УДК 531.19

Ю.П. Мачехин

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

В настоящей работе получила дальнейшее развитие теория измерений для обеспечения корректности анализа результатов измерений в нелинейных динамических системах. Изучены принципиально новые условия измерительной задачи, связанные с особенностями поведения нелинейных динамических систем. Показано, что между качественной теорией дифференциальных уравнений и методами оценки неопределенности измерений существует связь, которая обеспечивает оценку условий выполнения измерений.

Ключевые слова: *неопределенность, устойчивость динамической системы, динамический хаос.*

Введение

Реалии современного развития науки, технологий, медицины, экономики и многих других направлений общественного развития, требуют применения различных измерительных процессов и методов анализа результатов измерений, как основного способа получения объективной информации. Как правило, используемые методы анализа результатов измерений базируются на, проверенных на практике, физических моделях. В основе этих моделей лежат два условия: во-первых, измеряемая величина должна иметь единственное значение [1], во-вторых, все случайные процессы, влияющие на результаты измерений, представляют собой эргодические процессы. Условие единственности значения измеряемой величины связано с условием стабильного и устойчивого состояния исследуемой системы, значения параметров которой известны с установленной неопределенностью. Чем лучше поставлен измерительный эксперимент, т.е. чем меньше неопределенность параметров в используемом уравнении измерений, тем меньше должна быть величина неопределенности результата измерений. Таким образом, в существующей теории измерений, заложен принцип классического детерминизма – точность начальных условий определяет точность знания характеристик динамической системы. Следовательно, применение принципа классического, лапласовского детерминизма в метрологии является базовым условием при установлении неопределенности результатов измерений.

До последнего времени, теория измерений формировалась на основе задач по измерению таких физических величин как длина, время, частота, масса и т.д. Большинство практических случаев, в которых выполняются измерения этих величин, относятся к исследованию либо линейных, либо нелинейных систем, но находящихся в устойчивом состоянии. Если постановка измерительной задачи ставится значительно шире, чем предусмотрено современной теорией измерений, то необходимо развивать, модернизировать теоретические основы измерений. Примером нетривиальной постановки измерительной задачи является задача измерения здоровья человека. На конференции IMEKO по теории измерений (Анси, Франция, 2008 г.) проф. Людвиг Финкельштейн предложил рассмотреть возможность решения такой задачи. Ясно, что предложенная постановка измерительной задачи, выходит за рамки существующей теоретической базы, в связи с чем, необходимо понять, каким образом требуется модифицировать основные принципы существующей теории измерений.

Поскольку в соответствии с основным постулатом теории измерений под измерением подразумевается сравнение значения измеряемой величины с ее эталонным значением, то в тех случаях, когда о самой измеряемой величине можно говорить только условно, процесс измерения представляется более сложной процедурой, чем просто сравнение с эталонной величиной. Если единичное измерение, выполняемое с использованием средств измерений, представляет собой процесс, описываемый существующей теорией измерений, то трактовка и описание заданного числа измерений зависит от многих дополнительных условий. И в первую очередь к таким условиям относятся свойства динамических объектов наблюдения, которые характеризуются сложной нелинейной динамикой поведения во времени. Для развития теории измерений, применимой в динамических системах со сложным непредсказуемым характером поведения, например, в биологических, экономических, финансовых и других аналогичных системах, необходимо разработать такие принципы анализа результатов измерений, которые позволяли бы количественно оценивать состояние этих систем.

В этой связи, в настоящей работе получила дальнейшее развитие теория измерений, создаваемая в последнее время [2 – 5] для обеспечения корректности анализа результатов измерений в нелинейных динамических системах. Изучены принципиально новые условия измерительной задачи, связанные с особенностями поведения нелинейных динамических систем. Показано, что между качественной теорией дифференциальных уравнений и методами оценки неопределенности измерений существует связь, которая обеспечивает оценку условий выполнения измерений.

