УДК 681.3.042

В.М. Рудницький[1], І.М. Федотова-Півень[1], С.В. Бєсєдіна[2]

[1] *Черкаський державний технологічний університет, Черкаси*
[2] *Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси*

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПАРАЛЕЛЬНОГО ДОДАВАННЯ ЧОТИРЬОХ І МЕНШЕ ДОДАНКІВ В НАДЛИШКОВИХ СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ

В статті розглянуто доведення правил одночасного виконання кількох $k \subset (2; 3; 4)$ операцій додавання в рекурентних системах числення для різних початкових значень і побудова кодів цифр в явному виді з використанням структурно-блокових кодів.

Ключові слова: *паралельне додавання, надлишковість, структурно-блокові коди, рекурентні системи числення.*

Вступ

Постановка проблеми. Збільшення швидкодії, надійності засобів обчислень і достовірності результатів обчислень є важливою задачею обчислювальної техніки. Рішення цих задач передбачає використання структурної й інформаційної надлишковості, а також систем числення (СЧ), в яких з самого початку можлива надлишковість представлення кодів чисел.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомо [1], що можливо створення комбінаційного суматора для швидкого паралельного додавання багаторозрядних двійкових чисел за рахунок одночасного додавання трьох чисел, представлених в двійковій надлишковій мінімальній системі числення.

В роботі [2] було визначено рекурентні системи числення, в яких можливе одночасне додавання до 4-х та 5-ти чисел включно, що дає можливість підвищити швидкодію арифметичних пристроїв. Але правила одночасного додавання в структурно-блокових кодах (СБК) для цих СЧ не доведені і коди цифр в явному виді не отримані.

Мета статті – довести правила одночасного виконання кількох $k \subset (2;\ 3;\ 4)$ операцій додавання в системах числення, заданих рекурентною послідовністю з різними наборами початкових значень (ПЗ) і побудувати коди цифр в явному виді з використанням СБК для визначення оптимальних СЧ.

Виклад основного матеріалу

При проведенні дослідження обмежимося системами числення [2], що утворені рекурентною послідовністю:

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-3} - B_{n-4}, \qquad (1)$$

і ПЗ: 1) 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8; 2) 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6; 3) 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9, для яких виконуються такі правила додавання:

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0; \\ B_n + 0 = B_n; \\ 2B_n = B_{n+1} + B_{n-1}; \\ 3B_n = B_{n+1} + B_n + B_{n-1}; \\ 4B_n = B_{n+2} + B_{n+1} + B_{n-1} + B_{n-2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Правила (2) в цих СЧ дозволяють виконувати одночасне додавання кількох $k \subset (2;\ 3;\ 4)$ чисел.

Побудуємо системи числення і коди цифр в явному виді та доведемо отримані правила додавання.

Побудова кожної СЧ здійснюється за двома характеристиками: а) максимальна несиметрія нулів і одиниць в коді цифр; б) простота виконання правил додавання.

Визначимо для рекурентної системи числення (1) з ПЗ 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8, тобто $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 2$, $B_4 = 4$, $B_5 = 6$, $B_6 = 8$, і правилами додавання (2) кількість способів кодування чисел:

$$K_n = \prod_{i=1}^{16} k_i, \qquad (3)$$

де k_i – число кодових варіантів кожного цілого числа від 0 до 16; n = 0, 1, 2, …, 16, а саме: $K_n = 1_0\ 2_1\ 3_2\ 4_3\ 4_4\ 4_5\ 5_6\ 6_7\ 7_8\ 8_9\ 9_{10}\ 10_{11}\ 12_{12}\ 14_{13}\ 16_{14}\ 18_{15}\ 19_{16} =$ 833 985 331 200.

Розглянемо два граничні варіанти кодування за кількістю розрядів: 1) з максимальною кількістю розрядів; 2) з мінімальною кількістю розрядів для системи числення (1) (табл. 1). У табл. 1 представлено граничні варіанти кодування за кількістю розрядів перших 16-ти чисел в СЧ, утворених рекурентною послідовністю (1) з ПЗ: 1) 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8; 2) 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6; 3) 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9, де max, min, max1, min1, max2, min2 – максимальна і мінімальна кількість розрядів першого, другого та третього варіантів кодування з ПЗ відповідно.

