальних дослідженнях).

3. Дослідити залежність середньоквадратичного відхилення (с.к.в.) квантилів, оцінених по методу моментів від обсягу вибірки, коли перші чотири моменти складових сумарного закону розподілу і відповідні сумарні моменти розраховувалися по емпіричним даним для різних обсягів досліджуваних даних. Ця задача викликана обмеженнями при проведенні характеризації СЗ в реальних умовах.

При вирішенні першої задачі для експериментального дослідження з використанням статистичного моделювання методом Монте-Карло було згенеровано дані для генеральної підсукупності з розподілом S_B Джонсона. Обсяг генеральної підсукупності визначається згідно рекомендацій нормативних документів. Для забезпечення оцінки невизначеності з довірчим імовірністю P рекомендується брати обсяг $n = 10^4/1 - P$. Тобто, для $P = 0{,}95$ $n = 2\cdot 10^5$. Генерування даних проводилася за перетворенням (3), приведеним в [5], що дозволяє отримати випадкову величину y_{S_B} з розподілом S_B Джонсона та довільно задами параметрами розподілу, використовуючи нормований гауссівський закон розподілу z_n (3).

$$y_{S_B} = \frac{\xi + (\xi + \lambda)\exp\left(\dfrac{z_n - \gamma}{\delta}\right)}{1 + \exp\left(\dfrac{z_n - \gamma}{\delta}\right)}. \qquad (4)$$

Задані параметри розподілу S_B та їхні значення обраховані методом моментів за генеральною підсукупністю приведені в табл. 2.

Таблиця 2

Параметри розподілу S_B Джонсона

Спосіб отримання	γ	η	ε	λ
Задані	0,000	0,900	–2,300	4,500
Оцінені методом моментів	0,000	0,900	–2,302	4,514
С.к.в. параметрів	$<10^{-3}$	$<10^{-3}$	$<10^{-3}$	$<10^{-3}$

Параметри розподілу S_B, розраховані з використанням методу моментів мають незначні відхилення від заданих, їх середньоквадратичне відхилення менше за 10^{-3}, що дозволяє зробити висновок про можливість застосування методу моментів для оцінювання параметрів розподілу Джонсона.

Експериментальне дослідження відповідно до п.2, та 3 поставлених задач проводилося згідно запропонованої вище методики знаходження розширеної невизначеності на основі моментного методу розрахунку параметрів кривої Джонсона. Розглядалися наступні випадки складових сумарного закону розподілу невизначеності, що імітують типові ситуації на практиці:

а) комбінація гауссівського, рівномірного і трикутного законів розподілу (домінуючий рівномірний);

б) комбінація трьох рівномірних законів розподілу, один з яких домінуючий;

в) комбінація одного арксинусоїдального та двох з гауссівських (домінуючий арксинусоїдальний) законів розподілу, що призводить до двомодальності результуючого закону розподілу і розглядається як крайній випадок.

Етапи дослідження відповідно п.2 задач:

1. Розраховували перші чотири моменти кожної складової невизначеності відповідно до описаних в [4] співвідношень між моментами і параметрами розподілу. Моменти третього та четвертого порядків перераховувалися в залежності від наведених значень асиметрії та ексцесу. Параметри складових розподілів обиралися довільно зі збереженням співвідношення для домінуючого розподілу.

2. Для сумарного закону розподілу за правилами [7] розраховували перші чотири сумарні моменти.

3. На основі моментів сумарного розподілу розраховували параметри кривої $S_{\mathbf{B}}^{s}$, на основі яких за формулою (3) отримують шукані квантилі $x_{\alpha/2}$.

4. На основі генеральної підсукупності розраховували значення умовно істинних квантилів для випадків відповідно до п.1.

Між розрахованими відповідно до п.3 квантилями та умовно істинними значеннями квантилів обраховувалися значення відносної похибки δ. Результати розрахунків приведені в табл. 3.

Розраховані значення δ не перевищують 2% для граничного випадку двомодального закону розподілу.