Анализ основ теории измерений

Важное свойство динамических систем, на котором основана теория измерений, заключается в том, что поведение во времени этих систем, хорошо описываемое как строгими решениями дифференциальных уравнений, так и качественными методами теории дифференциальных уравнений, имеет устойчивые стационарные режимы.

Для описания динамических систем, как правило, используются системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} X = f(X, Y_1, Y_2 .... Y_N) . \qquad (1)$$

Условие стационарного состояния динамической системы описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} X = 0, \qquad (2)$$

или уравнением

$$f(X, Y_1, Y_2 .... Y_N) = 0. \qquad (3)$$

Это же уравнение, переписанное в более простом виде, анализируется Руководстве по неопределенности [1], и представляет собой уравнение измерений

$$X = f(Y_1, Y_2 .... Y_N) . \qquad (4)$$

Когда измеряемая величина X определяется в результате косвенных измерений, т.е. определяется по результатам измерений величин $Y_1, Y_2, ... Y_K$, то измерительный процесс можно условно описать следующим математическим выражением:

$$X = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^{(m)}(Y_i^{(m)}) , \qquad (5)$$

где $Y_i^{(m)}$ – результат i-го наблюдения при m – начальном условии.

Условие $m \to \infty$ предполагает последовательное уточнение начальных условий выполнения измерений. Каждое последовательное уточнение начальных условий измерительного эксперимента приводит к уменьшению неопределенности значений параметров, характеризующих исследуемую систему, и, как следствие, к уменьшению неопределенности измеряемой величины X. Примером тому может стать последовательное улучшение условий термостатирования, от которых зависит стабильность измеряемой величины.

В реальном физическом эксперименте определить математический предел, который характеризует результат измерений невозможно, хотя бы в силу конечности времени, отведенного на выполнение измерений. Поэтому, по результатам косвенных измерений, даже очень многочисленным, определяется значение исследуемой величины, которое в пределах установленной неопределенности рассматривается как действительное значение искомой величины. Начальные условия для любой физической детерминированной системы устанавливаются с малой, но всегда конечной неопределенностью. Т.е индекс m, формально указывающий на точность задания начальных условий, всегда имеет конечное значение. Иначе, этому условию соответствуют постановки физических задач в рамках классической механики, когда начальные условия заданы в виде интервалов возможных значений исходных величин. Другая форма представления начальных условий в постановке измерительных задач заключается в использовании вероятностной формы описания начального состояния объектов измерений, а также результатов измерительного процесса.

Математическое описание эргодичности случайного процесса может основываться на разных характеристиках, однако основная из них, представляющая интерес для теории измерений – это эквивалентность усреднения во времени случайного процесса и усреднения по ансамблю всех возможных состояний, реализуемых случайным процессом при времени наблюдения за системой $t \to \infty$.

Для метрологии эргодичность случайных вариаций измеренных значений физической величины является наиболее удовлетворительным, если не единственным обоснованием одновременного применения, как временного усреднения, так и усреднения по вероятностному закону распределения возможных состояний. Это значит, что если среднее во времени функции $X(t)$ определяется как

$$\overline{X} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n\tau) , \qquad (6)$$

где N – количество наблюдений; τ – время между наблюдениями, а среднее по ансамблю возможных реализаций

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X P(X) dX , \qquad (7)$$

где $P(X)$ – плотность вероятности, то эргодичность процесса X означает, что существует решение у эргодического уравнения

$$\langle X \rangle = \overline{X} . \qquad (8)$$

Строгое решение уравнения (8) представляет собой единственное значение величины X, которое можно считать искомым значением измеряемой величины. Однако, в реальных условиях измерительного эксперимента, всегда существуют конечные пределы суммирования и интегрирования. Поэтому, как только введены ограничения на пределы сумм и интегрирования, сразу возникает ситуация, при которой уравнению (8) могут удовлетворять числовые значения измеряемой физической величины из конечной области значений. В результате решением уравнения (8) является некоторое значение (действительное) измеряемой величины, устанавливаемое с некоторой неопределенностью. Принципиально важным в данном случае является то, что в процессе измерений устанавливается значение физической величины, соответствующее устойчивому или равновесному состоянию исследуемой системы.