Проаналізуємо варіанти кодування перших 16-ти чисел в трьох різних заданих системах числення (табл. 2).

© В.М. Рудницький, І.М. Федотова-Півень, С.В. Бєсєдіна

Таблиця 1

Граничні варіанти кодування з максимальною та мінімальною кількістю розрядів

Число	max	min	max1	min1	max2	min2
0	1	1	1	1	1	1
1	2	1	2	1	2	1
2	4	2	2	2	2	2
3	4	3	4	3	4	3
4	5	3	5	3	5	3
5	5	4	6	3	5	3
6	6	4	7	4	5	4
7	6	5	8	4	6	4
8	7	5	9	4	6	4
9	7	5	10	5	7	5
10	8	5	11	5	7	5
11	8	6	12	5	8	5
12	9	6	13	5	8	5
13	9	6	14	6	9	5
14	10	6	15	6	9	6
15	10	6	16	6	10	6
16	11	6	17	6	10	6

Таблиця 2

Варіанти кодування

СЧ	$B_n=B_{n-1}+B_{n-3}-B_{n-4}$	$B_n=B_{n-1}+B_{n-3}-B_{n-4}$	$B_n=B_{n-1}+B_{n-3}-B_{n-4}$
ПЗ	1, 1, 2, 2, 4, 6, 8	1, 1, 3, 3, 4, 5, 6	1, 1, 3, 3, 5, 7, 9
Число	Код	Код	Код
0	00000	00000	00000
1	00001	00001	00001
2	01000	00011	00011
3	01001	01000	01000
4	10000	10000	01001
5	10001	10001	10000
6	100000	100001	10001
7	100001	1000001	100000
8	1000000	10000001	100001
9	1000001	100000001	1000000
10	10000000	1000000001	1000001
11	10000001	10000000001	10000000
12	100000000	100000000001	10000001
13	100000001	1000000000001	100000000
14	1000000000	10000000000001	100000001
15	1000000001	100000000000001	1000000000
16	10000000000	1000000000000001	1000000001

Система числення, яка задається рекурентною послідовністю (1) з початковими значеннями: 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6 і правилами додавання (2), має $K_n = 1_0\ 2_1\ 1_2\ 2_3\ 5_4\ 5_5\ 5_6\ 8_7\ 10_8\ 12_9\ 14_{10}\ 19_{11}\ 25_{12}\ 29_{13}\ 36_{14}\ 43_{15}\ 52_{16}$ = 7 451 353 728 000 000.

Система числення, яка задається рекурентною послідовністю (1) з початковими значеннями: 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9 і правилами додавання (2) має $K_n = 1_0\ 2_1\ 1_2\ 2_3\ 4_4\ 3_5\ 3_6\ 4_7\ 5_8\ 6_9\ 6_{10}\ 7_{11}\ 9_{12}\ 10_{13}\ 10_{14}\ 12_{15}\ 15_{16}$ = 117 573 120 000.

Отже, з аналізу наведених способів кодування, максимальної та мінімальної кількості розрядів перших 16-ти чисел, кодів цифр в явному виді в СЧ, утворених рекурентною послідовністю (1) з ПЗ: 1) 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8; 2) 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6; 3) 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9; слідує, що мінімальну надлишковість має СЧ на основі рекурентної послідовності (1) з ПЗ третього варіанту: 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9; СЧ на основі рекурентної послідовності (1) з ПЗ першого варіанту: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8, має надлишковість більшу за надлишковість попередньої СЧ, а СЧ на основі рекурентної послідовності (1) з ПЗ другого варіанту: 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, має максимальне значення надлишковості.