Якщо порівняти значення відносної похибки для методу заміни результуючого закону гауссівським, приведені в [1] з відносною похибкою з табл.3, то моментний метод оцінювання квантилів для розрахунку розширеної невизначеності дає кращі результати. Так, відносна похибка для суми гауссівського, рівномірного та трикутного законів розподілу та суми трьох рівномірних законів розподілу приймає значення від 2,6% до 8,7%, для двомодального результуючого закону (сума арксинусоїдального та двох рівномірних законів) розподілу сумарної невизначеності – від 8% до 23%.

Таблиця 3

Значення похибок оцінок квантилів

Рівень квантиля	Умовно істинні значення квантилю	Обраховані значення квантилів	δ, %
випадок а)			
0,025	–3,451	–3,486	0,898
0,05	–3,058	–3,121	1,060
0,95	3,058	3,121	1,060
0,975	3,451	3,486	0,898
випадок б)			
0,025	–3,451	–3,487	1,032
0,05	–3,069	–3,103	1,108
0,95	3,069	3,103	1,108
0,975	3,451	3,487	1,032
випадок в)			
0,025	–5,483	–5,378	1,915
0,05	–5,143	–5,214	1,362
0,95	5,143	5,214	1,362
0,975	5,483	5,378	1,915

Отримані результати дозволяють зробити висновок про більшу точність методу моментів для обрахування квантилів розподілу за допомогою апроксимації кривими Джонсона. Проведені розрахунки проводились виключно для складових оцінених за типом В. Однак, метод моментів можна застосувати також для складових, оцінених за типом А, якщо за емпіричними даними розраховувати відповідні моменти (третя задача досліджень). Обґрунтуванням доцільності такого припущення є робота [2], в якій викладені стандартні похибки моментів і квантилів. Було відмічено, що оцінку потрібного параметру генеральної сукупності можна отримати по вибірці великого обсягу, яка розглядається як генеральна підсукупність. Установлено, що для вибірок обсягу n стандартна похибка є досить задовільною мірою точності, якщо виконуються вимоги асимптотичної нормальності вибіркового розподілу статистик і достатньо великого обсягу n генеральної підсукупності. Вирази для точних оцінок значень стандартних похибок запропоновано отримати на основі емпіричних значень.

Стандартна похибка l-го вибіркового квантиля з ймовірністю P обраховується за формулою:

$$\sigma_{x_l} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{nf_l^2}}, \tag{5}$$

де f_l^2 – ордината вихідного розподілу, що є частотою f_l одиничного інтервалу, який відповідає середньому значенню x_l, оскільки вона є найкращою оцінкою цієї ординати.

Формули для знаходження стандартних похибок моментів відповідно до [2] приведені в табл. 4

Таблиця 4

Стандартні похибки моментів

Перший (m_1)	$\sigma/\sqrt{n}$
Другий (m_2)	$\left(m_4 - m_2^2\right)/\sqrt{n}$
Третій (m_3)	$\dfrac{m_6 - m_3^2 - 6m_4m_2 + 9m_2^3}{\sqrt{n}}$
Четвертий (m_4)	$\dfrac{m_8 - m_4^2 - 8m_5m_3 + 16m_2m_3^2}{\sqrt{n}}$

Дослідження проводилося статистичним моделюванням методом Монте-Карло при різних обсягах вибірок, починаючи з 20 до 500 з кроком 10 значень для квантилів починаючи з рівня 0,025 до 0,975 з кроком 0,025.

Отримана площина розрахованих значень стандартних похибок за формулою (5) приведена на рис. 1.