Очевидность того факта, что результаты измерений в динамической системе, находящейся в условиях развития устойчивых режимов, характеризующихся как динамический хаос, будут иметь самостоятельную интерпретацию, пока не воспринимается как одна из основных проблем выполнения корректных измерений в динамических системах. В экономике, медицине, биологии и многих других областях физики и химии, связанных исключительно с нелинейными динамическими системами, до настоящего времени не существует корректной теории измерений, построенной на строгих (с математической точки зрения) и корректных с физической точки зрения моделей.

Основы математического метода

Предполагаем, что динамическая система, параметры которой будут измеряться, описывается n – мерным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} X = f(X), \tag{8}$$

где $X = (X_1, X_2 ... X_n)$, $f = (f_1, f_2 ... f_n)$.

Качественная теория дифференциальных уравнений позволяет изучать их решения в фазовом пространстве, т.е. в некотором математическом многомерном пространстве, в качестве координат которого рассматриваются переменные системы уравнений. Если рассматриваются многомерные динамические системы, то, основываясь на качественной теории дифференциальных уравнений, исследуются особенности структуры разбиения фазового пространства. Эта качественная теория, как математическая основа теории нелинейных динамических систем, включает в себя изучение установившихся движений и их бифуркаций, установление областей притяжения установившихся движений. Качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости позволяет выделить четыре особые точки на фазовой плоскости: устойчивый или неустойчивый фокус (1, a; 1, b); устойчивый и неустойчивый узел (1, c; 1, d); седло (2, a) и окрестность обыкновенной точки (2, b). Кроме особых точек существуют устойчивые и неустойчивые периодические движения.

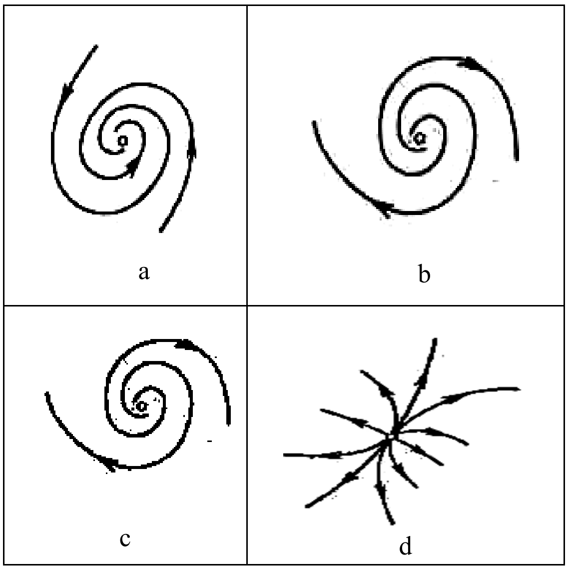

Рис. 1:
a – устойчивый фокус; b – неустойчивый фокус;
c – устойчивый узел; d – неустойчивый узел