Для доведення правил (2) подамо отриману рекурентну послідовність третього порядку в загальному вигляді [3]:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-3} - u_{n-4}, \quad (4)$$

і доведемо наступні дві леми по аналогії з доведенням, наведеним в [4, 6 – 7].

Лема 1. Якщо V є рішенням рівняння (4), а c – довільне число, то послідовність $c \cdot V$ (тобто послідовність $c \cdot v_1, c \cdot v_2, c \cdot v_3, \ldots$) теж є рішенням рівняння (4).

Доведення: помножимо рекурентне співвідношення $v_n = v_{n-1} + v_{n-3} - v_{n-4}$ почленно на c і отримаємо $c \cdot v_n = c \cdot v_{n-1} + c \cdot v_{n-3} - c \cdot v_{n-4}$, що і потрібно було довести.

Лема 2. Якщо V^* і V^{**} є рішеннями рівняння (4), то і їх сума $V^* + V^{**}$, тобто послідовність $v_1^* + v_1^{**}, v_2^* + v_2^{**}, v_3^* + v_3^{**}, \ldots$, теж є рішенням рівняння (4).

Доведення: Згідно умови маємо $v_n^* = v_{n-1}^* + v_{n-3}^* - v_{n-4}^*$, $v_n^{**} = v_{n-1}^{**} + v_{n-3}^{**} - v_{n-4}^{**}$.

Почленне додавання цих двох рівностей дасть:
$v_n^* + v_n^{**} = (v_{n-1}^* + v_{n-1}^{**}) + (v_{n-3}^* + v_{n-3}^{**}) - (v_{n-4}^* + v_{n-4}^{**})$.
Цим лему доведено.

Доведемо правила (2) для СЧ, заданої рекурентною послідовністю (1) і початковими значеннями першого варіанту: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8. Перші два правила очевидні і доведення не потребують. Доведемо 3-є правило з (2):

$$2B_n = B_{n+1} + B_{n-1}.$$

Доведення: Оскільки різниця між останніми чотирма сусідніми ПЗ, необхідними для генерації всіх чисел даної СЧ, стала рівною двом, то

$$B_{n-1} - B_{n-2} = B_n - B_{n-1} = B_{n+1} - B_n = B_{n+2} - B_{n+1} = 2. \quad (5)$$

Отже, обчислення за формулою (1) дадуть той же результат, що і за формулою $B_n = B_{n-1} + 2$ для $n \geq 5$. Тоді:

$$2B_n = 2B_{n-1} + 4. \quad (6)$$

Оскільки $B_{n+1} - B_n = 2$, то виконується рівність $2B_n = 2B_{n-1} + 2(B_{n-1} - B_n)$.

Отже, $2B_n = 2B_{n-1} + 2B_{n+1} - 2B_n$. За лемою 1 при c = 2, отримаємо $B_n = B_{n-1} + B_{n+1} - B_n$. Або $2B_n = B_{n-1} + B_{n+1}$. Отже, третє правило з (2) доведено.

4-те правило з (2) отримуємо з другого додаванням B_n до обох частин: $3B_n = B_{n+1} + B_{n-1} + B_n$.

Доведемо 5-пе правило з (2):

$$4B_n = B_{n+2} + B_{n-2} + B_{n+1} + B_{n-1}.$$

Доведення: Оскільки $2B_n = B_{n+1} + B_{n-1}$ вже доведено, для доведення 5-го правила досить довести $2B_n = B_{n+2} + B_{n-2}$. Це слідує з леми 2. Отже, $B_n = B_{n+2} + B_{n-2} - B_n$.

Оскільки $B_n - B_{n-1} = B_{n-1} - B_{n-2} = 2$, то:

$$B_n - B_{n-2} = 4. \quad (7)$$

Тому, $B_n = B_{n+2} - 4$, або:

$$B_{n+2} - B_n = 4. \quad (8)$$

Остання рівність вірна, оскільки

$$B_{n+2} - B_{n+1} = B_{n+1} - B_n = 2.$$

Цим систему правил додавання (2) для СЧ (1) з ПЗ: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8, доведено.