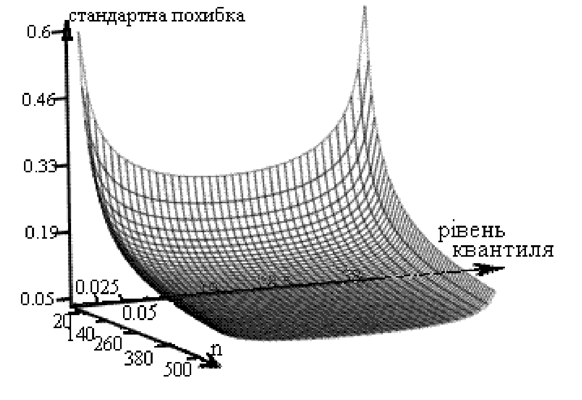

Рис. 1. Стандартні похибки квантилів

За отриманими даними можна зробити висновок, що стандартні похибки оцінок крайніх квантилів рівня 0,025 і 0,975 приймають значення 0,6, (великі помилки знаходження квантилів при малих обсягах даних), зменшуються при наближенні до центру розподілу (стандартна похибка рівна 0,33 для квантиля рівня 0,5) і наближаються до 0 при збільшенні обсягу даних).

За формулами з табл. 4 методом моментів було розраховано стандартні похибки оцінювання перших чотирьох моментів для обсягу вибірки від 10 до 500 з кроком 10. Результати приведені на рис. 2.

Значення похибки збільшується для кожного наступного моменту і асимптотично наближається до 0 при збільшенні обсягу. Стандартні похибки визначення перших трьох моментів не перебільшують стандартні похибки квантилів, а саме 0,6, однак похибка четвертого моменту в 3 рази більша.

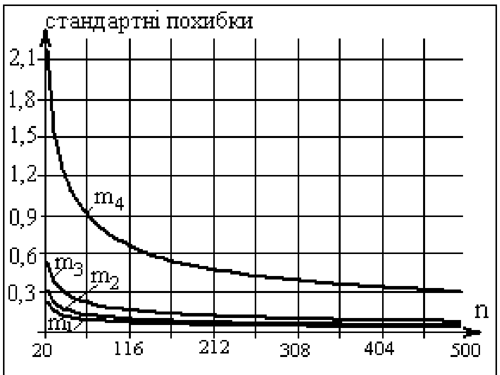

Рис. 2. Стандартні похибки моментів

Приведені результати не дозволяють зробити однозначний висновок про те, який метод оцінювання квантилів розподілу для знаходження розширеної невизначеності при обсягах вибірки від 20 до 500є оптимальним – метод моментів чи квантилів, розглянутий в [1]. При використанні методу моментів найбільший вклад нестиме похибки четвертого моменту, водночас для знаходження квантилів такого ж рівня значимості квантильним методом, коли за рекомендаціями, отриманими в попередніх пунктах цього розділу обиратимуть крайні квантилі, наприклад, рівня 0,025 та 0,975, сумарна похибка може виявитися більшою. Окрім того, при обсязі вибірки, яка менша за 100 значень виникають систематичні похибки від того, що один і той самий процентиль (емпіричний квантиль) відповідатиме декільком рівням квантиля, розташованим поруч. Так, квантилю рівня 0,025 може відповідати процентиль як рівня 0,025 та і рівня 0,05.

Дослідження з метою встановлення точності методу моментів на різних обсягах вибірки проводився наступним чином: для досліджуваних сумарних законів змінюючи обсяг від 20 до 500 значень, фіксувалися значення квантилів, оцінених методом моментів. Для кожного обсягу експеримент повторювався N = 10000 разів, що дозволило оцінити варіацію оцінок шуканих квантилів (прецизійність сертифікованого значення стандартного зразку). Результати оцінювання с.в.к. квантилів σ_k рівня 0,05 та 0,95, 0,025 та 0,975 приведені на рис. 3 . Результати на рисунках а, б, в, відповідають випадкам складових сумарного закону розподілу а, б, в, що описані вище.

Для квантилів, що розташовані ближче до кінців розподілу с.к.в. більше, водночас с.к.в. зменшується зі збільшенням обсягу вибірки.

Правильність сертифікованого значення стандартного зразку оцінювалась обрахунком відносної похибки як модуль між умовно дійсним значенням квантилю (розрахованим за генеральною підсукупністю) та отриманим методом моментів емпіричним квантилем (розрахованим як середнє арифметичне за масивів значень квантилів), для обсягу вибірки від 20 до 500 значень. Експеримент проводився N = 10000 разів, значення відносної похибки для кожного обсягу вибірки розраховувалося як усереднене значення. Результати, отримані для різних обсягів (від 20 до 500 значень) відрізнялися незначно, тому в табл. 5 приведене середнє значення відносної похибки з для випадку а, б та в розраховувалося як середнє значення між відносними похибками для різних обсягів по кожному випадку. Результати приведені в табл. 5.