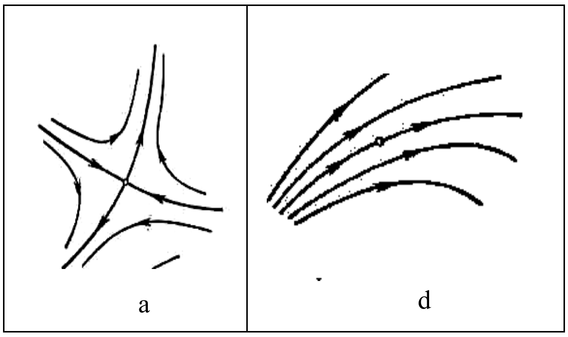

Рис. 2:
a – неустойчивый фокус;
b – неустойчивый узел

Реальным, физически существующим состояниям динамической системы, соответствуют только устойчивые особые точки. Иначе, только при тех параметрах, которым соответствуют состояния 1, a и 1, c движение динамической системы, приводит к устойчивым состояниям. Устойчивое состояние имеет область притяжения, таким образом, что если система за счет внешнего воздействия покидает устойчивое состояние, то за конечное время она возвращается обратно в устойчивое состояние. Скорость возврата зависит от показателей Ляпунова, которые можно рассчитать для каждой динамической системы. Математически, устойчивые состояния равновесия: узел или фокус, определяются по корням характеристического уравнения [6]. Таким образом, только в тех состояниях, для которых существуют отрицательные реальные части корней характеристического уравнения, в динамических системах может быть реализована задача измерений. Поскольку под воздействием флуктуаций (как правило, эргодических) устойчивое состояние во времени «размазывается» на некоторую область в фазовом пространстве, то результаты измерений, выполняемые во временной последовательности, будут принадлежать этой области и уже в размазанной области найти саму устойчивую точку невозможно. Статистический разброс зарегистрированных параметров вблизи устойчивого состояния, формирует неопределенность измерения типа А. Неопределенность типа В связана со случайной величиной сдвига положения точки устойчивости.

Используя качественную теорию описания решений систем дифференциальных уравнений для описания условий измерений, следует учесть, что фазовое пространство может быть не только двумерным, но и трехмерным и более. В том случае, когда размерность исследуемой динамической системы больше двух, то устойчивые состояния могут представлять собой не только особые устойчивые точки (в пространстве), но и устойчивые, притягивающие области. Некоторые из таких областей в современной математике и физике получили название странные аттракторы (strange attractor). По аналогии с устойчивыми, притягивающими особыми точками (attractor), эти области также являются притягивающими. Их особенность заключается в том, что поведение решения системы дифференциальных уравнений ведет себя в фазовом пространстве сложным нерегулярным образом (рис. 3).

Рис. 3. Поведение решения в фазовом пространстве при наличии странных аттракторах

С другой стороны, в существующей теории измерений нет ограничений на размерность исследуемой динамической системы. Именно измерения в трехмерном фазовом пространстве представляют интерес, когда вопрос касается исследования таких динамических систем как биологические, медицинские и экономические. Поэтому, в тех случаях, когда динамические системы описываются в фазовых пространствах размерности больше двух, измерения в них также должны характеризовать устойчивую притягивающую точку или притягивающее множество. Поскольку в динамических системах существует возможность реализации состояния, характеризующего устойчивое притягивающее множество, то результат измерений будет характеризоваться характеристиками этого притягивающего множества.

Особенность поведения динамических систем в этом случае заключается в том, что траектория, по которой динамическая система движется в фазовом пространстве, никогда не пересекается сама с собой и находится в замкнутой области фазового пространства. Поэтому она запутывается и ведет себя сложным нерегулярным образом.

Сечение Пуанкаре странного аттрактора выглядит так, как это показано на рис. 4.

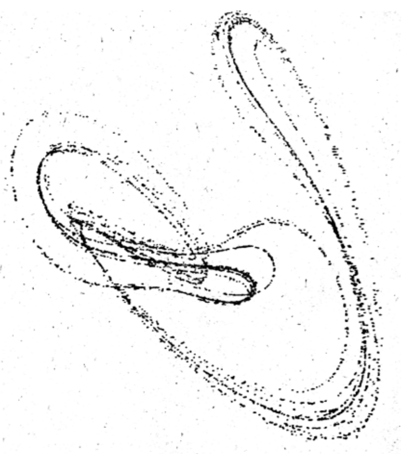

Рис. 4. Сечение Пуанкаре странного аттрактора

Если предположить, что каждое измерение выполняется в тот момент, когда траектория динамической системы пересекает некую выбранную плоскость, а результаты измерений будут наноситься на эту плоскость, то в зависимости от характера поведения динамической системы результаты измерений могут размещаться в определенной области конечных размеров. Таким образом, если последовательно выполнены n измерений, то полученные n различных значений измеряемой физической величины будут случайным образом отличаться друг от друга, но при этом все они соответствуют состоянию динамической системы.