Для СЧ (1) з ПЗ: 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, доведення правил додавання (2) аналогічне доведенню для СЧ (1) з ПЗ першого варіанту: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8, з такими поправками: рівняння (5) дорівнює 1, останній доданок в (6), (7), (8) дорівнює 2.

Для СЧ (1) з ПЗ третього варіанту: 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9, доведення правил додавання (2) повністю аналогічне доведенню для СЧ (1) з ПЗ першого варіанту: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8.

Оскільки міра надлишковості системи числення визначає число розрядів в коді числа, а число розрядів в свою чергу визначається апаратними можливостями арифметичного пристрою, вибір СЧ для практичного застосування необхідно здійснювати в залежності від апаратних можливостей [6] і вимог проектування за умови підвищення контролюючих можливостей коду.

Висновки

В результаті проведених досліджень було доведено правила додавання в СЧ, утворених з рекурентної послідовності $B_n = B_{n-1} + B_{n-3} - B_{n-4}$ з початковими значеннями для трьох варіантів:

1) 1, 1, 2, 2, 4, 6, 8;
2) 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6;
3) 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9,

побудовано коди цифр в явному виді з використанням структурно-блокових кодів і визначено порівняльний рівень надлишковості цих СЧ.

Вибір конкретної СЧ для практичного застосування залежить від вимог проектування за умови підвищення контролюючих можливостей коду. Так, при обмеженнях, що буде накладитися на апаратні ресурси буде вибиратися СЧ з малою надлишковістю.

Список літератури

1. *Пат. 2023288 Российская Федерация, МПК: G0F007/49. Комбинационный сумматор структурных кодов / Ткаченко А.В., Харламов Д.В.; заявитель и патентообладатель: Краснодарское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск. – № 5018600/24; заявл. 01.07.91; опубл. 15.11.94.*
2. *Рудницький В.М. Метод підвищення швидкодії арифметичних пристроїв за рахунок суміщеного виконання операцій в структурно-блокових кодах / В.М. Рудницький, І.М. Федотова-Півень // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. – 2009. – Вип. 4 (78). – С. 117-119.*
3. *Маркушевич А.И. Возвратные последовательности / А.И. Маркушевич. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 48 с.*
4. *Пантєлєєва Н.М. Теоретичні основи створення природно-надійних комп'ютерних систем / Н.М. Пантєлєєва, В.М. Рудницький. – Черкаси: Брама-Україна, 2009. – 200 с.*
5. *Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьёв. – [изд. 4-е]. – М.: Наука, 1978. – 144 с.*
6. *Брюхович Е.И. Экономическая стратегия разработки вычислительных систем: место и роль счислений / Е.И. Брюхович // Управляющие системы и машины : научно-производственный журнал. Институт кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. – 1990. – № 2 (106). – С. 3-18.*

Надійшла до редколегії 9.04.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Шостак, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського "ХАІ", Харків.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ И МЕНЬШЕ СЛАГАЕМЫХ В ИЗБЫТОЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

В.Н. Рудницкий, И.Н. Федотова-Пивень, С.В. Беседина

В статье рассмотрено доказательство правил одновременного выполнения нескольких $k \subset (2; 3; 4)$ операций суммирования в рекуррентных системах счисления для разных начальных значений и построение кодов цифр в явном виде с использованием структурно-блочных кодов.

Ключевые слова: *параллельное сложение, избыточность, структурно-блочные коды, рекуррентные системы счисления.*

A DESIGN OF PROCESS OF PARALLEL ADDITION OF FOUR AND LESS SUMMANDS IN THE REDUNDANT NUMBER SYSTEMS

V.N. Rudnitsky, I.N. Fedotova-Piven, S.V. Besedina

In the article proof of rules of simultaneous implementation is considered a few to $k \subset (2; 3; 4)$ operations of adding up in the recurrent number systems for different initial values and construction of codes of numbers in an obvious kind with the use of structurally-sectional codes.

Keywords: *parallel addition, redundancy, structural - sectional codes, recurrent number systems.*