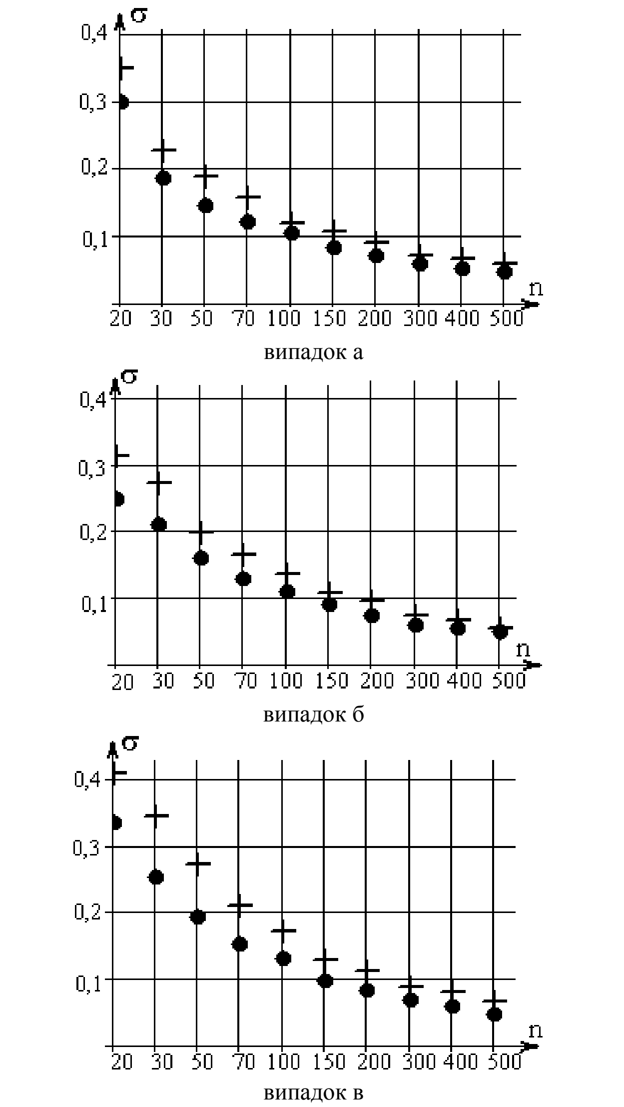

Рис. 3. Залежність с.к.в. оцінки квантиля від обсягу досліджуваних даних
• – с.к.в. оцінок квантилів рівня 0,05 та 0,95;
+ – с.к.в. оцінок квантилів рівня 0,025 та 0,975

Таблиця 5

Зміщення оцінки кванти ля, розрахованого методом моментів

Рівень квантиля	Сумарний закон розподілу невизначеності		
	випадок а)	випадок б)	випадок в)
0,025 та 0,975	2,09%	1,21%	2,11%
0,05 та 0,95	0,85%	0,41%	1,17%

Максимальне значення відносної похибки зміщення не перевищує 2,11%, в той же час значення відносної похибки методу заміни результуючого закону гауссівським знаходиться в межах від 2,3% для суми гаусівського, рівномірного та трикутного законів розподілу (випадок а) до 42% для суми двох рівномірних та арксинусоїадального законів розподілу.

Отже, отримані характеристики точності оцінювання похибки атестації стандартних зразків методом моментів прецизійність (середньоквадратичне відхилення) та правильність (зміщення) дозволяють рекомендувати розглядуваний метод у вимірювальних та випробувальних лабораторіях для характеризації стандартних зразків.

Висновки

1. Вирішення задачі характеризації стандартних зразків потребує використання методів, що дозволяють оцінити розширену невизначеність з максимальною точністю. Проведений порівняльний аналіз найбільш розповсюджених методів оцінювання невизначеності за типом В показав існуючі труднощі їх використання і водночас відсутність їх основних недоліків у метода обрахунку розширеної невизначеності з використанням перетворення Джонсона.