Поскольку в общем случае эргодичность случайного движения динамической системы не доказана, то использовать методы усреднения некорректно. Проблема оценки действительного значения измеряемой величины в этом случае заключается в том, что все результаты измерений характеризуют реальное состояние, которое случайным образом изменяется во времени. Единственное, что можно в этом случае считать корректным – это определение размера области в сечении Пуанкаре, в пределах которого меняется состояние системы. Как бы точно не были выполнены единичные измерения, разброс результатов измерений будет характеризоваться динамикой поведения самой системы. Поэтому оценка неопределенности результата измерений будет определяться не величиной и характером внешних, случайных возмущений, а динамикой поведения исследуемой системы.

Заключение

Возвращаясь к задаче измерения здоровья можно сделать следующий вывод. Если параметры состояния человека, характеризующие его здоровье (артериальное давление, пульс, состав крови и т.д.) описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, то та область значений этих параметров, которые соответствуют устойчивому состоянию, можно считать, характеризует здоровое состояние человека. Как интерпретировать результаты измерений в том случае, когда наблюдается разброс, связанный с динамическим хаосом, без медиков нельзя. Не вдаваясь в особенности реализации стохастического динамического режима в каждом конкретном случае, его влияние на результаты измерений сводятся к тому, что область случайных изменений имеет конечный размер. Этот размер, обусловленный поведением самой динамической системы, может быть больше или меньше размера случайного возмущения, обусловленного воздействием внешними флуктуациями.

Список литературы

1. BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, 1995 Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd edn., ISBN 92-67-10188-9.

2. Machekhin Yu.P. Time series fractal dimension analisys in the problem of measurement results treatment XIII IMEKO Wold congress. – 1994. – Torino, Italy "From mesurement to innovation".

3. Machekhin Yu.P. Effects of chaotic dynamic-system behavior on measurement uncertainty Measurement Techniques. – Springer New York, 51, N1, 2008. – P. 6-10.

4. Machekhin Yu.P. Uncertainty measurement and dynamic system chaotical behaviour / Yu.P. Machekhin // 12th IMECO TC1&TC7 Joint Symposium on Man Science & Measurement September, 3-5, 2008, Annecy, France.

5. Machekhin Yu.P. Fractal scale for time series of the results of measurements Measurement Techniques Volume 52, № 8, 2009. – P. 835-838.

6. Бутенин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1987. – 383 с.

Поступила в редколлегию 2.04.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

МОДИФІКАЦІЯ ТЕОРІЇ ВИМІРЮВАННЯ

Ю.П. Мачехін

У даній роботі отримала подальший розвиток теорія вимірювань для забезпечення коректності аналізу результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах. Вивчено принципово нові умови вимірювального завдання, пов'язані з особливостями поведінки нелінійних динамічних систем. Показано, що між якісною теорією диференціальних рівнянь і методами оцінки невизначеності вимірювань існує зв'язок, який забезпечує оцінку умов виконання вимірювань.

***Ключові слова**: невизначеність, стійкість динамічної системи, динамічний хаос.*

MODIFICATION OF MEASUREMENT THEORY

Yu.P. Machekhin

In the present work was further developed the theory of measurement, to ensure the correctness of the analysis of measurement results in nonlinear dynamic systems. We studied the radically new conditions of measuring task associated with the peculiarities of the behavior of nonlinear dynamic systems. It is shown that between qualitative theory of differential equations and methods of evaluation of measurement uncertainty there is a link that provides an assessment of the conditions of measurement.

***Keywords**: uncertainty, stability of dynamic system, dynamic chaos.*