2. Запропоновано методику оцінювання розширеної невизначеності при характеризації СЗ, яка базується на оцінюванні квантилів закону розподілу сумарної невизначеності шляхом використанні нормалізуючого перетворення Джонсона.

3. Досліджено точність запропонованої методики знаходження квантилів.

4. Досліджено метод моментів при оцінюванні параметрів нормалізуючого перетворення Джонсона. Показана його простота та точність.

5.Досліджено та обгрунтовано можливість використання методу моментів при оцінюванні параметрів розподілу Джонсона для оцінювання складових за типом А, а також залежність показників точності (правильності та прецизійності оцінок квантилів від обсягу досліджуваних даних.

Приведені результати дозволяють зробити висновок про придатність методу моментів для визначення параметрів розподілу Джонсона, рекомендувати моментий метод нормалізації для оцінювання розширеної невизначеності стандартних зразків, якщо складові оцінені як за типом В так і за типом А, а також рекомендувати застосовувати розглядуваний метод при побудові універсальних систем оцінювання розширеної невизначеності, що дозволить автоматизувати опрацювання результатів вимірювальних (випробувальних) лабораторій та зменшити похибки характеризації СЗ.

Список літератури

1. Метод оціннювання розширеної невизначенності результатів вимірювань за допомогою перетворення Джонсона / О.В. Самойліченко, В.С. Єременко, В.М. Мокійчук, Ж.О. Павленко // Вісник НТУ України «КПІ». Серія Приладобудування. – 2009. – № 38 – С.93-101.

2. Кендалл М. Теория распределений / М. Кендалл, А. Стюарт. – М.: Наука, 1966. – 587 с.

3. Єременко В.С. Алгоритм генерації псевдовипадкових послідовностей з довільно заданим законом розподілу / В.С. Єременко, В.М Мокійчук, О.В. Самойліченко // Вісник НАУ. – 2005. – № 4 (26) – С. 24-26.

4. Бостанджиян В.А. Распределения Джонсона. Оценивание их параметров / В.А. Бостанджиян. – Черноголовка: ИПХФ РАН, 2004. – 124 с.

5. Хан Г. Статистические модели в инжинерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро. – М.: Мир, 1969. – 395 с.

6. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

7. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф.– Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.

Надійшла до редколегії 28.04.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.В. Куц, Національний авіаційний університет, Київ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖОНСОНА ДЛЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАНДАРТНЫХ ОБРАЗЦОВ

В.С. Еременко, В.М. Мокийчук, О.В. Самойличенко

Предложен метод повышения точности оценивания расширенной неопределенности сертифицированных значений характеристик как одной их основных метрологических характеристик стандартных образцов. Метод основан на преобразовании Джонсона закона распределения расширенной неопределенности. Исследована точность оценивания квантилей расширенной неопределенности для составляющих, оцененных как по типу А, так и по типу В при определении параметров кривой Джонсона методом моментов. Показана возможность использования предложенного метода для повышения точности расчета расширенной неопределенности.

Ключевые слова: *стандартный образец, характеризация, неопределенность, преобразование Джонсона, момент, квантиль.*

JOHNSON TRANSFORMATION RESEARCHES TO INCREASE A REFERENCE MATERIALS METROLOGICAL CHARACTERISTICS ACCURACY

V.S. Yeremenko, V.M. Mokiychuk, O.V. Samoylichenko

The method of accuracy improvement of certified values characteristics extended uncertainty estimation as main part of basic metrology characteristics of standard sample has given. The method is based on Johnson transformation of an expanded uncertainty distribution low. A quantiles accuracy estimation for uncertainty components estimated as type A as B ware investigated. The parameters of Johnson curves ware estimated by the moment's method. The given method availability for increasing material expanded uncertainty estimation was shown.

Keywords: *reference material, characterization, uncertainty, Johnson transformation, moment, quantile.*